



Série d'exercices

Thème : Nombres complexes et similitudes planes directes

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module et un argument de z puis en déduire la forme algébrique de celui-ci.

1. $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

3. $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $z = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{-1 + i}\right)^2$

Exercice 2

1. Mettre sous la forme algébrique ($z = x + iy$) les nombres complexes :

a. $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

c. $z_3 = \left(\frac{i}{2-i}\right)^2$;

b. $z_2 = \frac{1+6i}{-i}$

d. $z_4 = (1+i)(\sqrt{3}+i)$.

2. Mettre sous la forme trigonométrique ($z = |z|(cos\alpha + isin\alpha)$) les nombres complexes :

a. $z_1 = 1 + i$

c. $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

b. $z_2 = \sqrt{3} + i$

d. $z_4 = (1+i)(\sqrt{3}+i)$.

3. Mettre sous la forme exponentielle ($z = |z|e^{i\theta}$), les nombres complexes :

a. $z_1 = (1+i)(-1-i)$

c. $z_3 = (\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})$

b. $z_2 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

d. $z_4 = \frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module et un argument de z :

1. $z = 1 + itan\theta$

4. $z = -sin\theta + icos\theta$

2. $z = 1 - itan\theta$

5. $z = \frac{cos\theta + isin\theta}{cos\theta - isin\theta}$

3. $z = cos\theta - isin\theta$

Exercice 4

1. Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant : $\begin{cases} z_1 - z_2 = -1 \\ -z_1 + iz_2 = \sqrt{3} \end{cases}$; i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

2. Ecrire les nombres complexes z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Exercice 5 : On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3}$ et $c = \frac{a^2}{b^3}$

1. Donner le module et un argument de c .

2. Donner la forme trigonométrique de $t = ab$.



Exercice 6 : On donne les nombres complexes $a = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $b = -5(1+i\sqrt{3})$

1. Déterminer un module et un argument de a , b et $\frac{b}{a}$.
2. Soit Z le nombre complexe tel que $aZ = b$;
 - a. Ecrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
 - b. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

Exercice 7 : On considère le nombre complexe z défini par : $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique.
2. On demande de :
 - a. Déterminer le module et un argument de z^2 .
 - b. En déduire le module et un argument de z .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$.
5. Déterminer les entiers n tels que z^n soit un imaginaire pur.



Exercice 8 : Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2 puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
3. En déduire le module et un argument de z .
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 9

1. Soit x et y des réels, $z = x + iy$ un nombre complexe
 - a. Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est sa partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ?
Quelle est le module de z ?
 - b. Soit α un argument de z pour $z^* \in \mathbb{C}^*$; déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z .
 - c. Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle β ; exprimer z' en fonction de z et β .
2. on considère l'équation (E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$
 - a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).
 - b. Soit les points $A(-4\sqrt{3} - 4i)$ et $B(-4\sqrt{3} + 4i)$ dans le repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$.
Calculer OA , OB et AB ; en déduire la nature du triangle OAB .
 - c. Soit le point $C(\sqrt{3} + i)$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe de D .
3. Soit G le barycentre des points pondérés $(O ; 1)$, $(D ; -1)$ et $(B ; -1)$.

- a. Montrer que G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.
- b. Placer les points A, B, C et G dans le repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$.



Exercice 10

1. On considère dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 - (5 + 5i)z - 2 + 14i = 0$.
 - a. Vérifier que : $(3 - i)^2 = 8 - 6i$.
 - b. Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et D d'affixes respectives $Z_A = 4 + 2i$ et $Z_D = 1 + 3i$.
 - a. Placer les points A et D.
 - b. Montrer que $(Z_A - Z_D)\overline{Z_D} = -10i$.
 - c. Montrer que le triangle OAD est isocèle rectangle en D.
3. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.
 - a. Vérifier que le point A appartient à (C).
 - b. La droite (OD) coupe le cercle (C) en un point B tel que : $Re(Z_B) > 0$. Construire le cercle (C) et placer le point B.
4. On pose : $\alpha = Z_B \overline{Z_D}$.
 - a. Justifier que α est un réel.
 - b. Montrer que : $|\alpha| = 10\sqrt{2}$.
 - c. Montrer que $Z_B = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$.

