MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE -DREN ABIDJAN 1-COLLEGE PRIVE MERLAN ADJAME

Fomesoutra.com
ça soutra!

MATHEMATIQUES

Niveau : Tle D
Prof. : M. TEHUA
Date :

Cette fiche comporte deux (02) pages numérotées 2/2 et 2/2.

ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$.

1. Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interprète graphiquement les résultats obtenus.
3. Détermine le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$. Montre que h réalise une bijection de $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ sur un intervalle K à déterminer.
6. Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h.
7. Représente (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) : unité graphique : 1cm.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition et interprète graphiquement les résultats.
3. a. Calcule $f'(x)$.
   b. Détermine les variations de f.
   c. Dresse le tableau de variation de f.
4. Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 3.
5. Trace (C_f), dans un repère orthonormé (O, I, J).

EXERCICE 2

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x - 7}{x - 1}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de g.
2. a. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   b. Interprète les résultats.
3. a. Détermine la dérivée de la fonction g sur $]-\infty; 1[\cup]1; \infty[$.
   b. Détermine les variations de g.
   c. Dresse le tableau de variation de g.
4. a. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$
   b. Déduis-en que (C_g) admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation.
   c. Etudie la position de (C_g) par rapport à (Δ).
5. a. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $\alpha < \beta$.
   b. Justifie que que $-4,6 < \alpha < -4,6$ et $1,5 < \alpha < 1,6$.
   c. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
6. Trace (C_g), (Δ) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé (O, I, J).

PROBLEME COMPLET

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

PARTIE A

1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans un intervalle I que l'on précisera.
3) Vérifie que $2,1 < \alpha < 2,2$.
4) Démontre que : $\forall x \in]-\infty\,;\,\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant égale à 1 cm.

1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis interprète graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

   b) En déduis le sens de variations de la fonction f et dresse son tableau de variation.
3) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$.

   b) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ en $+\infty$.

   c) Etudie la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.
4) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes dans le repère (O, I, J). On prendra $\alpha = 2,2$.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à $[-2\,;\,-1[$.

1) Démontre que h est une bijection de $[-2\,;\,-1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Dresse le tableau de variation de h^{-1}, la bijection réciproque de h.
3) Représente $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.