CORRECTION + BAREME : DEVOIR DE NIVEAU : 3eT

1/11

Exercice 1 (2/2)

1 - Vrai 2 - Vrai 3 - Vrai 4 - Faux — 0,5 × 4

Exercice 2 (2/2)

1 - C 2 - C 3 - A 4 - B — 0,5 × 4

Exercice 3 (3/3)

$A = (\sqrt{3}+i)^n$

1) * Forme trigo de $\sqrt{3}+i$

Posons $z = \sqrt{3}+i$ et θ argument de z

$|z| = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d'après la formule de Moivre,

$A = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$

$A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin(k\pi)$ — 0

$\Rightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Rightarrow n = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

donc $A \in \mathbb{R}$ si et seulement si n est un multiple de 6. — 0,5

2) On appelle $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — 0,25

$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$

$= -\frac{3}{4} - 2\times\frac{i\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$ donc $\bar{j} = j^2$ — 0,25

b) $j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$ — 0,25

donc $j^{-1} = j^2$ — 0,5

3) On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$

a)

$\overline{P(\alpha)} = \overline{z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1}$

$= \overline{z^4} - \overline{3z^3} + \overline{z^2} - \overline{3z} + \overline{1}$

$= (\overline{z})^4 - 3(\overline{z})^3 + (\overline{z})^2 - 3\overline{z} + 1$

$= P(\overline{\alpha})$ → 0,25

b) Supposons que $P(\alpha) = 0$.

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \overline{P(\alpha)} = \overline{0}$ or $\overline{0} = 0$

donc $\overline{P(\alpha)} = 0$ or d'après

3-a) $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$ ainsi

$P(\overline{\alpha}) = 0$ → 0,25

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1$

$= \frac{1}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha} + 1$

2/11

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^4} - \frac{3\alpha}{\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{\alpha^4} - \frac{3\alpha^3}{\alpha^4} + \frac{\alpha^4}{\alpha^4}$

$= \frac{1 - 3\alpha + \alpha^2 - 3\alpha^3 + \alpha^4}{\alpha^4}$

$= \frac{\alpha^4 - 3\alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha + 1}{\alpha^4}$

$= \frac{P(\alpha)}{\alpha^4}$ or $P(\alpha) = 0$

donc $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ → 0,25

4) $(E) : \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $z = a + ib$

$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z-i| = |z+i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|a + i(b-1)| = |a + i(b+1)|$

$\sqrt{2} \times \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$

3/11

$\Rightarrow 2a^2+2(b-1)^2 = a^2+(b+1)^2$

$\Rightarrow a^2+2(b-1)^2-(b+1)^2 = 0$

$\Rightarrow a^2+2b^2-4b+2-b^2-2b-1 = 0$

$\Rightarrow a^2+b^2-6b+1=0$ → 0,5

$\Rightarrow a^2+(b-3)^2-3^2+1=0$

$\Rightarrow a^2+(b-3)^2-9+1$

$\Rightarrow a^2+(b-3)^2=8$

Exercice 4 (4/4)

$f(x) = e^{2x}-4e^{x}+4$

1-a) $*\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^{x}+4 = 4$ → 0,25

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

$*\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ donc la droite d'équation $y=4$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ → 0,25

b) $*\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-4e^{x}+4$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-4+\frac{4}{e^{x}}\right) = +\infty$ → 0,25

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-4+\frac{4}{e^{x}} = +\infty \end{cases}$

$*\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-4e^{x}+4}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}\left(e^{x}-4+\frac{4}{e^{x}}\right) = +\infty$ → 0,25

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-4+\frac{4}{e^{x}} = +\infty \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$. → 0,25

2-a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x}$

$= 2(e^{x} - 2)e^{x}$ → 0,25

b) * signe de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2e^{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ depend de $e^{x} - 2$

$\forall x \in]-\infty ; \ln 2[$, $f'(x) < 0$

$\forall x \in]\ln 2 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ → 0,25

* Sens de Variation de f :

• f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln 2[$

• f est continue et strictement croissante sur $]\ln 2 ; +\infty[$ → 0,25

* Tableau de Variation

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

→ 0,25

3) $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

• $f'(0) = -2$ et $f(0) = 1$

$(T) : y = -2(x - 0) + 1$

$(T) : y = -2x + 1$ → 0,25

4) ~~$f(x)$~~ $h(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 2x + 3$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x} + 2$

