R.C.I * MENET-FP * DREN ABIDJAN 4 COLLEGE BOCABO & ASSOCIES ABOBO R.C.I * MENET-FP* DREN ABIDJAN 4

DEVOIR SURVEILLE N°1
NIVEAU: $T^{le}D_2$
Année-Scolaire : 2022/2023

MATHÉMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{24}}}\ h$
Enseignant : M. KABY

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1; 2 et 3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris le numéro de chacune des affirmations suivantes suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de faux si elle fausse. Exemple :5 - Vrai

N°	Affirmations
1	Si f est une fonction continue est strictement croissante sur $[1\,;2]$ telle que $f(1) = 2\ et\ f(2) = 10$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[1\,;2]$.
2	Une expérience aléatoire où l'on s'intéresse à un évènement appelé succès et à sa non réalisation appelée échec est un schéma de Bernoulli
3	Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, alors (C) admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale.
4	Soit g une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $]-2\,;2[$, (Cg) sa representation graphique dans le plan muni d'un repère. Le point A(1 ; $g(1)$) est un point d'inflexion de (Cg) lorsque la dérivée seconde de g s'annule en changeant de signe en 1.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste. Écris sur ta copie, le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation juste. **<u>Exemple : 5-C</u>**

N°	Affirmations		
1	f étant une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et f^{-1} sa bijection réciproque, si f est dérivable sur $]0\,;+\infty[, f'(2) = 0\ et\ f(2) = \frac{1}{2}$, alors	A	f^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$
		B	$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
		C	$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
2	La fonction : $x \to \cos(6x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction	A	$x \to 12\sin(6x^2)$
		B	$x \to -12x\sin(6x^2)$
		C	$x \to -12\sin(6x^2)$
3	$x\ et\ y$ sont des nombres réels strictement positifs. on a : $\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^4y^6}}$ est égal à	A	x^2y^3
		B	x^2y
		C	$y\sqrt[3]{x^2}$
4	Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4\ \ etP = \frac{2}{3}$ donc $P(X = 1)$ est égale à	A	$\frac{135}{256}$
		B	$\frac{8}{81}$
		C	$\frac{32}{81}$

JE SUIS JEUNE, JE VEUX ET JE PEUX REUSSIR, JE REFUSE DONC DE TRICHER

EXERCICE 3 (3 points)

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = x|x^2 - 1|$

1. Écris g sans le symbole valeur absolue.

2. Étudie la dérivabilité de g en -1.

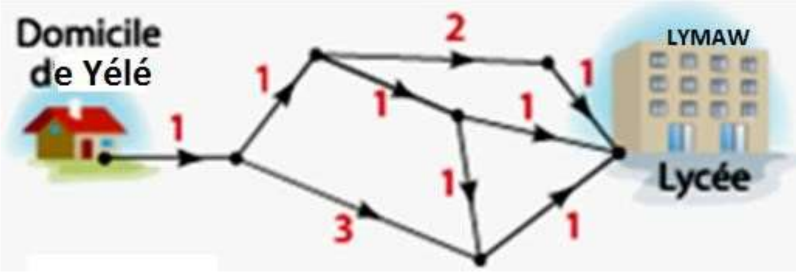
3. On considère h la restriction de g à [0 ; 1].

a) Justifie que :$\forall t \in [0\,;1], -2 \leq g'(t) \leq 1$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que : $\forall x \in [0\,;1], -2x \leq g(x) \leq x$.

EXERCICE 4 (4 points)

Pour se rendre au lycée de Williamsville, Yélé une élève de la terminale D2, peut emprunter l'un des chemins schématisé ci – dessous. Les distances indiquées sur les segments de chemin sont exprimées en centaines de mètres.



Chaque matin, Yélé tire au hasard le chemin qu'elle empruntera. X est la variable aléatoire qui donne la longueur du chemin emprunté.

1. Détermine les valeurs de X à partir des 4 chemins qu'elle peut emprunter

2. Détermine la loi de probabilité de X

3. Calcule son espérance mathématiques $E(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$

4. Yélé se déplace à vélo à une vitesse v = 1,425 km. h $^{-1}$. A quel instant au plus tard

doit – elle quitter son domicile pour s'assurer d'être à l'heure au cours de 7 h 30 mn?

5. Dans la semaine, Yélé a cours lundi, mardi, jeudi et vendredi.

Calcule la probabilité quelle parcours 1.7 km durant 3 jours

6) Y est la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'elle emprunte le chemin le plus court.

a) Donne la loi de probabilité de Y

b. Combien de fois en moyenne emprunte – t – elle un plus court chemin?

c. Déduis-en la longueur moyenne parcourue par semaine pour se rendre au lycée.

EXERCICE 5 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique est 2 cm.
Soit f la function définie sur $]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty[\ par : f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.
On note la courbe representative de f.

