ELHAJJAJI MATHS

ETUDE DES FONCTIONS

2BAC S.M

correction des examens:

- 2003 ORDINAIRE
- 2004 ORDINAIRE
- 2005 ORDINAIRE
- 2006 ORDINAIRE
- 2003 RATTRAPAGE
- 2004 RATTRAPAGE
- 2005 RATTRAPAGE
- 2006 RATTRAPAGE1
- 2006 RATTRAPAGE2

2BAC S.M

بقلم :

الأستاذ : البشير الحجاجي

نسألكم الدعاء

دُعَاءُ

أَبِي وَ أُمِّي

أَسْأَلُ اللهَ الرَّحْمَنَ الرَّحِيمَ الَّذِي لَا تُخَالِطُهُ الظُّنُونُ وَلَا تُعْجِزُهُ الْأُمُورُ أَنْ يَرْحَمَهُمْ رَحْمَةً تُوَسِّعُ عَلَيْهِمْ قُبُورَهُمْ وَ تُسَهِّلُ حِسَابَهُمْ، وَ يَرْحَمُنَا إِذَا صِرْنَا إِلَى مَا صَارُوا إِلَيْهِ

دُعَاءُ

سُبْحَانَ اللهِ وَ بِحَمْدِهِ عَدَدَ خَلْقِهِ، وَرِضَا نَفْسِهِ، وَ زِنَةَ عَرْشِهِ، وَ مِدَادَ كَلِمَاتِهِ

El hajjaji El bachir:

gmail: hajjajibachir123@gmail.com

002126.73.36.82.92

اللَّهُمَّ أَطْعِمْ أُمِّي وَ أَبِي مِنَ الجَنَّةِ، وَأَرِهِمْ مَكَانَهُمْ مِنَ الجَنَّةِ، وَقُلْ لَهُمْ ادْخُلُوا مِنْ أَيِّ بَابٍ تَشَاؤُونَ

Exercice1: 2003 Ordinaire | 9,00 points

I/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{4\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (L'unité 2 cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis déterminer les branches infinies de (C_f)

2. a. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ ; f'(x)=4.\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

   b. Dresser le tableau de variations de f

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

4. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

5. Représenter la courbe (C_f)

II/ 1. Montrer que : $\forall t\in[0;+\infty[\; ; 1-t\leqslant\dfrac{1}{1+t}\leqslant 1$

2. En déduire que : $\forall a\in[0;+\infty[\; ; a-\dfrac{a^2}{2}\leqslant\ln(1+a)\leqslant a$

III/ Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que : $n\geqslant 4$

Soit f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{n\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$

Et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Étudier les variations de f_n .

2. Étudier la concavité de la courbe (C_n) et montrer qu'elle admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{5}{6}}$

3. a. Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ suivant les valeurs de x.

   b. En deduire la position relative de (C_n) et (C_{n+1})

4. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes u_n et v_n telles que : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

5. En utilisant le résultat de la question III-3, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est strictement décroissante

6. a- En utilisant la question II-2, montrer que :

$$\forall n\geq 4 ; \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n-1$$

b- En déduire que : $\forall n\geq 4 ; \frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n-1 \leq \frac{u_n^2}{n(3-u_n)}$

c- Montrer que : $\forall n\geq 4 ; \frac{1}{2n} \leq u_n-1 \leq \frac{e}{n}$

d- En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

7. a- Montrer que : $\forall n\geq 4 ; e^{\frac{5}{6}} < v_n$

b- En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

REPONSE

I/

1. Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} = -\infty \quad \text{Car } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\boxed{\frac{-\infty}{0^+} = -\infty}$$

Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 4\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{Car } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Les branches infinies

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Donc, la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C_f)

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

Donc, la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2. a- Montrons que : $\forall x\in \mathbb{R}_*^+ ; f'(x) = 4\cdot\frac{1-2\ln x}{x^3}$

On a : $x \mapsto 4\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et : $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ x^2 \neq 0$

Donc : $x \mapsto \dfrac{4\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et puisque $x \mapsto -\dfrac{1}{2}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Alors : $f : x \mapsto \dfrac{4\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{2}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{4\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}\right)'$$

$$= 4\cdot\frac{(\ln x)'\cdot x^2 - (x^2)'\cdot \ln x}{x^4}$$

$$= 4\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= 4\cdot\frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= 4\cdot\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$$

$\boxed{(k u)' = k\cdot u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}}$

$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$

$\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ ; \ f'(x) = 4\cdot\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

b- Le tableau de variations de f.

☞ Étudions d'abord le signe de $f'(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$

On a $x^3 > 0$ et $4 > 0$

Donc, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-2\ln x$

$$1-2\ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2}$$
$$\iff x = \sqrt{e}$$

$$1-2\ln x > 0 \iff \ln x < \frac{1}{2}$$
$$\iff x < \sqrt{e}$$

Donc :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4-e}{2e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{4\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2}{e} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{4-e}{2e}$$

3. Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes α et β telles que : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

Sur l'intervalle $]0;\sqrt{e}]$

On a f est continue strictement croissante sur l'intervalle $]0;\sqrt{e}]$

Et : $f(]0;\sqrt{e}])=\left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x);f(\sqrt{e})\right]=\left]-\infty;\frac{4-e}{2e}\right]$

Et puisque : $0\in\left]-\infty;\frac{4-e}{2e}\right]$

Alors : $\exists!\,\alpha\in]0;\sqrt{e}];f(\alpha)=0$

Vérifions que : $1<\alpha<\sqrt{e}$

On a $]1;\sqrt{e}[\subset]0;\sqrt{e}]$

Et : $\begin{cases} f(1)=-\frac{1}{2}<0 \\ f(\sqrt{e})=\frac{4-e}{2e}>0 \end{cases}$

Donc $f(1)<0<f(\sqrt{e})$

D'où, d'après **T.V.I**, on aura bien : $1<\alpha<\sqrt{e}$

Sur l'intervalle $[\sqrt{e};+\infty[$

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{e};+\infty[$

Et $f([\sqrt{e};+\infty[)=\left[f(\sqrt{e});\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=\left[\frac{4-e}{2e};-\frac{1}{2}\right[$

Et puisque : $0\in\left[\frac{4-e}{2e};-\frac{1}{2}\right[$

Alors : $\exists!\,\beta\in[\sqrt{e};+\infty[;f(\beta)=0$

Vérifions que $\beta\in]\sqrt{e};3[$

On a $]\sqrt{e};3[\subset[\sqrt{e};+\infty[$

Et : $\begin{cases} f(3)=\frac{4\ln 3}{9}-\frac{1}{2}<0 \\ f(\sqrt{e})=\frac{4-e}{2e}>0 \end{cases}$

Donc $f(\sqrt{e})<0<f(3)$

D'où, d'après **T.V.I**, on aura bien : $\sqrt{e}<\beta<3$

D'où l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes α et β telles que : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

4 - Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

$$(T):\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=4(x-1)-\frac{1}{2}$$
$$=4x-\frac{9}{2}$$

D'où : $(T):\ y=4x-\frac{9}{2}$

5 - Représentation de la courbe (C_f)

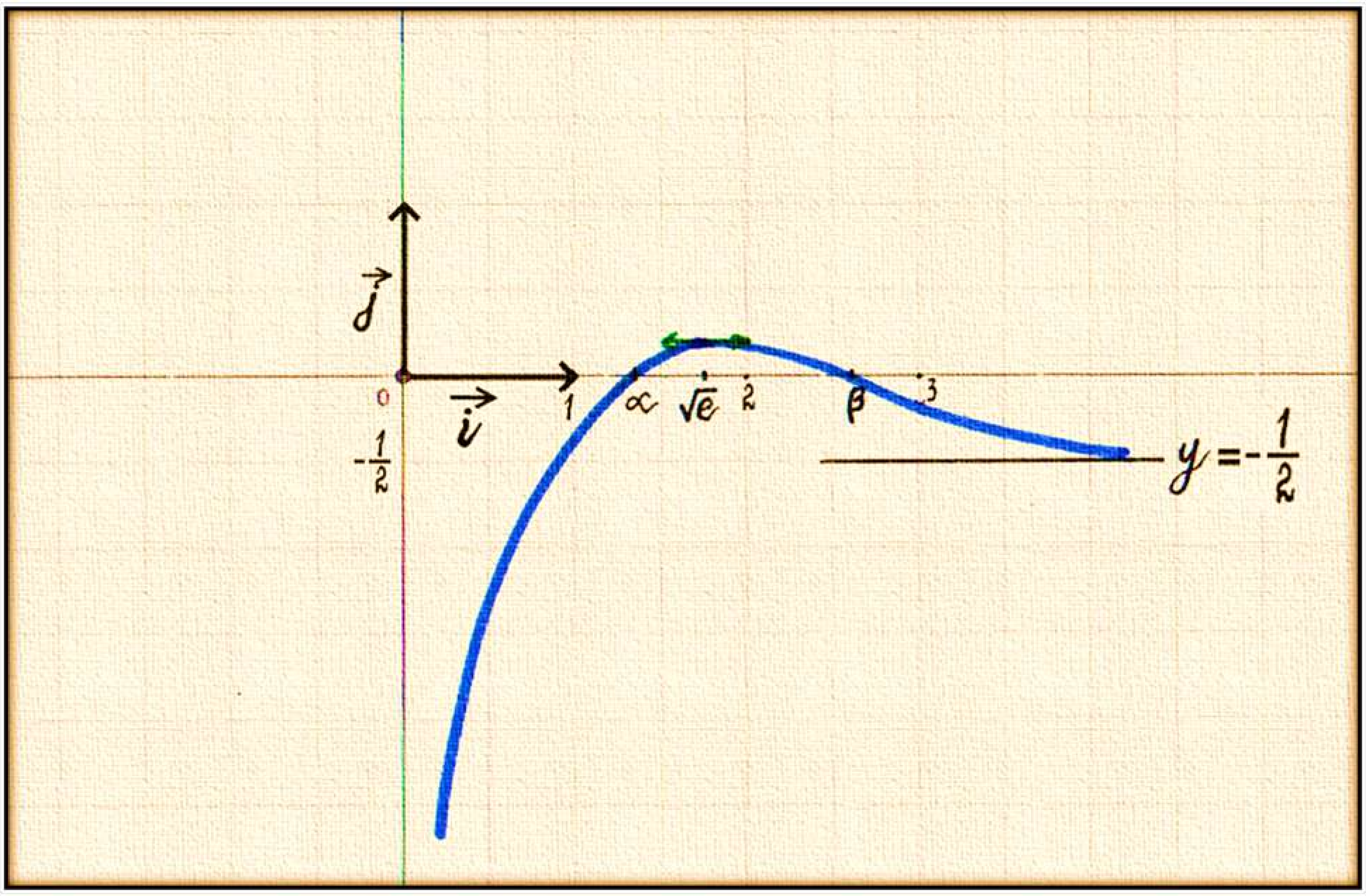
Remarques

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{2} \\ f \text{ décroissante au voisinage de } +\infty \end{cases}$