Exercice 11

1. On considère dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 + (\sqrt{5} + 2i)z + 1 + 4\sqrt{5}i = 0$.
 - a. Calculer : $(\sqrt{5} + 2i)^2$.
 - b. Vérifier que Le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$.
 - c. En déduire que les solutions de (E) sont :

$$a = (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \text{ et } b = (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right).$$
2. Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) est Le cercle de centre O est de rayon 3. Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5} + 2i$.
 - a. Montrer que le point Q appartient à (C).
 - b. Construire alors le point Q.
3. Soient A et B les points d'affixes respectifs les nombres complexes a et b .
 - a. Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C).
 - b. Vérifier $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OQ}$.

- c. En déduire que Le quadrilatère OAQB est un losange.
- d. Construire alors les points A et B.

Exercice 12 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E): z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.
 - a. Développer $(3 - i\sqrt{3})^2$.
 - b. Résoudre l'équation (E) .
2. Soit les points Ω et K d'affixes : $z_{\Omega} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_K = -2$.
 - a. Ecrire z_{Ω} et z_K sous forme exponentielle.
 - b. Placer z_{Ω} et z_K dans le plan complexe.
3. Soit l'équation : $(E'): z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.
 - a. Montrer que cette équation admet une solution imaginaire pure $z_1 = iy$ ($y \in \mathbb{R}$).
 - b. Résoudre cette équation (E') complètement.

Exercice 13

1. factoriser : $\alpha^2 - 2i\alpha - 1$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$.
3. On note r le module de α et θ un de ses arguments. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de (E) .
4. P désigne le plan complexe ; on note S_{α} l'application définie sur P par :

$$S_{\alpha}: P \rightarrow P$$

$$M(z) \rightarrow M'(z') \text{ tel que : } z' = i\alpha z + \alpha^2.$$

Déterminer α pour que S_{α} soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 14 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

Soient les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$. on note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par : $z_n = a^n z_0$.

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.
2. Ecrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.
3. Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 .
4. En déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

Exercice 15 : Soit f l'application du plan qui a tout point $M(z)$, associe $M'(z')$ tel que $z' = -iz + 4i$.

1. Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on déterminera son affixe ω .
2. a) Exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

b) Reconnaître l'application f et déterminer sa forme analytique.

3. Déterminer l'image par f de la droite $(d): y = 2x - 1$.

Exercice 16 : Soit $Z_A = -1$; $Z_B = -2 + i$; $Z_C = i$ et $Z_D = 1 - 2i$ des points du plan.

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s tel que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s' qui laisse invariant A et transforme B en C .
3. Déterminer l'expression analytique de la similitude s'' de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport 2.

Exercice 17

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que : $a = 4 + 5i$; $b = 3 + 4i$; $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$.
 - a. Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.
 - b. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz - 3 + 11i$.
 - c. Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$.

Exercice 18

Partie I : On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
2. Vérifier que $a = 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$.
3. En linéarisant $\cos^4 \theta$, avec θ , un nombre réel, montrer que $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$.
4. Montrer que $a = 4\cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$. (on rappelle que $\sin 2\theta = 2\cos \theta \sin \theta$).
5. Montrer que $4\cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ est une forme trigonométrique du nombre a puis montrer que $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^4 i$.

Partie II : On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$, les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a telles que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est $2i$.
2. Déterminer l'ensemble de points M d'affixe z tel que : $|z - 2i| = 2$.

Exercice 19

- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
- On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
 - Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.
 - Soit le nombre complexe $b = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Prouver que $b^2 = a$.
- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z' .
 - Vérifier que $z' = bz$.
 - Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.
- On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c .
 - Montrer que $|a - b| = |b - c|$ puis déduire la nature du triangle ABC.
 - Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{BA, BC})$.
- Soit T la translation du vecteur \vec{u} et D l'image de A par la translation T.
 - Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.
 - Montrer que $\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 20 : Soit le polynôme $P(z) = z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$.