$= 2(e^{2x} - 2e^{x} + 1)$

$= 2((e^{x})^2 - 2e^{x} + (e^{x})^0)$

$h'(x) = 2(e^{x} - 1)^2$ → 0,25

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) > 0$ donc h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ → 0,25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$		0 ↗	

$\to 0{,}25$

c) $h(0) = e^0 - 4e^0 + 2\times 0 + 3$

$= 1 - 4 + 3 = 0$ $\longrightarrow 0{,}25$

$\forall x \in]-\infty; 0[\Rightarrow x < 0$ comme h est croissante sur $]-\infty; 0[$ alors $h(x) < h(0)$ or $h(0) = 0$ ainsi $h(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$.

$\to 0{,}25$

$\forall x \in]0; +\infty[\Rightarrow x > 0$ Comme h est strictement croissante alors $h(x) > h(0)$ or $h(0) = 0$ ainsi donc $h(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$

5) $f(x) - y =$

$= e^{2x} - 4e^{x} + 4 - (-2x + 1)$

$= e^{2x} - 4e^{x} + 4 + 2x - 1$

$= e^{2x} - 4e^{x} + 2x + 3$

$f(x) - y = h(x)$ or d'après la question 4-c on a :

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - y < 0$

$\Rightarrow f(x) < y$ donc $(\mathcal{C})$ est au dessous de (T) sur $]-\infty; 0[$.

$x \in]0; +\infty[$, $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - y > 0$

$\Rightarrow f(x) > y$ d'où $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T) sur $]0; +\infty[$.

$\to 0{,}5$

Exercice 5 5/5

A/ $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$

1) $I_0 = \int_1^e x \, dx$

$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$

$I_0 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$ → 0,5

$I_1 = \int_1^e x (\ln x) \, dx$

$I_1 = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx$

$I_1 = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} I_0$

$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right)$

$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$

6/11

$I_1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$ → 0,5

2-a) $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$

$I_{n+1} = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} \, dx$

Posons $\begin{cases} V(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow V'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n \\ U'(x) = x \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \frac{n+1}{2} \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \frac{n+1}{2} I_n$

$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$ → 0,5

2-b) $I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1$ → 0,25

$I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1$

$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$

$I_2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 - 1) \longrightarrow 0{,}25$

B/ Soit $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx$

1) Posons

$\begin{cases} U'(x) = e^x \Rightarrow U(x) = e^x \\ V(x) = \cos(2x) \Rightarrow V'(x) = -2\sin(2x) \end{cases}$

$K = \left[e^x \cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^x \sin(2x) \, dx$

$K = e^{\pi} - 1 + 2\int_0^{\pi} e^x \sin(2x) \, dx$

Soit $A = \int_0^{\pi} e^x \sin(2x) \, dx$

$\begin{cases} U'(x) = e^x \Rightarrow U(x) = e^x \\ V(x) = \sin 2x \Rightarrow V'(x) = 2\cos(2x) \end{cases}$

$A = \left[e^x \sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^x \cos(2x) \, dx$

$A = -2\int_0^{\pi} e^x \cos(2x) \, dx = -2K.$

donc $K = e^{\pi} - 1 + 2(-2K)$

$K + 4K = e^{\pi} - 1$

$5K = e^{\pi} - 1 \Rightarrow K = \frac{e^{\pi} - 1}{5} \longrightarrow 0{,}5$

2) $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x \, dx$

a) $I + J = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx + \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x \, dx$

$= \int_0^{\pi} e^x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$

$= \int_0^{\pi} e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^{\pi} = e^{\pi} - 1$

On a $I+J = e^{\pi}-1$ $\longrightarrow 0,5$

$$I-J = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\,dx - \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^x (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx$$

$$= K$$

donc $I-J = \dfrac{e^{\pi}-1}{5}$ $\longrightarrow 0,5$

2-b) D'après 2-a on a :

$$\begin{cases} I+J = e^{\pi}-1 & (1) \\ I-J = \dfrac{e^{\pi}-1}{5} & (2) \end{cases}$$