- $f'(\sqrt{e})=0$

$\to$ (C_f) admet une tangente horizontale au point $A\left(\sqrt{e}\,;\frac{4-e}{2e}\right)$



II/ 1 – Montrons que : $\forall t\in[0;+\infty[\ ;\ 1-t\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1$

Soit $t\in[0;+\infty[$ (Par equivalence)

$$1-t\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1 \iff (1-t)(1+t)\leqslant 1\leqslant 1+t \quad (1+t>0)$$
$$\iff 1-t^2\leqslant 1\leqslant 1+t$$

(Ce qui est toujours vrai pour tout $t>0$)

D'où : $\forall t\in[0;+\infty[\ ;\ 1-t\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1$

2 – Déduisons que : $\forall a\in[0;+\infty[\ ;\ a-\frac{a^2}{2}\leqslant \ln(1+a)\leqslant a$

Juste par passage à l'integrale, mais attention aux bornes

Soit $a\in[0;+\infty[$

On a les fonctions : $t\mapsto 1-t\ ;\ t\mapsto\frac{1}{1+t}$ et $t\mapsto 1$ sont continues sur $[0;a]$

Donc elles sont integrables sur $[0;a]$

Et puisque $\forall t\in[0;+\infty[\ ;\ 1-t\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1$

Alors : $\int_0^a (1-t)\,dt\leqslant\int_0^a\frac{1}{1+t}\,dt\leqslant\int_0^a 1\,dt$

$$\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^a\leqslant\left[\ln(1+t)\right]_0^a\leqslant\left[t\right]_0^a$$

$$a-\frac{a^2}{2}\leqslant\ln(1+a)\leqslant a$$

D'où : $\forall a\in[0;+\infty[\ ;\ a-\frac{a^2}{2}\leqslant\ln(1+a)\leqslant a$

III/ Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que : $n\geqslant 4$

$$f_n(x)=\frac{n\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

1 – Les variations de f_n

- Les limites aux bornes de D_{f_n}
- Calcul de f_n'
- Le tableau de variations de f_n

Les limites

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2} = -\infty$

Car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\boxed{\frac{-\infty}{0^+} = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

Calculons $f_n'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

~ On montre facilement que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

On a $f_n'(x) = \left(\frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}\right)'$

$= n.\frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ ; f_n'(x) = n.\frac{1-2\ln x}{x^3}$

Le signe de $f_n'(x)$ est le signe de $f'(x)$

Le tableau de variations de f_n

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n-e}{2e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

$\boxed{2}$ ~ La concavité de la courbe (C_n).

Calculons $f_n''(x)$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

On a : $x \longmapsto 1 - 2\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et : $x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et puisque : $\forall x \in]0;+\infty[; x^3 \neq 0$

Alors la fonction f_n' est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$f_n''(x) = n.\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)'$$

$$= n.\frac{(1-2\ln x)'.x^3-(x^3)'(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$= n.\frac{\frac{-2}{x}.x^3-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$= n.\frac{-2x^2-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$= n.\frac{x^2\,(6\ln(x)-5)}{x^6}$$

$$= \frac{n}{x^4}(6\ln(x)-5)$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ ;\ f_n''(x) = \frac{n}{x^4}(6\ln(x)-5)$

On a $\frac{n}{x^4} > 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

Donc le signe de $f_n''(x)$ est le signe de $6\ln(x)-5$

$6\ln(x)-5=0 \Longleftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$

x	0		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$6\ln(x)-5$	‖	$-$	0	$+$	

D'où

x	0		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$f_n''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
La concavité de (C_f)	‖		$I(e^{\frac{5}{6}};f(e^{\frac{5}{6}}))$ point d'inflexion		

Puisque f_n'' s'annule en $e^{\frac{5}{6}}$ et change son signe

Alors le point $I(e^{\frac{5}{6}};f_n(e^{\frac{5}{6}}))$ est le point d'inflexion de (C_f)

3 - a - Comparons $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{(n+1)\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}-\frac{n\ln x}{x^2}+\frac{1}{2}=\frac{\ln x}{x^2}$$

Puisque $x^2>0$

Alors le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ est le signe de $\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

D'où

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b - La position relative de (C_{n+1}) et (C_n)

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
La position relative de (C_{n+1}) et (C_n)	‖	(C_{n+1}) est au dessous de (C_n)	$A(1;-\frac{1}{2})$ point d'intersection	(C_{n+1}) est au dessus de (C_n)	

4 - Montrons que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes u_n et v_n telles que : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

La même méthode que la question I - 3.

5 - Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in [\![4;+\infty[\![$

On a $u_n>1$

Et d'après le résultat de la question III - 3 - a, on a :

$\forall x>1 ;\ f_{n+1}(x)>f_n(x)$

Donc $f_{n+1}(u_n)>f_n(u_n)$

Donc $f_{n+1}(u_n)>0$ (car $f_n(u_n)=f_{n+1}(u_{n+1})=0$)

Donc $f_{n+1}(u_n)>f_{n+1}(u_{n+1})$

Et puisque f_{n+1} est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1;\sqrt{e}]$

Alors f_{n+1} admet une fonction réciproque f_{n+1}^{-1} strictement croissante sur $f_{n+1}([1;\sqrt{e}])$

Donc, on aura :

$$f_{n+1}(u_n)>f_{n+1}(u_{n+1}) \Rightarrow f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(u_n)\right)>f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(u_{n+1})\right)$$

$$\Rightarrow u_n>u_{n+1}$$

D'où $(u_n)_{n\geq 4}$ est strictement décroissante.

$\boxed{6}$ - a - Montrons que : $\forall n\geq 4\ ;\ \dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leq \ln(u_n)\leq u_n-1$

D'après le résultat de la question II - 2, on a :

$$\forall a\in[0;+\infty[\ ;\ a-\frac{a^2}{2}\leq \ln(1+a)\leq a$$

Et puisque $\forall n\geq 4\ ;\ u_n-1>0$

On prend : $a=u_n-1$

On aura : $u_n-1-\dfrac{(u_n-1)^2}{2}\leq \ln(u_n)\leq u_n-1$

Donc : $\dfrac{2(u_n-1)-(u_n-1)^2}{2}\leq \ln(u_n)\leq u_n-1$

Donc : $\dfrac{(u_n-1)\left(2-(u_n-1)\right)}{2}\leq \ln(u_n)\leq u_n-1$

D'où : $\forall n\geq 4\ ;\ \dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leq \ln(u_n)\leq u_n-1$

b - Déduisons que : $\forall n\geq 4\ ;\ \dfrac{(u_n)^2}{2n}\leq u_n-1\leq \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)}$

Soit $n\geq 4$

On a $f_n(u_n)=0 \Leftrightarrow n\dfrac{\ln u_n}{u_n^2}-\dfrac{1}{2}=0$

$$\Leftrightarrow \ln u_n=\frac{u_n^2}{2n}$$

D'après le résultat de la question précédente

on a : $\dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leqslant \ln(u_n) \leqslant u_n - 1$

Donc : $\dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leqslant \dfrac{u_n^2}{2n}$ et $\dfrac{u_n^2}{2n} \leqslant u_n - 1$

Donc : $u_n - 1 \leqslant \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)}$ et $\dfrac{u_n^2}{2n} \leqslant u_n - 1$ $\boxed{3-u_n>0}$

D'où : $\forall n \geqslant 4 ;\ \dfrac{(u_n)^2}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)}$

c- Montrons que : $\forall n \geqslant 4 ;\ \dfrac{1}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{e}{n}$

Soit $n \geqslant 4$

D'une part, on a : $u_n \geqslant 1$

Donc : $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n^2 \geqslant 1$

$$\Rightarrow \frac{(u_n)^2}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leqslant \frac{(u_n)^2}{2n}$$

D'autre part : $u_n \leqslant \sqrt{e} \Rightarrow u_n^2 \leqslant e$

Et : $u_n \leqslant \sqrt{e} \Rightarrow -u_n \geqslant -\sqrt{e}$

$$\Rightarrow 3 - u_n \geqslant 3 - \sqrt{e} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3-u_n)} \leqslant 1 \text{ et } u_n^2 \leqslant e$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n)^2}{(3-u_n)} \leqslant e$$

$$\Rightarrow \frac{u_n^2}{n(3-u_n)} \leqslant \frac{e}{n}$$

Donc, on aura : $\dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{(u_n)^2}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)} \leqslant \dfrac{e}{n}$

D'où : $\forall n \geqslant 4 ;\ \dfrac{1}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{e}{n}$

d- Déduisons que (u_n) est convergente et calculons $\lim u_n$

Puisque (u_n) est une suite décroissante et minorée par 1, alors (u_n) est convergente

Calculons $\lim u_n$

On a : $\forall n\geqslant 4 ;\ \frac{1}{2n}\leqslant u_n-1\leqslant \frac{e}{n}$

Puisque : $\lim \frac{1}{2n}=\lim \frac{e}{n}=0$

Alors, d'après les critères de convergence : $\lim (u_n-1)=0$

D'où : $\lim u_n=1$

7 - a - Montrons que : $\forall n\geqslant 4 ;\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$

Soit $n\in [\![4;+\infty[\![$

D'une part, on a $e^{\frac{5}{6}}\in[\sqrt{e};+\infty[$ car $e^{\frac{5}{6}}>e^{\frac{1}{2}}$

On a f_n est strictement décroisante sur $[e^{\frac{5}{6}};+\infty[$

On a : $e^{\frac{5}{6}}<v_n \Leftrightarrow f_n(e^{\frac{5}{6}})>f_n(v_n)$

$\Leftrightarrow f_n(e^{\frac{5}{6}})>0$ car $f_n(v_n)=0$

Il suffit donc de vérifier que : $f_n(e^{\frac{5}{6}})>0$

On a : $f_n(e^{\frac{5}{6}})=\dfrac{\frac{5}{6}n}{(e^{\frac{5}{6}})^2}-\frac{1}{2}$

$=\dfrac{\frac{5}{6}n}{e^{\frac{5}{3}}}-\frac{1}{2}$

$=\dfrac{\frac{5}{3}n-e^{\frac{5}{3}}}{2e^{\frac{5}{3}}}$

On a : $n\geqslant 4 \Rightarrow \frac{5}{3}n-e^{\frac{5}{3}}\geqslant \frac{20}{3}-e^{\frac{5}{3}}>0$

Donc : $f_n(e^{\frac{5}{6}})>0$

Et par suite : $\forall n\geqslant 4 ;\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$

b - Déduisons que $\lim v_n=+\infty$

Soit $n\geqslant 4$

On sait que : $f_n(v_n)=0$

Donc : $\dfrac{n\ln v_n}{v_n^2}-\frac{1}{2}=0$

Donc : $\dfrac{n\ln v_n}{v_n^2}=\frac{1}{2}$

Donc : $\dfrac{n\ln v_n}{v_n^2} = \dfrac{1}{2}$

Donc : $v_n^2 = 2n\ln v_n$

Donc : $v_n = \sqrt{2n\ln v_n}$ $\quad\quad \boxed{v_n > 1 \Rightarrow 2n\ln v_n > 0}$

Or : $v_n > e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow \ln v_n > \dfrac{5}{6}$

$\Leftrightarrow 2n\ln v_n > \dfrac{5}{3}n$

$\Leftrightarrow \sqrt{2n\ln v_n} > \sqrt{\dfrac{5}{3}n}$

$\Leftrightarrow v_n > \sqrt{\dfrac{5}{3}n}$

Et puisque $\lim \sqrt{\dfrac{5}{3}n} = +\infty$

Alors $\lim v_n = +\infty$

I/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = x + e^{-nx}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Étudier les variations de g_n.

b) Montrer que g_n admet un minimum au point d'abscisse u_n que l'on calculera en fonction de n.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$

b) Déterminer les branches infinies de (C_n).