- Après avoir vérifié que $(-1 - i)$ est racine de $P(z)$, résous dans \mathbb{C} , $P(z) = 0$.
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points : $A(z_A = 2)$, $B(z_B = i)$ et $C(z_C = -1 - i)$.
 - Placer les points A, B, C et I dans le repère.
 - Donner l'expression algébrique de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. Déduire la nature du triangle BAC.
- Soit S la similitude plane directe qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$$
 - Déterminer l'écriture complexe de la similitude S.
 - Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice 21 : Soit α un nombre complexe non nul.

On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E_\alpha) : X^2 - (i\alpha\sqrt{3})X - \alpha^2 = 0$. On pose : $X = \frac{iz}{\alpha}$.

- Montrer que l'équation (E_α) est équivalente à l'équation $(E) : z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$.
- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) .

3. En déduire dans \mathbb{C} les solutions de l'équation (E_α) .
4. Sachant $\alpha = |\alpha|e^{im}$; $m \in \mathbb{R}$. Mettre les deux solutions de l'équation (E_α) sous formes exponentielles.
5. On pose : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.
 - a. Ecrire z_1, z_2 et $Z = \frac{z_1^2}{z_2}$ sous la forme trigonométrique.
 - b. Ecrire Z sous la forme algébrique puis déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 22 : Soit m un nombre réel. On considère dans l'ensemble complexe \mathbb{C} , l'équation (E) d'inconnue z : $(E): z^2 - (m + 1)z + m + 1 + (1 - m)i = 0$

1. Vérifier que $\Delta = (m - 1 + 2i)^2$ est le discriminant de (E) puis résoudre l'équation (E) .
2. On suppose dans cette question que $m = 2 + \sqrt{3}$, et soient z_1 et z_2 les solutions de (E) .
 - a. Ecrire $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme algébrique.
 - b. Montrer que $\frac{z_2}{z_1} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ et déduire la forme exponentielle de z .

Exercice 23

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B et C d'affixe respectives : $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ et $c = a + b$
 - a. Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexe a et b .
 - b. Vérifier que $b^2 = a$ et placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2. Soit \mathbb{C} un ensemble des nombres complexes .
 - a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E_1): z^2 - 2z + 2 = 0$.
 - b. Préciser le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E_1) .
 - c. Résoudre dans \mathbb{C} de l'équation : $(E_2): (-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.
3. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 1cm. On donne les points A', B' et C' d'affixes respectives $z_{A'} = 1 + i$, $z_{B'} = 1 - i$ et $z_{C'} = 2 - 2i$.
 - a. Placer les points A', B' et C' dans le plan complexe.
 - b. Donner la forme trigonométrique de $U = \frac{z_E - z_{C'}}{z_E - z_{A'}}$ avec E un complexe d'affixe $z_E = 3$.
 - c. En déduire la nature du triangle A'EC'.
4. On considère la transformation R du plan P qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - 4 \end{cases}$
 - a. Donner l'expression complexe de R.
 - b. Préciser les éléments caractéristiques de R.

Exercice 24 : Soit $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \delta$ un polynôme complexe de degré 3 où α, β et δ sont des nombres complexes donnés.

1. Démontrer que si le polynôme $P(z)$ admet trois racines a, b et c alors on a simultanément :
 $a + b + c = -\alpha ; ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\delta$.
2. Former alors le polynôme $P(z)$ lorsque ses racines sont : $a = 1 + 3i\sqrt{3} ; b = -2 + i\sqrt{3}$ et $c = 4 - 2i\sqrt{3}$.
3. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.
 - b. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$.
 - c. En déduire la valeur $\frac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté (\vec{AB}, \vec{AC}) .
 - d. Donner l'écriture complexe de la similitude directe S de centre A ($S(A) = A$) qui transforme B en C. En déduire son écriture analytique.
 - e. Déterminer l'affixe z_1 du point B_1 qui a pour image B par S.

Exercice 25 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la transformation ponctuelle F, qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = m^3 z + m(m + 1), m \in \mathbb{C}^*$.