1. Démontre que (C) admet aux points d'abscisses respectives $-1\ et\ 1$ une demi-tangente parallèle à (OJ).
2. Démontre que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.
3. a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
4. On admet que f est derivable sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et sur $]1\ ;\ +\infty[$. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Trace (C) et (D).
6. Soit h la restruction de f à $]-\infty\ ;\ -1]$.
a) Justifie que h est une bijection de $]-\infty\ ;\ -1]$ sur $[-1\ ; 0[$.
b) Calcule $h\left(-\sqrt{2}\right)$.
c) Soit h^{-1} le bijection réciproque de h.
Démontre que h^{-1} est derivable en $1 - \sqrt{2}$ et Calcule $(h^{-1})'\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

EXERCICE 6 (5 points)

Dans le cadre de la lutte contre la Covid-19, un laboratoire de médecins chercheurs teste un vaccin dénommé **« Johnson »** sur un ensemble d'individus ayant contracté le virus.
60% des individus acceptent de prendre le vaccin, les autres refusent. Chez les individus ayant fait le vaccin, on constate la guérison avec une probabilité de 0, 8. Et on ne constate aucune guérison pour 90% des personnes ayant refusé le vaccin.
Pour avoir une idée claire sur l'efficacité de ce vaccin, on interroge un des médecins chercheurs, celui-ci affirme que pour un échantillon de 4 individus pris au hasard parmi ceux ayant contracté le virus, il ya plus de 90% de chance d'avoir au moins une personne guérie, et ce grâce au vaccin.

Il est question pour toi de nous rassurer de la véracité de l'affirmation de ce chercheur avec des arguments solides basés sur tes connaissaces mathématiques.

DEVOIR SURVEILLE

EPREUVE : MATHEMATIQUES　　DATE : 18 /01 / 2023　　HEURE : 4 H

CORRIGE ET BAREME　　SERIE : D

<table>
<tr><td>CORRIGE</td><td>BAREME</td></tr>
<tr><td>Exercice 1 (2pts)
1- F　2- V　3 - V　4- V -------------------------------</td><td>
$0,5 \times 4$</td></tr>
<tr><td>Exercice 2 (2pts)
1- A　2- B　3- C　4- B---------------------------------</td><td>
$0, 5 \times 4$</td></tr>
<tr><td>Exercice 3 (3pts)
1- Écris h sans symbole de valeur absolue
$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[, g(x) = x(x^2 - 1) \\ \forall x \in]-1 ; 1[, g(x) = x(1 - x^2) \end{cases}$ ------------------------------
2. g(-1)= 0
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = 2$, h est dérivable à gauche en -1 et $g'_g(-1) = 2$---------
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = -2$, h est dérivable à droite en -1 et $g'_d(-1) = -2$-------
D’où $h'_g(-1) \neq h'_d(-1)$, donc h n’est pas dérivable en -1-------------------
Interprétation graphique --
3. a) $\forall t \in [0 ; 1], -2 \leq h'(t) \leq 1$. Justification correcte ----------------------
b) $\forall x \in [0; 1], -2x \leq g(x) \leq x$
Démonstration correcte (à l’aide de l’inégalité des accroissements finis) ------</td><td>

0,5

0,5
0, 5
0, 25
0, 5
0, 25

0, 5</td></tr>
<tr><td>Exercice 4 (4pts)
1. Les valeurs de X sont 4 et 5 --
2. La loi de probabilité<table><tr><td>x_i</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$P(X = x_i$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td></tr></table>3. son espérance mathématique est :
E(X)= $1 + \frac{15}{4} = \frac{19}{4}$ ---
$\sigma(X) =$ --
4. $t = \frac{d}{v} = \frac{19}{4} \times 100 \times \frac{60}{1425} = 20$ mn--
Donc Yélé doit quitter son domicile au plus tard à 7h 10 mn-------------
5. Elle emprunte 3 fois un chemin de 400m et 1 fois un chemin de 500m. $P(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$--
6. a) La loi de probabilité de y<table><tr><td>k</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>$P(X = k$</td><td>$\frac{81}{256}$</td><td>$\frac{108}{256}$</td><td>$\frac{54}{256}$</td><td>$\frac{12}{256}$</td><td>$\frac{1}{256}$</td></tr></table>b) $E(y) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$---
c) D= $1 \times 4 + 3 \times 5 = 19$ soit 1900 m ----------------------------------</td><td>
0, 5

0, 5

0, 25
0,25

0, 25
0, 25

0,5
0, 5

0,5
0,5</td></tr>
</table>

Exercice 5 (5pts)

1. dérivabilité de f en -1et en 1

•$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} \frac{f(x)-f(-)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) =$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} 1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$.--

0, 25

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} \frac{f(x)-f(-)}{x+1} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en -1, (C) admet donc une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1---------

0, 25

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(-)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\text{li}\ 1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$-----------------------------

0, 25

Interpretation : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(-)}{x+1} = +\infty$, f n,est pas dérivable en 1.