3) a) Étudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2) des fonctions g_1 et g_2.

b) Construire dans le même repère (C_1) et (C_2) (On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\ln 2 \simeq 0,7$)

4) a) En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de x l'intégrale : $I_x = \int_0^x t\, e^{-2t}\, dt$

b) Soit h_2 la restriction de g_2 sur $[0;\ln 2]$

Calculer le volume du solide engendré par la révolution de la courbe de h_2 autour de l'axe des abscisses.

5) On pose : $v_n = g_n(u_n)$

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont convergentes et déterminer leurs limites.

II/ Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^{nx}$.

Et (Γ_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) Étudier les variations de la fonction f_n.

2) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n

3 - a - Montrer que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2 ; -\frac{1}{2}\right[$

b - Montrer que : $(x-\alpha_1)$ et $(e^x+\alpha_1)$ ont le même signe.

4 - a - Soit φ la fonction définie sur $I=\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x)=e^x-\frac{1}{\sqrt{e}}x$$

Montrer que la fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle I

b - En déduire que : $(\forall x \in I) ; \left|e^x+\alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x-\alpha_1\right|$

5 - On pose : $\begin{cases} \beta_0=-\frac{1}{2} \\ \beta_{n+1}=-e^{\beta_n} ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a - Montrer qu'il existe un nombre reél a tel que :

$$\left|\beta_{n+1}-\alpha_1\right| \leqslant a\left|\beta_n-\alpha_1\right|$$

b - Montrer que la suite (β_n) est convergente et déterminer sa limite.

REPONSE

I/ 1 - a - Les variations de la fonction g_n.

Calculons $g_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a $x \longmapsto -nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc $x \longmapsto e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et puisque $x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \left(x+e^{-nx}\right)' \\ &= 1+(-nx)' e^{-nx} \\ &= 1-n e^{-nx}. \end{aligned}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} ; g_n'(x)=1-n e^{-nx}$

Étudions le signe de $g_n'(x)$

$$\begin{aligned} g_n'(x)=0 &\Leftrightarrow 1-n e^{-nx}=0 \\ &\Leftrightarrow e^{-nx}=\frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow -nx=\ln\frac{1}{n}=-\ln(n) \\ &\Leftrightarrow x=\frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

$g_n'(x) > 0 \iff 1 - n e^{-nx} > 0$

$\iff e^{-nx} < \dfrac{1}{n}$

$\iff -nx < \ln \dfrac{1}{n}$

$\iff x > \dfrac{\ln n}{n}$

Le tableau de variations de g_n

x	$-\infty$		$\frac{\ln n}{n}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln n}{n}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \frac{\ln n}{n} + e^{-n\frac{\ln n}{n}}$$
$$= \frac{\ln n}{n} + e^{-\ln n}$$
$$= \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{e^{\ln n}}$$
$$= \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1+\ln n}{n}$$

b- Montrons que g_n admet un minimum au point d'abscisse u_n

D'après le tableau de variations de g_n, on a $\dfrac{1+\ln n}{n}$ est la valeur minimale de g_n au point d'abscisse $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$

2 - a - Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} g_n(x) = \lim_{x \to -\infty} x + e^{-nx}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} nx \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{nx \cdot e^{nx}}\right)$$

On pose $t = nx$

Si $x \to -\infty$

Alors $t \to -\infty$ (car $n > 0$)

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} t\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{te^t}\right)$

$= +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x + e^{-nx}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{(e^x)^n}$$
$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b- Les branches infinies de (C_n).

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x) = +\infty$

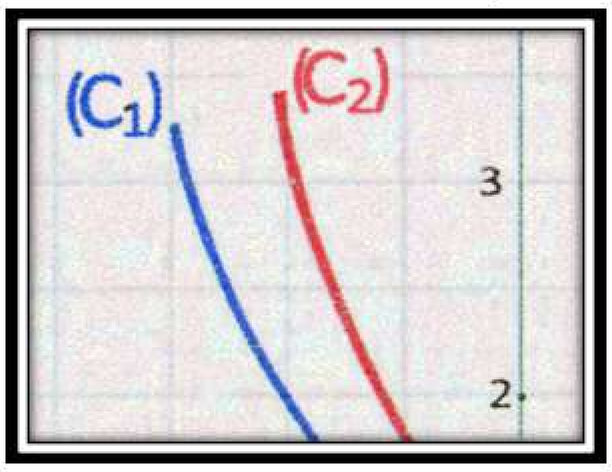
Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g_n(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + e^{-nx}}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} + \frac{n}{nx.e^{nx}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{n}{nx.e^{nx}}$$
$$= -\infty$$

(Car $\lim\limits_{x \to -\infty} nxe^{nx} = 0$ avec $nxe^{nx} < 0$)

(On peut effectuer le changement de variable : $t = nx$)

Donc (C_n) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$



On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

Remarque

Si $f(x) = ax + b + h(x)$, avec $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = c$

Alors la droite (D) d'équation $y = ax + b + c$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞.

Dans notre cas : $h(x) = e^{-nx}$ et $(D) : y = x$ avec $c = 0$

Pour prouver qu'une droite $(D) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞, il suffit de vérifier que :

$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Ainsi, des fois, on peut même savoir la position relative de (C_f) et (D)

En effet, si par exemple, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0^+$

Alors (C_f) est au dessus de (D) (mais juste au voisinage de ∞.)

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

Montrons que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_n) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (g_n(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-nx}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(e^x)^n}$$
$$= 0$$

D'où, la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_n) au voisinage de $+\infty$

$\boxed{3}$ a. La position relative de (C_1) et (C_2)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g_1(x) - g_2(x) = (x + e^{-x}) - (x + e^{-2x})$$
$$= e^{-x} - e^{-2x}$$
$$= e^{-2x}(e^x - 1)$$

Puisque $e^{-2x} > 0$

Alors le signe de $g_1(x) - g_2(x)$ est le signe de $(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
(e^x-1)	$-$	0	$+$

D'où

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x)-g_2(x)$	$-$	0	$+$
La position relative de (C_1) et (C_2)	(C_1) est au dessous de (C_2)	$A(0;1)$ point d'intersection	(C_1) est au dessus de (C_2)

b. Représentation de (C_1) et (C_2)

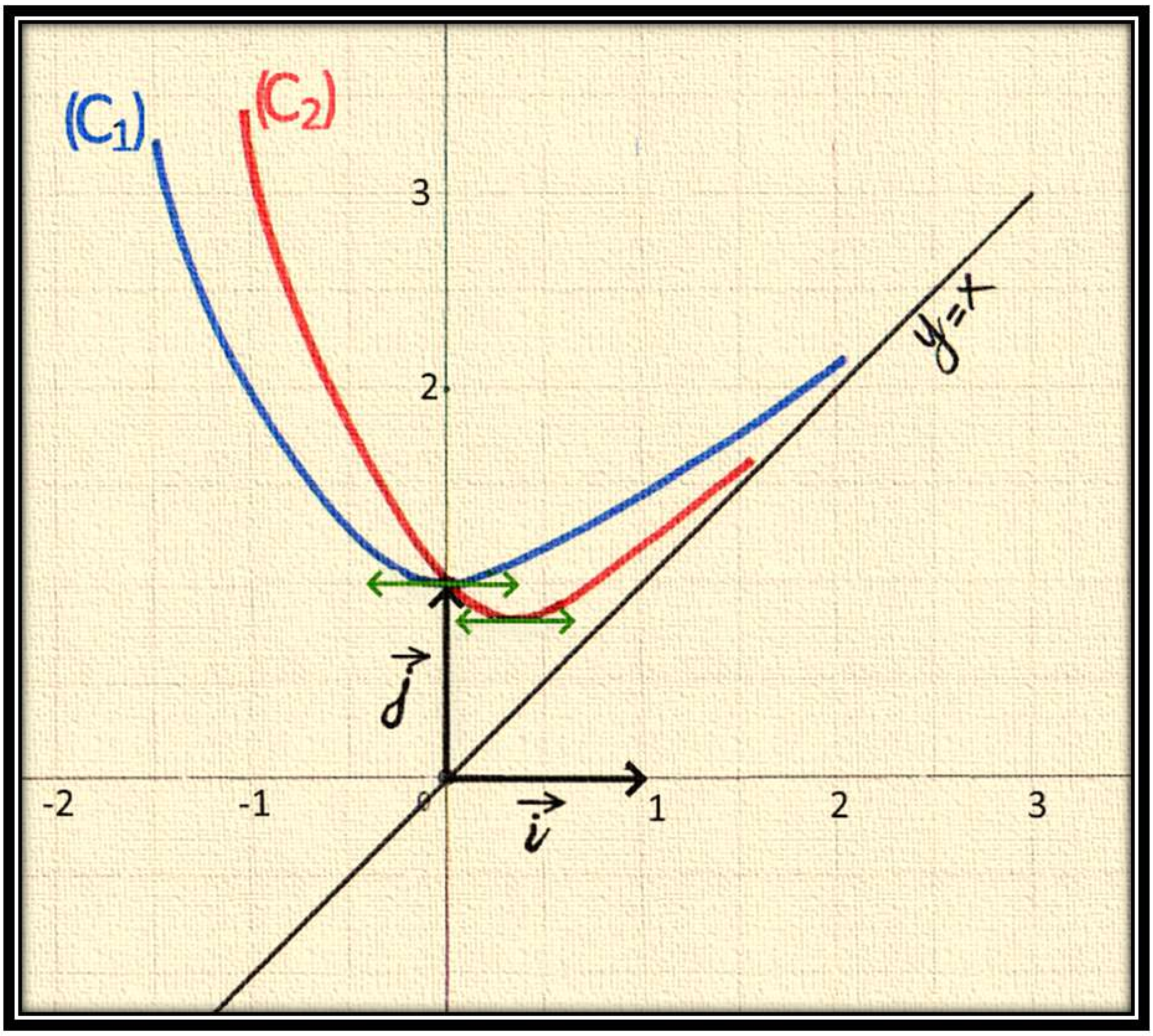
Les tableaux de variations de g_1 et g_2

