DEVOIR DE NIVEAU
NIVEAU: TleD

MATHÉMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 4 heures
CE. MATHEMATIQUE

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1; 2 et 3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste. Écris sur ta copie, le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation juste. **Exemple : 5-C**

N°	Affirmations	A	B	C
1	On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)$ est égal à	1	$\frac{1}{2}$	2
2	Si f est une fonction telle que : $\forall x > 2.\ \lvert f(x)-1\rvert \leq \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ alors	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3	$si\ f$ est une fonction continue et strictement décroissante sur $]a\,;b]$, alors l'image de $]a\,;b]$ par f est	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\,;f(b)\right]$	$\left]f(b);\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\right[$	$\left[f(b);\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\right[$
4	f est une fonction impaire et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O, I, J)	La droite (OI) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$	Le point O est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$	Le point I un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des propositions ci-dessous, dis si elle est vraie **(V)** ou Fausse **(F)** en écrivant sur ta copie par **exemple 5.V** pour dire que la proposition 5 est vraie.

1. Pour tout ombre réel strictement positif a on a : $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a}$
2. Si f est tune fonction telle que : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) \leq \frac{1}{x^2} alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
3. Soit $f\ et\ g$ sont deux fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = x^3$. Alors les courbe représentatives de $f\ et\ g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. Si $\forall x \in]a;\,+\infty[, f(x) \leq g(x) et \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

EXERCICE 3 **(3 points)**

Soit la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout $x \in]0;\ +\infty[, -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Soit h la restriction de f à $[1\ ;\ +\infty[$, montrer que est une bijection de$[1\ ;\ +\infty[$ vers un intervalle K à déterminer.
3. Déterminer le sens de variation de h^{-1}, la bijection réciproque de h puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que l'équation (E): $x \in]1\ ;\ +\infty[, f(x) = 0$ admet une solution unique α.
5. Calculer $f(1{,}5)\ et\ f(1{,}6)$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 0, 01.
6. Déterminer le signe de $f(x)$.

EXERCICE 5 **(5 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{cos2x-1}{x^2}$.

1. Détermine la limite de $f\ en -\infty$.
2. Justifie que $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$
3. Déduis-en que f admet un prolongement par continuité en 0, puis précise son prolongement.

Partie B

On considère la fonction g défini par : $g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$. On désigne par (C) la courbe représentation de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.

JE SUIS JEUNE, JE VEUX ET JE PEUX REUSSIR, JE REFUSE DONC DE TRICHER

2. Justifie que (C) admet en $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

Partie C

On donne h la fonction défini sur $[0\,;\,+\infty[$ $par\ h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

1. Démontrer que h est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers un intervalle K que tu l'on précisera.
2. Dresse le tableau de variation de la bijection réciproque h^{-1}.
3. Détermine l'expression de h^{-1}.

EXERCICE 6 **(3 points)**

Un artisan produit des articles. Un technician du MInistère de l'Artisanat, après une étude de son activité, a estimé que si tous les articles produits sont vendus, le bénéficemoyen, en milliers de francs, des x articles est estimé par la function suivante:

$$f(x) = 4000x + \frac{400\,000}{x}\ , x \geq 1.$$

Voulant connaître l'évolution de son activité, il soumet le résultat de l'étude à son fils élève en classe de terminale D au CBA.

1. Détermine le benefice que l'artisan fera pour 100 articles, pour 1000 articles vendus.
2. Dis comment évoluera le benefice. Justifie ta réponse