

Cette fiche comporte trois (03) pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3

**FONCTION LOGARITHME NEPERIEN : ETUDE DE FONCTIONS**

**PROBLEME 1**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . On appelle  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (Unité graphique 2 cm).

- 1°) a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
b. Donner les interprétations graphiques des résultats.
- 2°) a. Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ .  
b. Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.
- 3°) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité 2 cm.

**PROBLEME 2**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = -x + x \ln x$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$

- 1°) a) Démontrer que  $f$  est continue en 0.  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0, et donner une interprétation graphique du résultat.
- 2°) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis donner une interprétation graphique des résultats.
- 3) a) Démontrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \ln x$ .  
b) En déduire les variations et le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité 2 cm.

**PROBLEME 3**

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$ .  
a. Détermine son sens de variation.  
b. Déduis-en le signe de  $f(x)$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; 2[ \cup ]2 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$ .  
On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .  
a. Calcule les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.  
Interprète graphiquement les résultats obtenus.  
b. Démontre que : pour tout  $x$  de  $]0 ; 2[ \cup ]2 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$ .  
c. Détermine le sens de variation de  $g$  et dresse son tableau de variation.  
d. Détermine une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1.  
e. Construis  $(C)$  et  $(T)$  dans le repère  $(O, I, J)$  (unité 2 cm).

## PROBLEME 4

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$ .

- Déterminer les limites de  $g$  en  $0$  et en  $+\infty$ .
- a) Pour tout  $x$  élément de  $D_g$ , déterminer  $g'(x)$  et déterminer son signe.  
b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de  $g$ .
- a) Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1,24; 1,25[$ .  
b) En déduire que  $g$  est négative sur  $]0; \alpha[$  et positive sur  $]\alpha; +\infty[$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$  et  $(C_f)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité : 2cm.

- Déterminer la limite de  $f$  en  $0$  et interpréter graphiquement le résultat.
- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 2$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .
- Déterminer la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- a) Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à  $D_f$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et le sens de variation de  $f$ .  
c) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- a. Montrer que  $f(\alpha) = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$ .  
b. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- Construire  $(\Delta)$  et  $(C_f)$  dans le même repère. On donne  $f(\alpha) \approx -1,2$ .

## PROBLEME 5

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - 1 + \frac{1 - \ln x}{x}$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité: 1cm)

### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

- Calculer les limites de  $g$  en  $0$  et  $+\infty$ .
- Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
- a. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$   
b. Démontrer que :  $\alpha \in ]1,3; 1,4[$
- En déduire que, pour tout nombre réel  $x \in ]0; +\infty[$ , si  $x < \alpha$ , alors  $g(x) < 0$  et si  $x > \alpha$ , alors  $g(x) > 0$

### PARTIE B

1) a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat.

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2) Démontrer que pour tout nombre réelle  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

3. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4a). Montrer que  $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$  et que  $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha}$

b) En prenant  $\alpha = 1,3$  calculer  $f(\alpha)$

5) a. Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .

b. Déterminer les positions relatives de la courbe  $(C_f)$  et de la droite  $(D)$

6) Déterminer les coordonnées du point  $A$  où la tangente à la courbe  $(C_f)$  est parallèle à la droite  $(D)$

7. Montrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $e^2$  est  $y = x - 1 - \frac{1}{e^2}$ .83.

8) Tracer  $(C_f)$ , et  $(T)$  et  $(D)$  (On prendra :  $e = 2,7$  ;  $e^2 = 7,4$  et  $e^{-2} = 0,14$ )

### PARTIE C

On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

- Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$
- Calculer  $F(e) - F(1)$