Pour g_1 (On remplace n par 1)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour g_2 (On remplace n par 2)

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln 2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



4 - a - Calculons, par parties, l'intégrale : $I_x=\int_0^x t\,e^{-2t}\,dt$

$$\begin{cases} u'(t)=e^{-2t} \\ v(t)=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ v'(t)=1 \end{cases}$$

$$I_x=\left[-\frac{1}{2}t\,e^{-2t}\right]_0^x-\int_0^x-\frac{1}{2}e^{-2t}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}-\frac{1}{4}\left[e^{-2t}\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}-\frac{1}{4}\left(e^{-2x}-1\right)$$

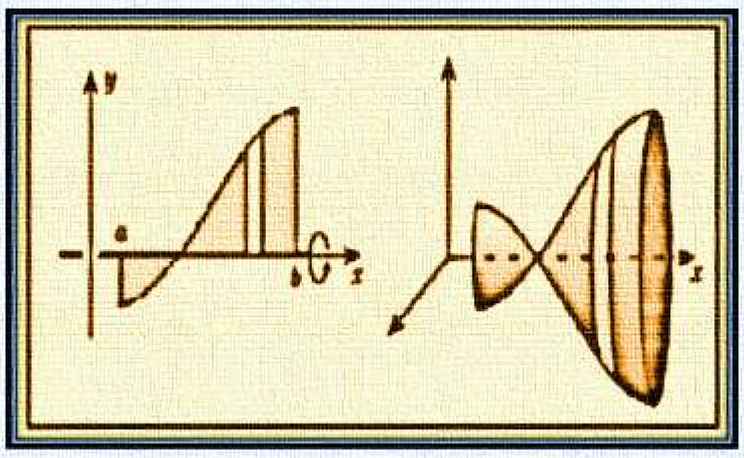
$$=\frac{1-(2x+1)\,e^{-2x}}{4}$$

b - Soit h_2 la restriction de g_2 sur $[0;\ln 2]$

Calculons le volume du solide engendré par la rotation de (C_{h_2}) autour de l'axe (Ox) un tour complet sur l'intervalle $[0;\ln 2]$

Calcul d'un volume

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f), autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est : $\mathcal{V}=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx\ (u.v)$



$$\mathcal{V}=\pi\int_0^{\ln 2}\left(g_2(t)\right)^2 dt\ (u.v) \qquad \left(u.v=\|\vec{i}\|^3=8\,cm^3\right)$$

$$=\pi\int_0^{\ln 2}\left(t^2+2t\,e^{-2t}+e^{-4t}\right)dt\ (u.v)$$

$$=8\pi\left(\int_0^{\ln 2}\left(t^2+e^{-4t}\right)dt+2\int_0^{\ln 2}t\,e^{-2t}\,dt\right)$$

$$=8\pi\left(\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{\ln 2}+2\,I_{\ln 2}\right)$$

$$=8\pi\left(\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{\ln 2}+2I_{\ln 2}\right)$$

$$=8\pi\left(\frac{1}{3}(\ln 2)^3-\frac{1}{4}e^{-4\ln 2}-0+\frac{1}{4}+2\,\frac{1-(2\ln 2+1)e^{-2\ln 2}}{4}\right)$$

$$=8\pi\left(\frac{1}{3}(\ln 2)^3-\frac{1}{4}e^{\ln 2^{-4}}+\frac{1}{4}+2\,\frac{1-(2\ln 2+1)e^{\ln 2^{-2}}}{4}\right)cm^3$$

$$=8\pi\left(\frac{1}{3}(\ln 2)^3-\frac{1}{4}\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2\ln 2+1}{2}e^{\ln 2^{-2}}\right)cm^3$$

$$=8\pi\left(\frac{1}{3}(\ln 2)^3-\frac{1}{64}+\frac{3}{4}-\frac{2\ln 2+1}{8}\right)cm^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}(2\ln 2)^3-\frac{1}{8}+6-2\ln 2-1\right)\pi\ cm^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}(2\ln 2)^3-\frac{39}{8}-2\ln 2\right)\pi\ cm^3$$

D'où : $\mathcal{V}=\left(\frac{1}{3}(2\ln 2)^3-\frac{39}{8}-2\ln 2\right)\pi\ cm^3$

$\boxed{5}$ ~ On pose : $v_n = g_n(u_n)$

Montrons que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes

On a : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n=\frac{\ln n}{n}$ et $v_n = g_n(u_n)=\frac{1+\ln n}{n}$

On a $\lim u_n = \lim \frac{\ln n}{n}=0$

Et $\lim v_n = \lim \frac{1+\ln n}{n} = \lim \frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}=0$

D'où les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers 0

II/ $f_n(x)=x+e^{nx}$

$\boxed{1}$ ~ Étudions les variations de f_n

Calculons les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+e^{nx}=\lim\limits_{x\to-\infty} x+(e^x)^n=-\infty$ Car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+e^{nx}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+(e^x)^n=+\infty$ Car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Calculons $f_n'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On a $x\longmapsto x$ et $x\longmapsto e^{nx}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \left(x + e^{nx}\right)'$$
$$= 1 + (nx)' e^{nx}$$
$$= 1 + n e^{nx}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f_n'(x) = 1 + n e^{nx}$

Puisque : $1 > 0$ et $n e^{nx} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f_n'(x) > 0$

D'où : f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ - Déduisons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $\mathbb{R}$.

On a f_n est continue sur $\mathbb{R}$

et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Et : $f_n(\mathbb{R}) = f_n(]-\infty; +\infty[)$

$$= \left] \lim_{x \to -\infty} f_n(x) ; \lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right[$$
$$=]-\infty; +\infty[$$

Et puisque $0 \in]-\infty; +\infty[$

Alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ - a - Montrons que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2 ; -\frac{1}{2}\right[$

D'après le résultat de la question précédente : $\exists! \alpha_1 \in \mathbb{R}$, $f_1(\alpha_1) = 0$

On a : $\left]-\ln 2 ; -\frac{1}{2}\right[\subset \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f_1(-\ln 2) = -\ln 2 + \frac{1}{2} < 0 \\ f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}} > 0 \end{cases}$$

Donc $f_1(-\ln 2) \cdot f_1\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$

D'où, d'après **T.V.I**, on aura bien $\alpha_1 \in \left]-\ln 2 ; -\frac{1}{2}\right[$

b - Montrons que $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

On a α_1 est la solution de l'équation $f_1(x) = 0$

Donc : $f_1(\alpha_1) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 + e^{\alpha_1} = 0$

$$\Longleftrightarrow \alpha_1 = -e^{\alpha_1}$$

On a $e^x + \alpha_1 = e^x - e^{\alpha_1}$

$$= e^{\alpha_1}\left(e^{x-\alpha_1} - 1\right)$$

Donc $x - \alpha_1 > 0 \iff e^{x-\alpha_1} > 1$

$$\iff e^{x-\alpha_1} - 1 > 0$$

$$\iff e^x + \alpha_1 > 0$$

D'où $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

4 - a - Soit φ la fonction définie sur $I = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$$

Montrons que φ est strictement décroissante sur l'intervalle I

On a : $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur l'intervalle I

Et : $x \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{e}}x$ est dérivable sur l'intervalle I

Donc φ est dérivable sur l'intervalle I

Soit $x \in I$

$$\varphi'(x) = \left(e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x\right)'$$

$$= e^x - e^{-\frac{1}{2}}$$

On a : $x \leqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow e^x \leqslant e^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow e^x - e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \leqslant 0$$

D'où φ est strictement décroissante sur $I = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$

b - **Déduisons que :** $(\forall x \in I) ; \left|e^x + \alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x - \alpha_1\right|$

On sait que : $\alpha_1 = -e^{\alpha_1}$

Montrons que : $(\forall x \in I) ; \left|e^x - e^{\alpha_1}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x - \alpha_1\right|$

Remarque

Dans ce type de question, il faut penser à **I.A.F** (inégalité des accroissements finis.)

Il faut juste choisir la fonction convenable où on peut l'appliquer.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I
Si : $\exists k>0\,;(\forall x\in I)\,;\ |f'(x)|\leqslant k$
Alors : $\forall (a;b)\in I^2\,;\ |f(a)-f(b)|\leqslant k|a-b|$

Soit θ la fonction définie sur $I=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ par : $\theta : t\longmapsto e^t$

On a θ est dérivable sur l'intervalle I

Et : $\forall t\in I\,;\theta'(t)=e^t$

On a : $t\in I \Rightarrow t\leqslant -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow e^t\leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$

Donc : $\forall t\in I\,;|\theta'(t)|\leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis ;

$\forall (a;b)\in I^2\,;|e^a-e^b|\leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}|a-b|$

Et puisque $\alpha_1\in I$

Alors, pour tout $x\in I$; $|e^x-e^{\alpha_1}|\leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}|x-\alpha_1|$

D'où : $(\forall x\in I)\,;|e^x+\alpha_1|\leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}|x-\alpha_1|$

$\boxed{5}$ ~ On pose : $\beta_0=-\frac{1}{2}$ et $\beta_{n+1}=-e^{\beta_n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a ~ Montrons que : $\exists a\in\mathbb{R}_*^+\,;\forall n\in\mathbb{N}\,;|\beta_{n+1}-\alpha_1|\leqslant a|\beta_n-\alpha_1|$

On a : $|\beta_{n+1}-\alpha_1|=|-e^{\beta_n}-\alpha_1|=|e^{\beta_n}+\alpha_1|$

(Donc, c'est juste une application de la question précédente avec : $x=\beta_n$ et $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$)

Il suffit de vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\beta_n\in I$ ~ Par récurrence ~

