

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 DU DEUXIÈME TRIMESTRE

(Calculatrices non autorisées)

EXERCICE 1

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
 - a) $y' - 2y = 0$ b) $y' + 3y = 0$
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée :
 - a) $(E) : y' - 4y = 0$ et $f(0) = 3$
 - b) $(E) : y' + \sqrt{2}y = 0$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.
 - c) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que $f(\frac{\pi}{4}) = -2$ et $f'(\pi) = 8$.
 - d) Quelle est la solution f de l'équation différentielle $9y'' + y = 0$ sachant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 0$ et $\int_0^{\pi} f(t) dt = 3$

EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt \quad J = \int_0^{\ln 2} (x+2) e^{-x} \, dx \quad N = \int_1^2 x \ln x \, dx \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t^3 \sin t \, dt$$

$$M = \int_2^0 x \sqrt{2x^2 + 1} \, dx$$

EXERCICE 3

1. On considère la courbe (Γ) de représentation paramétrique dans le repère $(O; I; J)$:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
 - (a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) .
 - (b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse \vec{v} en $t = \frac{\pi}{4}$
2. On considère la courbe (Γ') de représentation paramétrique dans le repère $(O; I; J)$:

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = \frac{t}{e^t - 1} + 1, \quad t > 0 \end{cases}$$
 - (a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') .
 - (b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse \vec{u} en $t = 1$

EXERCICE 4

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et pour tout naturel } n, Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i.$$

1. Calculer Z_1 et Z_2 .
2. Pour tout naturel n , on pose $U_n = Z_n - i$
 - (a) Calculer U_0 , U_1 et U_2 .
 - (b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
 - (c) Montrer que pour tout n , $U_n = (1 - i) \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
3. On pose $Z_n = X_n + iY_n$.
 - (a) Exprimer X_n et Y_n en fonction de n .
 - (b) Étudier la convergence des deux suites (X_n) et (Y_n) de terme général respectif X_n et Y_n ..
 - (c) On admet le résultat suivant : « Si $Z_n = X_n + iY_n$ et si les suites (X_n) et (Y_n) sont convergentes, alors la suite (Z_n) est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n + i \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n \right)$ ». Donner alors la limite de la suite (Z_n) s'il y a lieu.

BONNE INSPIRATION!!!