(1)+(2) : $2I = e^{\pi}-1 + \dfrac{e^{\pi}-1}{5}$

$2I = \dfrac{6(e^{\pi}-1)}{5} \Rightarrow I = \dfrac{3(e^{\pi}-1)}{5}$ $\longrightarrow 0,25$

D'après (1) on a :

$$J = e^{\pi}-1 - \frac{3(e^{\pi}-1)}{5}$$

$J = \dfrac{2(e^{\pi}-1)}{5}$ $\longrightarrow 0,25$

c) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x+1+\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

1) • $[f(x)-y] = x+1+\dfrac{1+\ln x}{x^2} - (x+1)$

$$= \frac{1+\ln x}{x^2}.$$

• Signe de $f(x)-y$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f(x)-y$ dépend de $1+\ln x$. $\longrightarrow 0,25$

$\forall x \in]0; e^{-1}[$, $f(x) - y < 0$
donc $(\mathcal{C})$ est au dessous de $(\mathcal{D})$.
$\forall x \in]e^{-1}; +\infty[$, $f(x) - y > 0$
ainsi $(\mathcal{C})$ est au dessus de $(\mathcal{D})$.

→ 0,25

2) Comme $]\frac{1}{e}; 1[\subset]\frac{1}{e}; +\infty[$
alors

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (f(x) - y)\,dx \cdot U.a$$

* $U.a = OI \times OJ = 2\,cm \times 1\,cm$

$U.a = 2\,cm^2$.

* Posons $B = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (f(x) - y)\,dx$

$$B = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1 + \ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x^2}(1 + \ln x)\,dx$$

9/11

$$\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow U(x) = -\frac{1}{x} \\ V(x) = 1 + \ln x \Rightarrow V'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$B = \left[-\frac{1}{x}(1 + \ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$B = \left[-\frac{1}{x}(1 + \ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$B = -(1) - e\left(1 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) - 1 + e$$

$$B = -1 - e(1 - 1) - 1 + e$$

$$B = -2 + e$$

donc $\mathcal{A} = B \times 2\,cm^2$

$\mathcal{A} = 2(-2 + e)\,cm^2$ → 0,5

Exercice 6 $\cancel{4}/14$ 10/11

Leçons Nombres complexes et géométrique du plan

- Resoudre l'équation (E)
- Identifier z_A ; z_B et z_C
- Vérifier si ABC est rectangle isocèle en B.

CM1

• Posons $P(z) = z^3 - (6+9i)z^2 + (45i-9)z + 54 - 54i$

Soit $z_0 = b$ la solution réelle pure de (E).

$P(b) = 0 \Leftrightarrow b^3 - (6+9i)b^2 + (45i-9)b + 54 - 54i = 0$

$\Leftrightarrow b^3 - 6b^2 - 9b + 54 + i(-9b^2 + 45b - 54) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 - 6b^2 - 9b + 54 = 0 & ① \\ -9b^2 + 45b - 54 = 0 & ② \end{cases}$

② $-9b^2 + 45b - 54 = 0$

$b_1 = 3$ et $b_2 = 2$

$b_1 = 3$ vérifie l'équation ① donc $b = 3$ d'où $z_0 = 3$.

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + c)$

$P(z) = z^3 + (a-3)z^2 + (c-3a)z - 3c$

Par identification :

$\begin{cases} a = -3 - 9i \\ c = -18 + 18i \end{cases}$

~~$P(z) = z^3 - (3+9i)z$~~

$P(z) = (z-3)(z^2 - (3+9i)z - 18 + 18i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z^2 - (3+9i)z - 18 + 18i = 0$

$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z = 3+3i$ ou $z = 6i$

$S_C = \{3 ; 3+3i ; 6i\}$

• $z_A = 3$; $z_B = 3+3i$ et $z_C = 6i$

$$\bullet \quad \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{3-(3+3i)}{6i-(3+3i)}$$

$$= \frac{-3i}{-3+3i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \neq i$ et $-i$ donc

ABC n'est pas un triangle rectangle et isocèle en B.

Conclusion

L'affirmation de ces élèves est fausse.