Pour $n=0$

On a $\beta_0=-\frac{1}{2}$

Donc $-\frac{1}{\sqrt{e}}\leqslant\beta_0\leqslant -\frac{1}{2}$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $-\frac{1}{\sqrt{e}}\leqslant\beta_n\leqslant -\frac{1}{2}$

Montrons que $-\frac{1}{\sqrt{e}}\leqslant\beta_{n+1}\leqslant -\frac{1}{2}$

On a $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leqslant \beta_n \leqslant -\frac{1}{2}$ ~ D'après la supposition ~

Donc $e^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \leqslant e^{\beta_n} \leqslant e^{-\frac{1}{2}}$

Donc $\frac{1}{2} \leqslant e^{\beta_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$ car $\frac{1}{2} \leqslant e^{-\frac{1}{\sqrt{e}}}$

Donc $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leqslant -e^{\beta_n} \leqslant -\frac{1}{2}$

Donc $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leqslant \beta_{n+1} \leqslant -\frac{1}{2}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); -\frac{1}{\sqrt{e}} \leqslant \beta_n \leqslant -\frac{1}{2}$

Et d'après le résultat de la question 4-b, on a :

$(\forall x \in I); \left|e^{x} + \alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x - \alpha_1\right|$

On prend $x = \beta_n$ Avec $\beta_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On aura : $\left|e^{\beta_n} + \alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|\beta_n - \alpha_1\right|$

Donc : $\left|\beta_{n+1} - \alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|\beta_n - \alpha_1\right|$

D'où : $\exists \alpha = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \mathbb{R}; \left|\beta_{n+1} - \alpha_1\right| \leqslant \alpha\left|\beta_n - \alpha_1\right|$

6- Montrons que la suite (β_n) est convergente

Montrons par recurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \left|\beta_n - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$

Pour $n = 0$

On a : $\left|\beta_0 - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^0 \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $\left|\beta_n - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$

Montrons que : $\left|\beta_{n+1} - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$

On a : $\left|\beta_{n+1} - \alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}\left|\beta_n - \alpha_1\right|$

~ D'après le résultat de la question précédente ~

Et puisque : $\left|\beta_n - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$ ~ D'après la supposition ~

Alors : $\frac{1}{\sqrt{e}}\left|\beta_n-\alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}\left|\frac{1}{2}+\alpha_1\right|$

Donc : $\left|\beta_{n+1}-\alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}\left|\frac{1}{2}+\alpha_1\right|$

Donc, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left|\beta_n-\alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n}\left|\frac{1}{2}+\alpha_1\right|$

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left|\beta_n-\alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n}\left|\frac{1}{2}+\alpha_1\right|$

Et puisque $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n}\left|\frac{1}{2}+\alpha_1\right| = 0$ car $-1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$

Alors, d'après les critères de convergence, la suite (β_n) est convergente et $\lim \beta_n = \alpha_1$

Exercice3: 2004 Ordinaire | 10,00 points

I/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$

1 - Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f.

2 - Étudier les variations de f

3 - Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

a - Étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b - Construire la courbe (C_f)

II/ Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n^2 f(u_n)=u_n e^{-u_n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

1 - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^x\geqslant x+1$

2 - En déduire que : $(\forall x>0)$; $x^2 f(x)\leqslant \frac{x}{x+1}$

3 - a - En utilisant une démonstration par récurrence, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<u_n\leqslant\frac{1}{n+1}$

b - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4 - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$

a - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_n=\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$

b - Déterminer la limite de la suite (v_n)

III/ Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$F(0)=2\ln 2$ et $(\forall x>0)$; $F(x)=\int_{x^2}^{4x^2}f(t)\,dt$.

1 - a - Vérifier que : $(\forall x>0)$; $\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}\,dt=2\ln 2$

b - En utilisant le résultat de la question II - 1, montrer que : $(\forall t>0)$; $-t\leqslant e^{-t}-1<0$

2 - a - Montrer que : $(\forall x>0)$; $-3x^2\leqslant F(x)-2\ln 2\leqslant 0$

b - En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0.

3 - a - Montrer que : $(\forall t\geqslant 1)$; $f(t)\leqslant e^{-t}$

b - En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

4 - a - Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$

b - Dresser le tableau de variations de F.

c- Représenter la courbe (C_F) de F dans un repère orthonormé.

5 - Soit G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$G(x)=\int_{x}^{4x} e^{-t}\ln t \, dt.$$

a- Montrer que : $(\forall x>0)$; $G(x)=F(\sqrt{x})-e^{-4x}\ln(4x)+e^{-x}\ln x$

b- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{-x}-e^{-4x})\ln x$

c- En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$

REPONSE

1 - Calculons les limites de f aux bornes de D_f

On a $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{xe^{x}}=-\infty$

  Car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0^-$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^{x}}=0$ Car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{-x}}{x}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-x}}{x}=+\infty$

2 - Les variations de f

On a $x\longmapsto -x$ est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

Donc $x\longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

Et puisque $x\longmapsto x$ est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

Et $\forall x\in D_f$; $x\neq0$

Alors f est dérivable sur D_f

Soit $x\in D_f$.

$$f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)'$$

$$=\frac{(e^{-x})'.x-x'e^{-x}}{x^2}$$

$$=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}$$

$= \frac{-x-1}{x^2} e^{-x}$

Donc $\forall x \in D_f ; f'(x) = \frac{-x-1}{x^2} e^{-x}$

Puisque $x^2>0$ et $e^{-x}>0$, pour tout $x \in D_f$

Alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-x-1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	

D'où

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

$\boxed{3}$ -a- Étudions les branches infinies de (C_f)

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2 e^{x}} = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{x} = 0^+$

Donc (C_f) admet une branche parabolique

de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

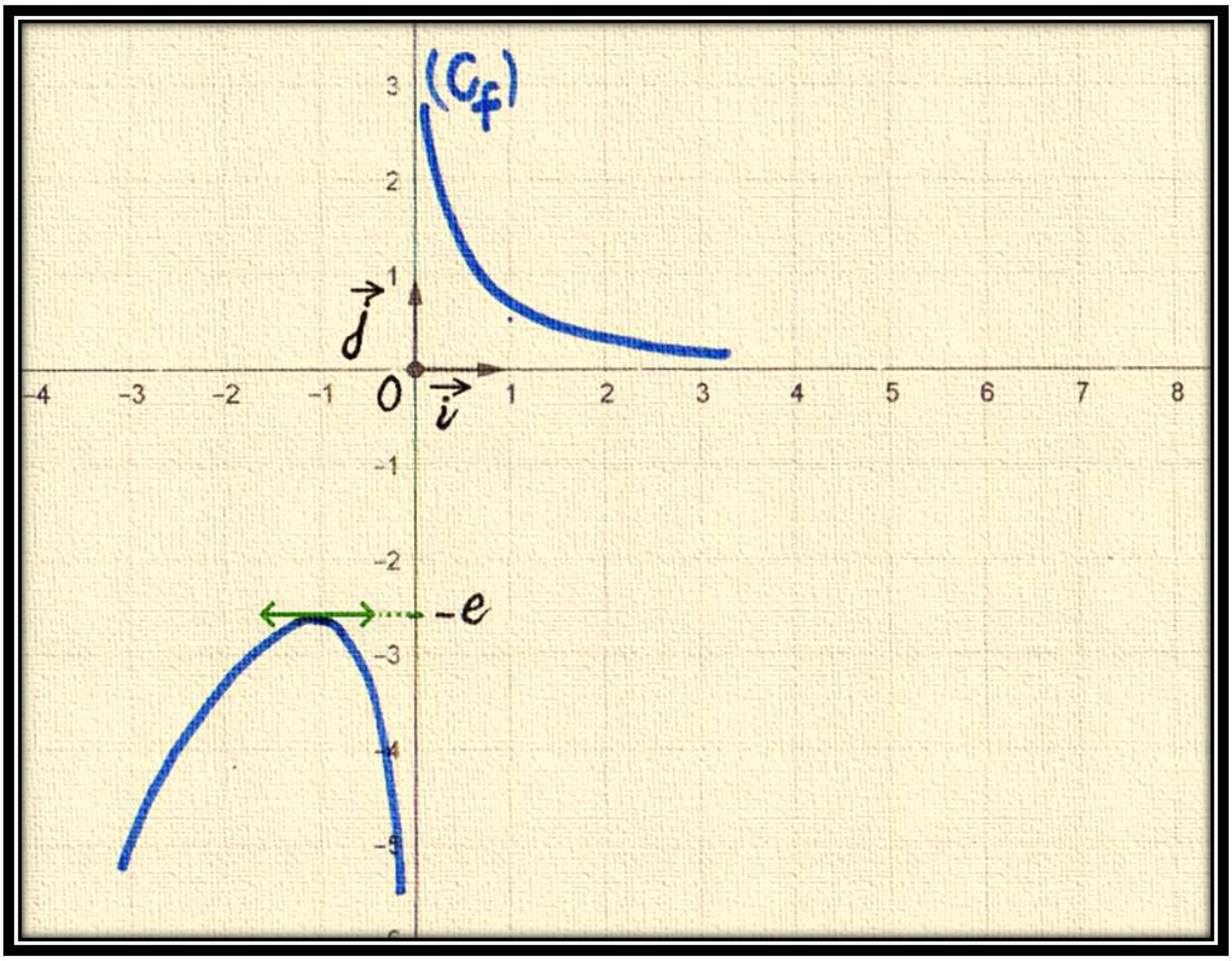
Donc (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Donc, la droite d'équation $y=0$ est une

asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

b- Représentation de la courbe (C_f)



II/ Soit (u_n) la suite telle que :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1 ~ Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ e^x \geq x+1$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x - 1$

On a h est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $h'(x) = (e^x - x - 1)'$

$= e^x - 1$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ h'(x) = e^x - 1$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(e^x - 1)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tableau de variations, on a 0 est la valeur minimale de h sur $\mathbb{R}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) \geqslant 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x \geqslant x+1$

2 - Déduisons que : $(\forall x>0)$; $x^2 f(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1}$

Soit $x>0$

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$e^x \geqslant x+1$

$$\begin{aligned} e^x \geqslant x+1 &\Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} \geqslant e^{-x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{x}{x+1} \geqslant x e^{-x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{x}{x+1} \geqslant x^2 f(x) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x>0)$; $x^2 f(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1}$

3 - a - Montrons par recurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0 = 1$

Donc $0 < u_0 \leqslant \dfrac{1}{0+1}$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Montrons que : $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$

On a : $u_n>0$ (D'après la supposition)

