COLLÈGE PRIVÉ MERLAN-ADJAMÉ

Secondaire Général de la 6ème à la Tle /Tél : 01 02 24 02 54
E-mail : collegeprivemerlan@yahoo.com / Code : 049577

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°2

Durée : 3 heures
Coefficient : 04
Prof. : M. TEHUA

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
L'usage de la calculatrice non graphique est autorisé.

EXERCICE 1 — 02 points

Pour chacune des affirmations suivantes, recopie le numéro de la ligne suivi de vrai si l'affirmation est vraie de faux si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction : $x \to 2 + cos^5 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \to -5 \sin x cos^4 x$
2	Si B et $\bar{B}$ sont deux évènements contraires alors $P(\bar{B}) = -P(B) + 1$
3	Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;\,5]$ et bijective de $[0\,;\,5]$ sur $[-1\,;\,3]$ telle que : $f(4) = 2$. Si $f'(4) = 0$, alors f^{-1} est dérivable en 2.
4	f *et* g sont deux fonctions telles que : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) \leq g(x)$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

EXERCICE 2 — 02 points

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule des affirmations est vraie. Écris sur ta copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	A	B	C
1	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, on a :	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$	$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$
2	f *et* g sont deux fonctions ; u *et* v et l sont des réels, soit $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to u} f(x) = v$ et $\lim\limits_{x\to v} g(x) = l$, alors	$\lim\limits_{x\to v}(fog)(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to u}(gof)(x) = l$	$\lim\limits_{x\to u}(gof)(x) = v$
3	Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, alors	(C_f) admet une demi-tangente horizontale	(C_f) admet une asymptote en $+\infty$.	(C_f) admet une demi-tangente verticale
4	Soient A et B deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors	$P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$	$A \cap B = \emptyset$	$P_A(B) = P(B)$

EXERCICE 3 — 03 points

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Détermine les réels a, b *et* c tels que pour $x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.
3. Détermine les primitives de f sur $]1\,;\,+\infty[$.
4. Détermine la primitive de f sur $]1\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 3.

EXERCICE 4 — 04 points

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fond et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'événement « il y a affluence de clients » et B l'événement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.
   a) Calcule la probabilité de l'événement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
   b) Démontre que la probabilité P(B) de l'événement B est 0,58.
   c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.
2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs données. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
   c) Calcule l'espérance mathématiques E(X) de X.
3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
   a) Justifie que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$.

EXERCICE 5 — 04 points

Soit f est une fonction définie sur IR par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Calcule les limites de f $en -\infty$ et $en +\infty$
2) a- Détermine la dérivée f' de f et en déduis les variations de f.
   b- Dresse le tableau de variation de f .
3) a- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
   b- Justifie que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.
   c- Donne un encadrement de α à 10^{-2} près par la méthode de balayage.
4) Justifie que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, & f(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, & f(x) > 0 \end{cases}$
5) a- Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1 ; +\infty[$; montre que h est une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle K à déterminer.
   b- Dresse le tableau de variation de h^{-1}.

EXERCICE 6 — 05 points

Une entreprise fabrique et vend des téléphones portables. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 net 18 portables. On suppose que toute la production est vendue. Le coût de production en milliers de francs de x téléphones portables est donné par :

$C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400.$

La recette de la vente de x téléphones portables est $R(x) = 480x - 20x^2$. L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal.

En tant que stagiaire dans cette entreprise, le directeur te demande de déterminer le nombre de téléphones portables à produire par jour pour que le bénéfice soit maximal.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, propose une solution au directeur.