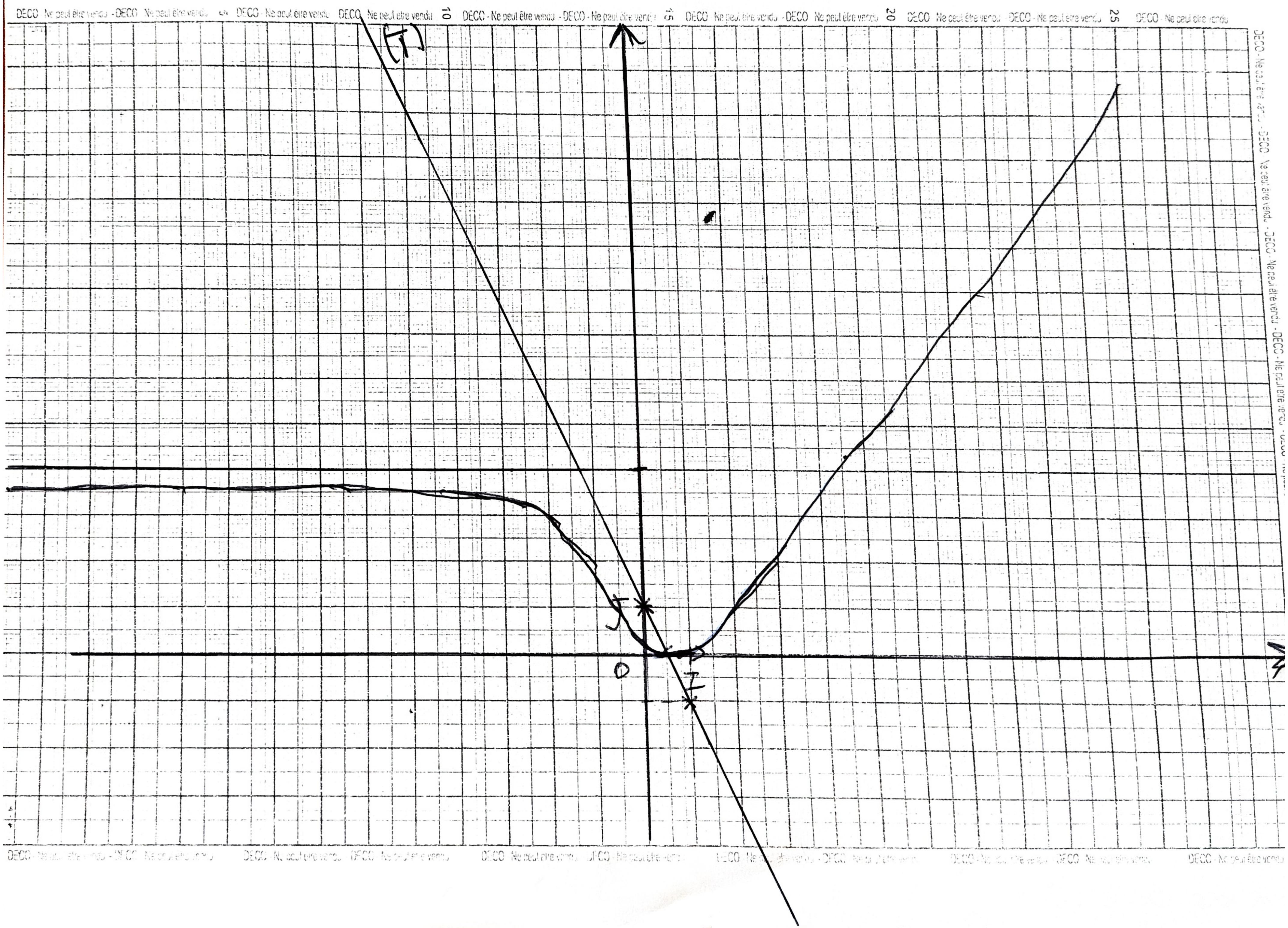
11/11

$CH_1 \longrightarrow$
- 1 ind/4 → 0,5 pt
- 2 ind/4 → 1 pt
- 3 ind/4 → 1,5 pt

$CH_2 \longrightarrow$
- 1 ind 3 → 0,5 pt
- 2 ind/3 → 1 pt

CH_3
- 1 ind/3 → 0,5 pt
- 2 ind/3 → 1 pt

Cp
- 1 ind/2 → 0,25 pt
- 2 ind2 → 0,5 pt


0