Donc : $u_n>0$ et $e^{-u_n}>0$

Donc : $u_{n+1}>0$

D'après le résultat de la question II-2

On aura : $u_{n+1}\leqslant\frac{u_n}{u_{n+1}}$

On a : $\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{1}{n+2}=\frac{nu_n+2u_n-u_n-1}{(n+2)(u_n+1)}$

$$=\frac{(n+1)u_n-1}{(n+2)(u_n+1)}$$

Et puisque : $u_n\leqslant\frac{1}{n+1}$ (D'après la supposition)

Alors : $(n+1)u_n-1\leqslant0$

Donc : $\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{1}{n+2}\leqslant0$

Donc : $u_{n+1}\leqslant\frac{u_n}{u_{n+1}}\leqslant\frac{1}{n+2}$

Et par suite : $u_{n+1}\leqslant\frac{1}{n+2}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<u_n\leqslant\frac{1}{n+1}$

b- Montrons que la suite (u_n) est convergente

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<u_n\leqslant\frac{1}{n+1}$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}0=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$

Alors, d'après les critères de convergences on aura $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

D'où (u_n) est converge vers 0

4- On pose : $v_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

a- Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_n=\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$

Rappel

Somme télescopique : $\sum\limits_{k=m}^{k=n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_m$

On a : $\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)-\ln\left(\frac{1}{u_0}\right)$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln\left(\frac{1}{u_{k+1}}\right)-\ln\left(\frac{1}{u_k}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{u_k}{u_k\, e^{-u_k}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(e^{u_k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$$

$$=v_n$$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_n=\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$

b- Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}-\ln u_n$$

$$=+\infty$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

III/ Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$F(0)=2\ln 2$ et $(\forall x>0)$; $F(x)=\int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt.$

1 - a - Vérifions que : $(\forall x>0)$; $\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}\,dt=2\ln 2$

Soit $x>0$

$$\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln|t|\right]_{x^2}^{4x^2}$$

$$=\ln 4x^2-\ln x^2$$

$$=\ln\frac{4x^2}{x^2}$$

$$=\ln 4$$

$$=2\ln 2$$

b- Montrons que : $(\forall t>0)$; $-t\leqslant e^{-t}-1<0$

Soit $t>0$

D'une part : $t>0\Rightarrow -t<0$

$$\Rightarrow e^{-t}<1$$

$$\Rightarrow e^{-t}-1<0$$

Donc : $(\forall t>0)$; $e^{-t}-1<0$

D'autre part, d'après le résultat de la question II - 1,

on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x}\geq x+1$

En particulier, pour $x<0$; $e^{x}\geq x+1$

On pose : $t=-x$ avec $t>0$

On aura : $e^{-t}\geq -t+1$

Donc $(\forall t>0)$; $-t\leq e^{-t}-1$

Conclusion : $(\forall t>0)$; $-t\leq e^{-t}-1<0$

2 - a - Montrons que : $(\forall x>0)$; $-3x^2\leq F(x)-2\ln 2\leq 0$

Soit $x>0$ (Donc : $x^2<4x^2$)

D'après le résultat de la question précédente

on a : $(\forall t>0)$; $-t\leq e^{-t}-1<0$

Donc : $(\forall t>0)$; $-1\leq \dfrac{e^{-t}}{t}-\dfrac{1}{t}<0$

Donc : $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2}-1\,dt\leq \int_{x^2}^{4x^2}\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{t}\,dt<0$

$\displaystyle\left[-t\right]_{x^2}^{4x^2}\leq \int_{x^2}^{4x^2}f(t)\,dt-\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}\,dt<0$

$\displaystyle\left[-t\right]_{x^2}^{4x^2}\leq F(x)-\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}\,dt<0$

D'où : $(\forall x>0)$; $-3x^2\leq F(x)-2\ln 2\leq 0$

b - Déduisons que F est continue et dérivable en 0

La continuité :

D'après le résultat de la question précédente, on a

$(\forall x>0)$; $-3x^2\leq F(x)-2\ln 2\leq 0$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0}-3x^2=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=2\ln 2$

Et puisque $F(0)=2\ln 2$

Alors F est continue en $x_0=0$

La dérivabilité de F en 0.

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$(\forall x>0);\ -3x^2 \leqslant F(x)-2\ln 2 \leqslant 0$$

Donc : $(\forall x>0);\ -3x^2 \leqslant F(x)-2\ln 2 \leqslant 0$

Donc : $(\forall x>0);\ -3x \leqslant \dfrac{F(x)-2\ln 2}{x} \leqslant 0$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0} -3x = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-2\ln 2}{x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = 0$

D'où F est dérivable en $x_0=0$ et $F'(0)=0$

Remarque

On peut juste étudier la dérivabilité en 0 et le fait que toute fonction dérivable est continue

3 - a - Montrons que : $(\forall t\geqslant 1);\ f(t) \leqslant e^{-t}$

Soit $t \geqslant 1$

Donc : $\dfrac{1}{t} \leqslant 1$

Donc : $\dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t} \quad \left(e^{-t}>0\right)$

D'où : $(\forall t\geqslant 1);\ f(t) \leqslant e^{-t}$

b - Déduisons la limite : $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$

D'après le résultat de la question précédente

on a : $(\forall t\geqslant 1);\ f(t) \leqslant e^{-t}$

Et puisque : $(\forall t\geqslant 1);\ f(t)>0$

Alors : $(\forall t\geqslant 1);\ 0<f(t) \leqslant e^{-t}$

$$0<f(t)\leqslant e^{-t} \Rightarrow \int_{x^2}^{4x^2} 0\,dt < \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \leqslant \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow 0<F(x) \leqslant \left[e^{-t}\right]_{x^2}^{4x^2}$$

$\Rightarrow 0 < F(x) \leq e^{-x^2} - e^{-4x^2}$

$\Rightarrow 0 < F(x) \leq \frac{1}{e^{x^2}} - \frac{1}{e^{4x^2}}$

Et puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} - \frac{1}{e^{4x^2}} = 0$

(Il suffit de poser $t = x^2$)

Et $\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$

Alors: $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

$\boxed{4}$ a. Montrons que F est dérivable sur $]0;+\infty[$

On a f est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc f admet une fonction primitive G

dérivable sur $]0;+\infty[$

De plus, les deux fonctions $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto 4x^2$

sont dérivables sur $]0;+\infty[$

Donc, on aura: $F(x) = G(4x^2) - G(x^2) = G \circ v(x) - G \circ u(x)$

pour tout $x \in]0;+\infty[$

Donc F est dérivable sur $]0;+\infty[$

~~Soit~~ Calculons $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$\boxed{(u \circ v)'(x) = v'(x) . u'((v(x))}$

$F'(x) = \left(G(4x^2) - G(x^2)\right)'$

$= (4x^2)' . G'(4x^2) - (x^2)' . G'(x^2)$

$= 8x . f(4x^2) - 2x . f(x^2)$

$= 8x . \frac{e^{-4x^2}}{4x^2} - 2x . \frac{e^{-x^2}}{x^2}$

$= \frac{2e^{-4x^2}}{x} - \frac{2e^{-x^2}}{x}$

$= \frac{2e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) ; F'(x) = \frac{2e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

b. Le tableau de variations de F.

Étudions d'abord le signe de $F'(x)$

Soit $x\in]0;+\infty[$

On a $\frac{2e^{-4x^2}}{x}>0$

Et $x>0 \Rightarrow 3x^2>0$

$\Rightarrow e^{3x^2}>1$

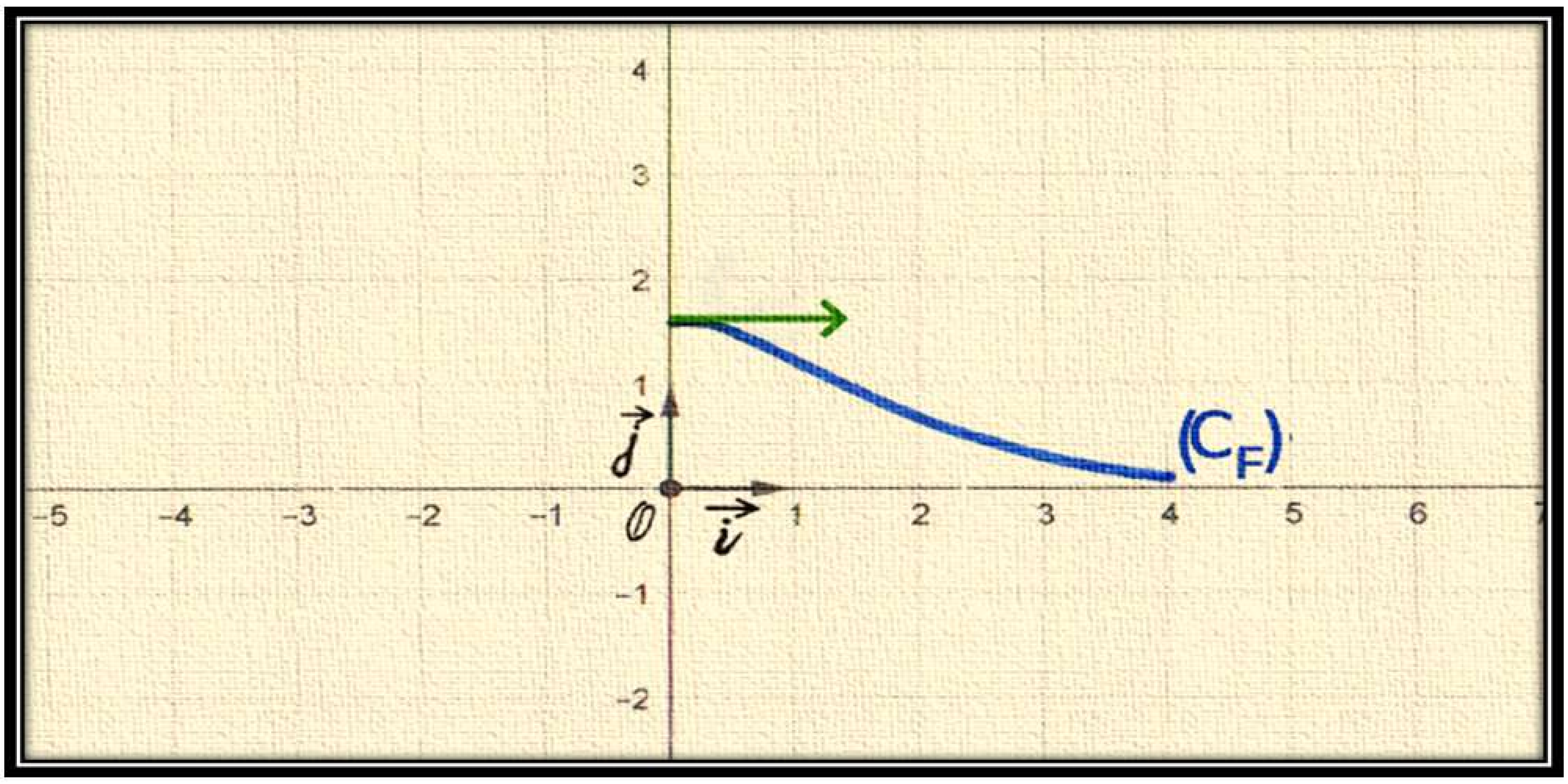
$\Rightarrow \left(1-e^{3x^2}\right)<0$

Donc : $(\forall x\in \mathbb{R}_*^+)$; $F'(x)<0$

D'où F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	0 $\qquad$ $-$
$F(x)$	$2\ln 2$ $\searrow$ 0

c- Représentation de (C_F)



5 - $G(x)=\int_x^{4x} e^{-t}\ln t\, dt$.

a- Montrons que : $(\forall x>0)$; $G(x)=F(\sqrt{x})-e^{-4x}\ln(4x)+e^{-x}\ln x$

(Par parties)

On a $G(x)=\int_x^{4x} e^{-t}\ln t\, dt$.