1. Donner la nature de la transformation F.
2. On suppose $m = 1 + i$. Donner dans ce cas les éléments géométriques de F.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.
 - a. Déterminer dans ce cas ses éléments caractéristiques.
 - b. Déterminer son expression analytique.
4. Déterminer l'ensemble des complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

Exercice 26

1. On considère un polynôme complexe P d'une variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + (13 + 3i)z - 12$$

- a. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
 - b. Trouver les nombres complexes a et b lorsque $P(z)$ peut s'écrire sous la forme :
 $P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$ puis résoudre dans \mathbb{C} cette équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i ; z_B = 3$ et $z_C = 2 + 2i$. S est une transformation du plan qui laisse le point A invariant et qui transforme B en C.
 - a. Ecrire sous forme exponentielle, les affixes des points A, B et C.

- b. Donner l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristiques de S.
 - c. Déterminer l'image du point C par S puis construire dans un même repère, le triangle ABC et son image par S.
3. Pour tout nombre complexe $z \neq 2 + 2i$, on considère une fonction d'une variable complexe z définie par : $f(z) = \frac{z-1+i}{z-2-2i}$.
 - a. Déterminer l'argument et le module de : $f(z_B)$. En déduire la nature du triangle ABC.
 - b. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - c. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.
4. Soit S une nouvelle transformation telle que : $K = \left(\frac{2-i}{5}\right)(z-3)$.
 - a. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M d'affixe z tel que $|K| = 1$.
 - b. Construire l'ensemble (C') image de (C) par S.

Exercice 27

Partie A : Dans l'ensemble \mathbb{C} des complexes, on donne l'équation : $(E): z^2 - 4z + 9 = 0$.

1. Vérifier que le discriminant est $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

Partie B : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$, et $c = a = 2 - \sqrt{5}$.

1. Vérifier que $|a| = 3$.
2. Montrer que le triangle OAB est isocèle.
3. Vérifier que $\frac{a-c}{b-c} = i$. Déduire la nature du triangle ABC.
4. Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur \overrightarrow{CA} .
5. Montrer que ABCD est un carré.
6. On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1-x_n}$, avec n , un entier naturel non nul.
 - a. Vérifier que $x_n \overline{x_n} = 1$.
 - b. Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n .

Exercice 28

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation définie par : $(E): z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$.
2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives : $-1 + 2i$ et $3 - i$.
 - a. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et transforme A en B.
 - b. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $-1 + 2i$ et de rapport $k = -2$. Déterminer l'écriture complexe de h .

- c. On pose $f = \text{hor}$. Donner l'écriture complexe de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
- d. Donner l'image de la droite $(\Delta): 3x + 3y + 5 = 0$ par f .

Exercice 29 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.
2. Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$, puis vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. En déduire une forme trigonométrique de b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.
4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $R(B) = B'$; $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$.
 - a. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi]$ où a' est l'affixe de A' .
 - b. Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.
 - c. Montrer que b' , l'affixe du point B', vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$.
 - d. En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O.

Exercice 30

1. Résoudre dans C l'équation : $2z^2 - 2iz - 1 = 0$.
2. Le plan orienté étant rapporté à un orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $\frac{-1+i}{2}$ et $\frac{1+i}{2}$. Démontrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle de sommet principal O.
3. On pose $Z = \frac{-1+i}{1+i}$
 - a. Écrire Z sous la forme trigonométrique.
 - b. En déduire les racines cubiques de Z sous la forme trigonométrique puis sous la forme algébrique.

Exercice 31

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $(E) : z^2 - 6z + 18 = 0$.
2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
3. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle chacun des nombres complexes suivants :
 $u = 3 + 3i$ et $v = \sqrt{3} - i$.
4. On pose : $W = u \times v$.
 - a. Écrire W sous algébrique.

