Année-Scolaire :2023-2024

LYCÉE DE SAPAGA **Date** : 04/11/2023

Prof : M.TIORO **Durée** : 3h00

Classe : Tle. D **Coef** :05

DEVOIR SURVEILLE N^o 1 DE MATHÉMATIQUES DU 1[er] TRIMESTRE

(Calculatrices non autorisées)

Exercice 1

On considère le nombre complexe α défini par $\alpha = \dfrac{3-i}{2+i} + \dfrac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$.

1. Écrire α sous la forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système d'inconnues z et z' : $\begin{cases} z + iz' = 1 + i \\ \dfrac{1}{2}z + (1-i)z' = 2 - 5i \end{cases}$

3. Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On a les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$. On considère l'application f de P privé de A dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z-3+i}{-iz+2}$.
   a) Soit C le point d'affixe $1-i$. Calculer l'affixe de $f(C)$.
   b) Montrer que $z' = \dfrac{i(z-3+i)}{z+2i}$.
   c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z' .
   d) En déduire :
   • L'ensemble E_1 des points M tel que $z' \in \mathbb{R}^*$.
   • L'ensemble E_2 des points M tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$.
   • L'ensemble E_3 des points M tel que $|z'| = 1$.

Exercice 2

1. **a)** Déterminer le nombre complexe ω tel que : $\omega\,(1+i) = 1 + 3i$ puis calculer $i\omega^2$.
   b) Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^2 - (1+3i)\,z - 4 + 3i$.
   Montrer que $f(z)$ peut se mettre sous la forme $(z-\omega)\,(z-i\omega)$.
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation : $f(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$, on considère les points A et B d'affixes respectives :$a = 2 + i$ et $b = -1 + 2i$.
   a) Placer les points A et B dans le repère. La figure sera complétée au fur et à mesure.
   b) vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB.
   c) C est le point d'affixe $c = 1 + \frac{1}{2}i$.
   Déterminer l'affixe d du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que :
   $mes\left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   d) On note J , K , L et M les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DA]$, CD et $[BC]$.
   Déterminer la nature exacte du quadrilatère $JKLM$. Justifier.

BONNE INSPIRATION !!!

.

Exercice 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ ($unit$é : $1cm$).

1. Soit d le nombre complexe défini par : $d = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$.
   a) Écrire d sous la forme algébrique , puis déterminer ses racines carrées.
   b) En déduire la solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - (3+2i)z - 1 + 13i = 0$.
   On notera z_1 la solution de partie réelle positive et z_2 l'autre solution.

2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .
   a) Déterminer l'affixe du point C dont l'image par la translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $4i$ est le point B.
   b) Déterminer une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

3. M étant le point d'affixe z différent de $4-i$, on considère le nombre complexe Z défini par : $Z = \dfrac{iz+3+i}{z-4+i}$.
   a) Vérifier que : $Z = \dfrac{i(z+1-3i)}{z-4+i}$.
   b) Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de Z .
   c) Déterminer et construire l'ensemble de points M du plan tel que Z soit de moule 1 .