Posons : $\begin{cases} u'(t)=e^{-t} \\ v(t)=\ln(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t)=-e^{-t} \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$

$$G(x)=\int_x^{4x} e^{-t}\ln t\,dt$$

$$=\left[-e^{-t}\ln t\right]_x^{4x}+\int_x^{4x}\frac{1}{t}e^{-t}\,dt$$

$$=-e^{-4x}\ln(4x)+e^{-x}\ln(x)+F(\sqrt{x})$$

D'où : $(\forall x>0)$; $G(x)=F(\sqrt{x})-e^{-4x}\ln(4x)+e^{-x}\ln x$

b- Calculons $\lim_{x\to 0^+}(e^{-x}-e^{-4x})\ln x$

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{-x}-e^{-4x})\ln x=\lim_{x\to 0^+}e^{-4x}(e^{3x}-1)\ln x$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{-4x}(e^{3x}-1)\ln x$$

$$=\lim_{x\to 0^+}3\,e^{-4x}.\frac{e^{3x}-1}{3x}x\ln x$$

Et puisque $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}-1}{3x}=1$ et $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$

Alors $\lim_{x\to 0^+}(e^{-x}-e^{-4x})\ln x=0$

c- Déduisons $\lim_{x\to 0^+}G(x)$

D'après le résultat de la question précédente

on a : $(\forall x>0)$; $G(x)=F(\sqrt{x})-e^{-4x}\ln(4x)+e^{-x}\ln x$

$$=F(\sqrt{x})-e^{-4x}\ln x+e^{-x}\ln x-e^{-4x}\ln 4$$

$$=F(\sqrt{x})+(e^{-x}-e^{-4x})\ln x-e^{-4x}\ln 4$$

Et puisque $\lim_{x\to 0^+}F(\sqrt{x})=2\ln 2$ (En posant $t=\sqrt{x}$)

Et $\lim_{x\to 0^+}(e^{-x}-e^{-4x})\ln x=0$ et $\lim_{x\to 0^+}e^{-4x}\ln 4=\ln 4$

Alors $\lim_{x\to 0^+}G(x)=0$

Exercice4: 2004 Rattrapage | 10,00 points

I\ Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x)=4x\,e^{-x\ln 2}-2$ et $g(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x}$

Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Étudier les branches infinies de (C_f)

2- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f'(x)=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$

b- Dresser le tableau de variations de f

Montrer que 1 et 2 sont les deux uniques solutions de l'équation $f(x)=0$

3- Étudier la fonction g.

Les limites - Les branches infinies - Les variations

4- Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère

(On prend : $\|\vec{i}\|=4\,cm$; $\dfrac{1}{\ln 2}\simeq 1,4$; $\dfrac{1}{e}\simeq 0,4$; $e\simeq 2,7$ et $\ln 2\simeq 0,7$)

II\ Soit k un nombre réel tel que : $0<k<\dfrac{2}{e}$

1- a- Vérifier graphiquement que l'équation $g(x)=k$ admet deux solutions α et β tel que $\dfrac{1}{2}<\alpha<\beta$

b- Déterminer la valeur de k pour que α et β soient solutions de l'équation $f(x)=0$

On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x)=4x\,e^{-kx}-2$

2- a- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f'_k(x)=4(1-kx)e^{-kx}$

b- Dresser le tableau de variations de f_k

3- a- En déduire que l'équation $f_k(x)=0$ admet exactement deux solutions a et b tel que : $a<\frac{1}{k}<b$

b- Montrer que : $a=\alpha$ et $b=\beta$

4- a- À l'aide de l'integration par parties,

montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R})$; $\int_0^t x e^{-kx}dx=\frac{1}{k^2}\left(1-kte^{-kt}-e^{-kt}\right)$

b- Calculer l'integrale : $\int_\alpha^\beta f_k(x)\,dx$ en fonction de α et β.

c- En déduire que : $\ln(2\alpha).\ln(2\beta)\leqslant 1$

5- Montrer que si deux reéls u et v distincts strictement positifs tel que : $\frac{\ln u}{u}=\frac{\ln v}{v}$

alors : $\ln(u).\ln(v)\leqslant 1$

REPONSE

I\ 1- a- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}4x\,e^{-x\ln 2}-2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{e^{x\ln 2}}-2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{(e^x)^{\ln 2}}-2$$

Juste pour éviter le changement de variable.

On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}4x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+\end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}4x\,e^{-x\ln 2}-2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\frac{e^{x\ln 2}}{x\ln 2}}-2$$

On pose $t=x\ln 2$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to+\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{4}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\frac{e^t}{t}} - 2 = -2$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

b- Les branches infinies de (C_f)

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

Donc, la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote verticale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x\, e^{-x\ln 2} - 2}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x\, e^{-x\ln 2}}{x} - \frac{2}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{e^{x\ln 2}} - \frac{2}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\left(e^{x}\right)^{\ln 2}} - \frac{2}{x}$$
$$= +\infty \qquad \text{car } \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0^+$$

D'où, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

2- a- Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x) = 4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$

On a : $x \longmapsto -x\ln 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

(Comme étant polynôme)

Donc $x \longmapsto e^{-x\ln 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et puisque $x \longmapsto 4x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors $x \longmapsto 4x e^{-x\ln 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(4x\,e^{-x\ln 2}-2\right)'$$
$$=(4x)'e^{-x\ln 2}+4x\left(e^{-x\ln 2}\right)'$$
$$=4e^{-x\ln 2}+4x\left(-x\ln 2\right)'e^{-x\ln 2}$$
$$=4e^{-x\ln 2}-4x\ln 2\,e^{-x\ln 2}$$
$$=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,f'(x)=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$

b- Le tableau de variations de f

Étudions d'abord le signe de $f'(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $f'(x)=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$

Puisque : $4e^{-x\ln 2}>0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(1-x\ln 2)$

- $1-x\ln 2=0 \iff x\ln 2=1$
  $\iff x=\dfrac{1}{\ln 2}$
- $1-x\ln 2>0 \iff x\ln 2<1$
  $\iff x<\dfrac{1}{\ln 2}$
- $f\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)=\dfrac{4}{e\ln 2}-2$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e\ln 2}-2$	$\searrow$	-2

Montrons que 1 et 2 sont les deux uniques solutions de l'équation $f(x)=0$

Sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]$

On a f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]$

Donc f est une bijection de $\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]$ vers $f\left(\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]\right)$

$$f\left(\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]\right)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right]$$

$$=\left]-\infty;\frac{4}{e\ln 2}-2\right]$$

Et puisque $0\in\left]-\infty;\frac{4}{e\ln 2}-2\right]$

Alors : $\exists!\alpha\in\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right];f(x)=0$

Et puisque $1\in\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]$ et $f(1)=4e^{-\ln 2}-2=0$

Alors: $\alpha=1$

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\ln 2};+\infty\right[$

On a f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\ln 2};+\infty\right[$

Donc f est une bijection de $\left[\frac{1}{\ln 2};+\infty\right[$ vers $f\left(\left[\frac{1}{\ln 2};+\infty\right[\right)$

$$f\left(\left[\frac{1}{\ln 2};+\infty\right[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right]$$

$$=\left]-2;\frac{4}{e\ln 2}-2\right]$$

Et puisque $0\in\left]-\infty;\frac{4}{e\ln 2}-2\right]$

Alors : $\exists!\alpha\in\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right];f(x)=0$

Et puisque $2\in\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]$ et $f(1)=4e^{-\ln 2}-2=0$

Alors: $\alpha=2$

Conclusion

1 et 2 sont les deux uniques solutions de l'équation $f(x)=0$

3. Étudions la fonction g

Les limites .

On a g est définie sur $]0;+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2x)}{x} = -\infty$ Car $\lim_{x\to 0^+} \ln(2x) = -\infty$

$\frac{\infty}{0} = \infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2x)}{x}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln 2}{x}$

Et puisque $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$

Alors $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$

Les branches infinies :

On a $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

Donc, la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_g)

On a $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$

Donc, la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à (C_g) au voisinage de $+\infty$

Les variations de g.