- b. En utilisant 3), écrire W forme trigonométrique et exponentielle.
- c. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 32 : Soit p le plan muni d'un repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$,

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
2. Écrire les solutions sous forme trigonométrique.
3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2+2i$; $z_B = 2-2i$ et $z_C = 4$.
 - a. Placer les points A, B et C dans le plan.
 - b. Calculer le rapport $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$; en déduire la nature du triangle CAB , puis celle du quadrilatère $AOBC$.
4. Soit f la similitude directe du plan complexe qui laisse le point C invariant et qui transforme le point A en O .
 - a. Donner l'écriture complexe de f .
 - b. Donner les éléments caractéristiques de f .
5. Soit g la transformation de P dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = (1 - i)z + 4i$. Écrire sous forme algébrique, l'affixe de G' image du barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, 2)$ et $(C, -3)$ par g .

Exercice 33 : On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E): z^2 - az + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$; (où $a \in \mathbb{C}$).

Soit z_1 et z_2 deux solutions de (E) .

1. Montrer que $|z_1| \times |z_2| = 1$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
2. On pose : $z_1 = e^{i\theta}$.
 - a. Montrer que $a = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 - b. En déduire que si $z_1 = i$, alors $\sum_{k=0}^5 z_1^k a^k = 0$.
3. On pose : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et on considère $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$. Déterminer la nature du triangle OM_1M_2 .

Exercice 34 : On considère dans \mathbb{C} l'équation : $z^3 - (4 + i\sqrt{3})z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})z - 3i\sqrt{3} = 0$

1. Montrer que cette équation admet deux solutions réelles (on les notera α et β avec $\alpha < \beta$) et une solution imaginaire pure, notée w .
2. Soit f une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} telle que pour tout nombre complexe z :

$$f(z) = az + b, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des complexes.}$$
 - a. Déterminer a et b de telle sorte que $f(w) = w$ et $f(\alpha) = \beta$
 - b. Calculer le module et l'argument de a .



- c. Caractériser la transformation T du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

Exercice 35 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Unité : 2cm

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$
2. On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (-1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + 8i$
 - a. Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi qu'on déterminera
 - b. Déterminer les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$
 - c. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z)=0$
3. On considère les points $A ; B$ et C d'affixes respectives $-1-i ; 2-2i$ et $2i$
 - a. Placer les points $A ; B$ et C
 - b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse
 - c. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme
4. On considère le point E d'affixe $2+2i$
 - a. Placer le point E
 - b. Démontrer que les points $A ; B ; C$ et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

Exercice 36

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.
 - a. Calculer $P(-1)$.
 - b. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$p(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$$
 - c. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Unité graphique : 2cm. On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $a = -1 ; b = 2 + i\sqrt{3} ; c = 2 - i\sqrt{3}$ et $g = 3$.
 - a. Réalise une figure et placer les points A, B , et G .
 - b. Calculer les distances AB, BC et AC . En déduire la nature du triangle ABC .
 - c. Calculer un argument du nombre complexe $\frac{a-c}{g-c}$. En déduire la nature du triangle GAC .

Exercice 37

1. On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : z \in \mathbb{C} ; z^4 + (-5 + 3i)z^3 + (8 - 9i)z^2 + (-14 + 6i)z + 10 = 0$$
 - a. Vérifier que 1 et i sont des solutions évidentes de (E) .
 - b. Résoudre l'équation (E) .

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1; i; 1 - 3i; 3 - i$.
 - a. Placer ces points dans le repère.
 - b. Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.
 - ✓ Déterminer l'écriture complexe de S.
 - ✓ Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice 38 : Dans l'ensemble \mathbb{C} des complexes, soit $(E): z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$: Où d est un nombre complexe donné de module 2.

1. Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation (E) .
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .
3. Dans le plan complexe P , on considère les points A, B, M et N, d'affixes respectives : $2i; -i; -i + d$ et $-i - d$.
 - a. Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$.
 - b. En déduire que lorsque d varie dans \mathbb{C} , les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.
 - c. Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN
 - d. En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet A.

Exercice 39 : On considère l'application t définie par $t(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de t , alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de t .
2. Vérifier que si i est une racine de t et en déduire une autre racine de t .
3. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que : pour tout z de \mathbb{C} ,

$$t(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c).$$
4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $t(z) = 0$.
5. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$. (Unité graphique : 3cm). On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = -i, z_B = i, z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$; et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.
 - a. Placer les points A, B, C et D.
 - b. Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$; où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.
 - c. En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD.