(C) admet donc une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1-------

0, 25

2. Démontrons que (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

0, 25

donc la droite (OI) d'équation y = 0 est asymptote à (C) en $-\infty$.--------

0, 25

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$------

0, 25

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-1}-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x^2-x}+x} = 0$ ---------------------------------------

0, 25

Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à (C) en +∞--

0, 25

c) Étudions le signe de $f(x)-2x$

- $\forall x \in]-\infty;\ -1]\,, \sqrt{x^2-1} \geq 0\ et - x > 0$ d'où $f(x)-2x > 0$

Sur $]-\infty;\ -1]$donc (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;\ -1]$--------------

0, 25

- $\forall x \in [1\ ;\ +\infty[, \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}} < 0, d'où f(x)-2x < 0$ donc (C) est au-dessous de (D) sur $[1\ ;\ +\infty[$---------------------------------------

0, 25

4. Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation

$\forall x \in D_f, f'(x) = 1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$ --------------------

0, 25

$\forall x \in D_f, \sqrt{x^2-1} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend de $\sqrt{x^2-1}+x$

- $\forall x \in]-\infty;\ -1[, x^2-1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2}$
  $\Rightarrow \sqrt{x^2-1} < |x|$
  $\Rightarrow \sqrt{x^2-1}+x < 0$ donc $\forall x \in]-\infty;\ -1[, f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;\ -1[$--------------------------

0, 25

- $\forall x \in]1;\ +\infty[, \sqrt{x^2-1} > 0$ et $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+x > 0$ donc $f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $]1;\ +\infty[$------------

0, 25

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	‖	+	
$f(x)$	0	↘	-1 ‖	‖ 1	↗	$+\infty$

0, 25

5. représentation graphique (voir papier millimétré) ------------------------

6. a) f est continue et strictement décroissante sur$]-\infty;\ -1]$.
h étant la restriction de f à $]-\infty;\ -1]$ donc h continue et strictement décroissante sur $]-\infty;\ -1]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty;\ -1]$ sur $h(]-\infty;\ -1]) = [0\,;1[$ --------------------------------------

1

b) $h(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$ ---

c) $h(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$ et $h'(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$ comme $h'(-\sqrt{2}) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable en $1-\sqrt{2}$.

0, 25

0, 25

$(h^{-1})'(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -1-\sqrt{2}$ --

Exercice 6 (5 pts)

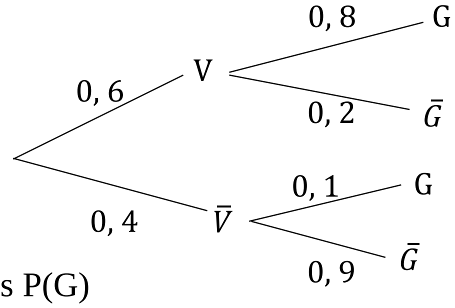
0, 25

Pour vérifier l'affirmation du chercheur, je vais fait appel à la notion de probabilité condition et variable aléatoire. Pour ce faire, je vais utiliser la probabilité conditionnelle et la loi binomiale. Je vais :

- Établir l'arbre pondéré correspondant à la situation ;
- Calculer la probabilité de l'évènement G « l'individu est guéri » ;
- Déterminer les valeurs prises par X puis établir la loi de probabilité ;
- Calculer $P(X \geq 1)$ puis conclure

- L'arbre pondéré

Soient G « la personne est guérie » et V « la personne a accepté le vaccin ».



- Calculons P(G)

$P(G) = P(V \cap G) + P(\bar{V} \cap G) = 0{,}52$

- Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

Loi de probabilité

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0, 05	0, 23	0, 37	0, 27	0, 07

- Calculons $P(X \geq 1)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,05 = 0,95$

Il y a environ 95 % de chance d'avoir au moins une personne guérie sur les 4 interrogés, donc les affirmations du médecin sont vraies.

GRILLE DE NOTATION

CRIETERES	**Indicateurs de performance**	**barème**
CM1 : Pertinence	- je fais appel à la notion de probabilité conditionnelle - présence d'arbre pondéré - présence de loi binomiale - Présence de calcul de P(G) - Présence de calcul de $P(X \geq 1)$	**0, 75 pts** 1ind/5→ $0,25$ 2ind/5→ 0,5 3ind/5→ $0,75$
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques	- Respect des étapes de la démarche - Arbre pondéré correct - Exactitudes formules - P(G) correcte - P(($X \geq 1$) correcte	**2, 5 pts** 1ind/5→ $0,5$ 2ind/5→ 1 3ind/5→ $1,5$ 4ind/5→ 2 5ind/5→ $2,5$
CM3 : Cohérence des réponses	- $P(X \geq 1) \approx 0,95$ - Il y a environ 95 % de chance d'avoir au moins une personne guérie sur les 4 interrogés, - Les affirmations du médecin sont vraies	**1, 25 pts** 1 ind/3→ 0,75 2ind/3→ $1,25$
CP : Critère de perfectionnement	-Conclusion - Originalité - Présentation	**0, 5 pt** 1ind/3→ $0,25$ 2 ind/3→ $0,5$