Exercice 40

1. Soit $f(z) = z^3 - 4(1 + i)z^2 - 2(1 - 4i)z + 12$
 - a. Montrer que le polynôme complexe f admet une racine réelle, notée α .
 - b. Déterminer un polynôme $Q / \forall z \in \mathbb{C} f(z) = (z - \alpha)Q(z)$

- c. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
2. On donne : $a = -1 + i$; $b = 2$ et $c = 3 + 3i$
- Mettre a, b et c sous formes trigonométrique et exponentielle.
 - On considère les points A, B et C images respectives des nombres complexes a, b et c .
Placer A, B et C dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
 - Calculer le quotient $\frac{a-b}{c-b}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit S la transformation du plan transformant A en A' tel que $z_{A'} = -1 - 4i$ et de centre Ω d'affixe 1.
- Donner l'écriture complexe de la transformation S .
 - Déterminer les éléments caractéristiques de S .
 - Déterminer les affixes des points B' et C' image respectives de B et C par S
 - Donner l'expression analytique de S .
 - Déterminer le cercle (C') , image du cercle (C) de centre $I(1;1)$ et de rayon 2, par S .

Exercice 41

1. Soit P le polynôme de la variable z défini par : $P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9$
- Calculer $P(3)$
 - Montrer que, $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z - 3)(z^2 - 4iz - 3)$
 - On pose $z = u + 2i$
Ecrire $z^2 - 4iz - 3$ sous forme $Q(u)$, avec Q un polynôme de degré 2
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Q(u) = 0$
 - Déduire des questions précédentes les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $P(z) = 0$
2. On note z_1, z_2 et z_3 les solutions de l'équation $P(z) = 0$ de façon que : $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2) < \text{Im}(z_3)$ et on désigne par A, B et C leurs images respectives dans le plan.
- Placer les points A, B et C dans le repère, ainsi le point D d'affixe $4 + i\sqrt{3}$.
 - Soit \mathfrak{R} la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. Déterminer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C par \mathfrak{R} .
 - Montrer que le quadrilatère $AB'C'D$ est un parallélogramme.

Exercice 42

1. Dans \mathbb{C} on considère l'équation : $z^3 + (-4 - 6i)z^2 + (-4 + 20i)z + 16 - 16i = 0$.

- a. Démontrer que cette équation admet une solution réelle z_0 que l'on précisera.
 - b. Résoudre dans \mathbb{C} cette équation.
 - c. Démontrer que les trois solutions trouvées sont éléments d'une suite géométrique de premier terme z_0 dont on donnera la raison.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$
 - b. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme $A(i)$ en 0 et le point $B(\sqrt{3})$ en $B'(4i)$. Préciser ses éléments caractéristiques.
 - c. Donner l'expression analytique de S .

Exercice 43 : On considère l'équation : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).
3. Dans le plan complexe muni d'un repère *orthonormal* $(o; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
 - a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b. Montrer que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
4. Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B. Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω .

Exercice 44 : Le plan complexe est muni d'un repère *orthonormal* $(o; \vec{u}; \vec{v})$. On considère l'application f définie sur \mathbb{C}^* par : $f(z) = \frac{1}{3} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

1. On désigne par k le point d'affixe $f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Déterminer les coordonnées de k .
2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\epsilon : f(z) = \frac{2}{3} \cos \alpha$.
3. a) en déduire la solution dans \mathbb{C} l'équation $(E') = z^4 - 2(\cos \alpha)z^2 + 1 = 0$ (on donnera les solutions sous forme exponentielle).
 b). Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjugués.
 c). Décomposer le polynôme à variable réelle x définie par : $p(x) = x^4 - 2(\cos \alpha)x^2 + 1 = 0$ en un produit de deux polynômes de second degré à coefficient réels.
4. On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $2 \left(z - \frac{1}{3} \right) = (1 + i) \left(z' - \frac{1}{3} \right)$.
 Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 45

- I. Soit $A(-i)$ et $B(2)$ deux points du plan complexe.
 1. Déterminer les points C et D tels que $ABCD$ soit un carré de sens direct.
 2. Déterminer l'affixe du centre de gravité du carré.
- II. α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$, défini par : $P(z) = z^3 - (1 - 2\sin \alpha)z^2 + (1 - 2\sin \alpha)z - 1$.
 1. a. Calculer $P(1)$.
b. En déduire l'existence de trois réels a, b, c tels que $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$.
Déterminer a, b et c .
 2. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$.
 3. On considère trois nombres complexes: $z_1 = 1; z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha$ et $z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha$.
Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes $z_1; z_2$ et z_3 .

Exercice 46

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.
3. Soit $P(z)$ le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.
 - a. Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $u = z + \frac{1}{z}$.
 - b. Résoudre $\frac{P(z)}{z^2} = 0$
4. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = -i$

Exercice 47 : Déterminer la nature des transformations suivantes et leurs éléments caractéristiques :

1. $z' = z + 1 - 2i$
2. $z' = iz + 1$
3. $z' = 3z - 1 + i$
4. $z' = (1 + i)z - 1 + i$
5. $z' = z + 1 + 3i$
6. $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
7. $z' = (-1 + i)z + 2$.

Exercice 48 : Soit m un nombre réel. On considère les transformations T_m du plan complexe dans lui-même qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que : $z' = (m + i)z + m - 1 - i$

1. Peut-on trouver m tel que T_m soit une translation ?
2. Déterminer m pour que T_m soit une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

Exercice 49 : On considère S la transformation de centre $\Omega(-2; 1)$ et le point $A(1; -1)$ du plan :

- Déterminer l'écriture complexe de la transformation.
 - Déterminer l'image de A par la transformation S .
1. Symétrie de centre Ω .
 2. Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
 3. Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 50 : Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = 3iz - 1 - 7i$.

1. Justifier que S est une similitude directe.
2. Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer l'expression analytique de S .

Exercice 51 : Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'écriture complexe de f .
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
3. Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1} .

Exercice 52 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) , associe le point M' de coordonnées (x', y')

telles que : $\begin{cases} x' = x + y - 3 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$

1. Trouver l'écriture complexe de S .
2. En déduire que S est une similitude directe

Exercice 53 : Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par $A; B; C$ les points d'affixes respectives : $i, 2 + 3i$ et $2 - 3i$. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Déterminer l'affixe du point A' image du point A par la rotation r .
2. Démontrer que les points $A'; B$ et C sont alignés.
3. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A' .

Exercice 54 : On considère le plan affine euclidien P rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Soit S_1 l'application de P dans P qui, à tout point $M(x; y)$, associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- a. Montrer que z' est lié à z par la relation $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes que l'on précisera.
- b. En déduire la nature de S_1 et donner ses éléments caractéristiques.



2. On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et B le point d'affixe $z_B = -1$.
 - a. Démontrer qu'il existe une similitude plane directe S_2 qui transforme A en O et B en B
 - b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S_2 .
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S_1 \circ S_2$.

Exercice 55 : Soit P le plan complexe. On désigne par A le point d'affixe $3 - i$. On note f l'application de P dans P qui à, tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1. Calculer l'affixe du point P' l'image par f du point P d'affixe $1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image par f est le point Q' d'affixe $1 + i$.
3. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
 - a. $|z'| = 1$
 - b. $|z'| = 2$
 - c. z' est réel
 - d. z' est imaginaire pur.

Exercice 56 : Soit le nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et M le point image de z dans le plan complexe. On considère le nombre : $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+z}$.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et de y .
2. Démontrer l'ensemble des points M tels que $Z \in \mathbb{R}$ est une droite privée d'un point.
3. Démontrer l'ensemble des points M tels que $Z \in i\mathbb{R}$ est un cercle privé d'un point.

Exercice 57 : Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et $2i$. A tout nombre complexe $z \neq 2i$, on associe le nombre complexe $z' / z' = \frac{z-1}{z-2i}$ avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z), (E_1)$, tels que z' soit réel.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z), (E_2)$, tels que z' soit imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z), (E_3)$, tels que $|z'| = 2$.



« Sans la maîtrise des formules, les Mathématiques restent un mystère »