On a g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

(Comme étant quotient de deux fonctions dérivables)

Soit $x \in]0;+\infty[$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$\left(\ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$g'(x) = \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right)'$

$= \frac{(\ln(2x))'.x - x'.\ln(2x)}{x^2}$

$= \frac{\frac{(2x)'}{2x}.x - \ln(2x)}{x^2}$

$= \frac{1-\ln(2x)}{x^2}$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g'(x) = \frac{1-\ln(2x)}{x^2}$

Puisque $(\forall x>0)$; $x^2>0$

Alors le signe de $g'(x)$ est le signe de $1-\ln(2x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(2x)=1 \Leftrightarrow 2x=e \Leftrightarrow x=\frac{e}{2}$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow \ln(2x)<1 \Leftrightarrow 2x<e \Leftrightarrow x<\frac{e}{2}$

$g\left(\frac{e}{2}\right)=\dfrac{\ln\left(2\frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}}=\frac{2}{e}$

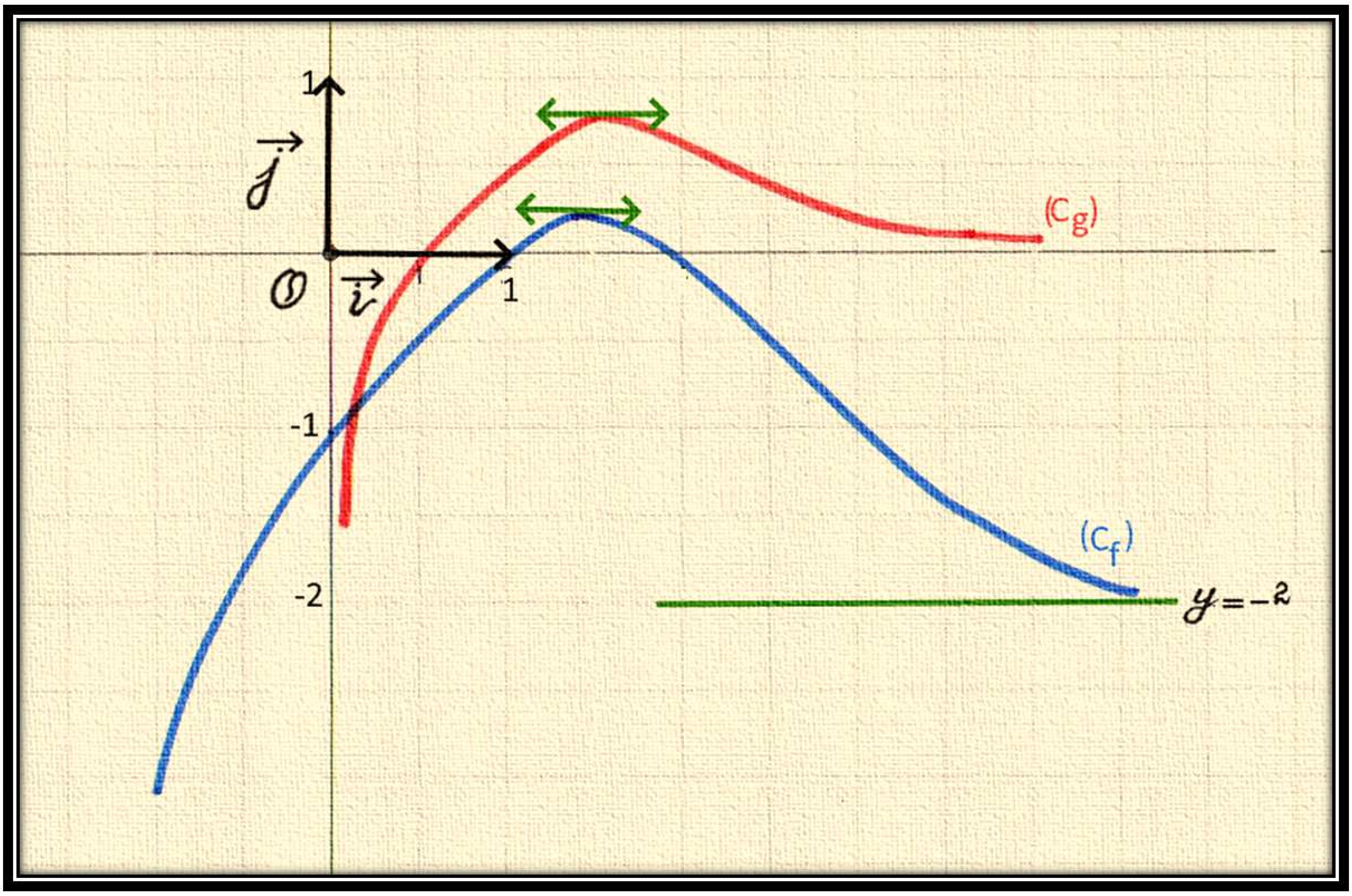
x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

4 - Représentation de (C_f) et (C_g)

Remarques

$g\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f(0)=-2$



II\ Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < k < \frac{2}{e}$

On a $g'\left(\frac{e}{2}\right) = 0$

Donc la courbe (C_g) admet une tangente horizontale au point $A\left(\frac{e}{2} ; \frac{2}{e}\right)$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = \frac{2}{e}$ coupe (C_g) en A uniquement

Et puisque (C_g) est concave

Alors tout droite (D) d'équation $y = k$ avec $0 < k < \frac{2}{e}$ coupe la courbe (C_g) en deux points distincts

Et par suite l'équation $g(x) = k$ admet deux solutions α et β tels que $0 < k < \frac{2}{e}$

Et puisque $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Alors, on aura $0 < \alpha < \beta$

b- La valeur de k pour que α et β soient solutions de l'équation $f(x) = 0$

D'après le résultat de la question I-2-b

on aura bien $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

D'autre part, on a α et β sont les solutions de l'équation $g(x) = k$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

Donc $g(1) = k$ et $g(2) = k$

Donc $\frac{\ln(2)}{1} = k$ et $\frac{\ln 4}{2} = k$ $\qquad (\ln 4 = 2\ln 2)$

D'où $k = \ln 2$

$\boxed{2}$ - a- Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f_k'(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$

On a f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$

(Produit, composée et somme des fonctions dérivables)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_k'(x) = (4x)'e^{-kx} + 4x\left(e^{-kx}\right)'$$
$$= 4e^{-kx} + 4x(-kx)'e^{-kx}$$

$$=4e^{-kx}-4kx\,e^{-kx}$$

$$=4(1-4k)\,e^{-kx}$$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\ f_k'(x)=4(1-kx)e^{-kx}$

6. Dressons le tableau de variations de f_k

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a $4e^{-kx}>0$

Donc, le signe de $f_k'(x)$ est le signe de $1-kx$

$f_k'(x)=0 \Longleftrightarrow 1-kx=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{k}$

$f_k'(x)>0 \Longleftrightarrow 1-kx>0 \Longleftrightarrow x<\dfrac{1}{k}$

$f_k\left(\frac{1}{k}\right)=4\,\dfrac{1}{k}\,e^{-k\frac{1}{k}}-2=\dfrac{4}{ke}-2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{ke}-2$	$\searrow$	-2

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty} 4x\,e^{-kx}-2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{e^{kx}}-2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{(e^{x})^{k}}-2$$

$$=-\infty$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 4x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0^{+}\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty} 4x\,e^{-kx}-2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{k}\cdot\frac{1}{\frac{e^{kx}}{kx}}-2$$

On pose $t=xk$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to+\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{4}{k}\cdot\dfrac{1}{\frac{e^{t}}{t}}-2=-2$

Car $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = -2$

$\boxed{3}$ – a – Déduisons que l'équation $f_k(x)=0$ admet exactement deux solutions α et b tel que : $\alpha < \frac{1}{k} < b$

Vérifions d'abord que : $\frac{4}{ke} - 2 > 0$

On a : $0 < k < \frac{2}{e} \Leftrightarrow 0 < ke < 2$

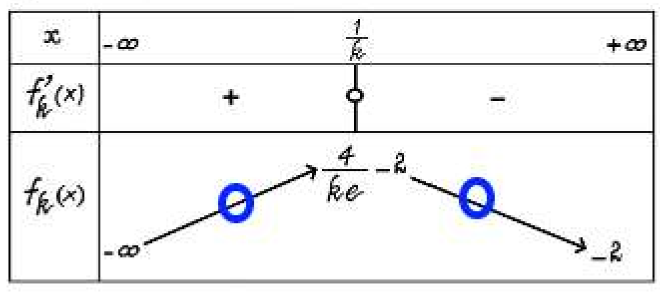
$\Leftrightarrow \frac{1}{ke} > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{ke} > 2$

$\Leftrightarrow \frac{4}{ke} - 2 > 0$

Sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{1}{k}\right]$

On a f_k est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{1}{k}\right]$



Donc f_k est une bijection de $\left]-\infty ; \frac{1}{k}\right]$ vers

$J = f_k\left(\left]-\infty ; \frac{1}{k}\right]\right) = \left]-\infty ; \frac{4}{ke} - 2\right]$

Et puisque $0 \in \left]-\infty ; \frac{4}{ke} - 2\right]$ (car $\frac{4}{ke} - 2 > 0$)

Alors $\exists! \alpha \in \left]-\infty ; \frac{1}{k}\right] ; f_k(\alpha) = 0$

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{k} ; +\infty\right[$

On a f_k est continue et strictement décroissante sur l'intervalle

Donc f_k est une bijection de $\left[\frac{1}{k} ; +\infty\right[$ vers $J = f_k\left(\left[\frac{1}{k} ; +\infty\right[\right)$

$= \left]-2 ; \frac{4}{ke} - 2\right]$

Et puisque $0 \in \left]-2 ; \frac{4}{ke} - 2\right]$

Alors $\exists! b \in \left[\frac{1}{k} ; +\infty\right[; f_k(b) = 0$

Conclusion

L'équation $f_k(x)=0$ admet exactement deux solutions a et b tel que : $\alpha < \frac{1}{k} < b$

b- Montrons que $a=\alpha$ et $b=\beta$

On a $f_k(0)=-2$

Donc, il est claire que $a>0$ et $b>0$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f_k(x)=0 &\Leftrightarrow 4x\,e^{-kx}-2=0\\ &\Leftrightarrow e^{-kx}=\frac{1}{2x}\\ &\Leftrightarrow -kx=-\ln(2x)\\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(2x)}{x}=k\\ &\Leftrightarrow g(x)=k \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation $f_k(x)=0$ sont les solutions de l'équation $g(x)=k$

et puisque α et β sont les solutions de l'équation $g(x)=k$ et $\alpha<\beta$

Alors on aura $a=\alpha$ et $b=\beta$.

4- a- À l'aide de l'integration par parties, montrons que : $(\forall t\in\mathbb{R})\,;\int_0^t x e^{-kx}dx=\frac{1}{k^2}\left(1-kt\,e^{-kt}-e^{-kt}\right)$

$\int u'v=[uv]-\int uv'$

$\int e^{ax}=\frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]$

$$I=\int_0^t x e^{-kx}dx$$

$$\begin{cases} u'(x)=e^{-kx}\\ v(x)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)=-\frac{1}{k}e^{-kx}\\ v'(x)=1 \end{cases}$$ (k est une constante)

$$\begin{aligned} I&=-\frac{1}{k}\left[x e^{-kx}\right]_0^t+\frac{1}{k}\int_0^t e^{-kx}dx\\ &=-\frac{1}{k}t\,e^{-kt}+\frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^t\\ &=-\frac{t}{k}e^{-kt}-\frac{1}{k^2}\left(e^{-kt}-1\right)\\ &=\frac{1}{k^2}\left(1-kt\,e^{-kt}-e^{-kt}\right) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall t\in\mathbb{R})\,;\int_0^t x e^{-kx}dx=\frac{1}{k^2}\left(1-kt\,e^{-kt}-e^{-kt}\right)$

6- Calculons : $\int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)\,dx$ en fonction de α et β.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(4x\,e^{-kx}-2\right)dx$$
$$= 4\int_{\alpha}^{\beta} x\,e^{-kx}\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} 2\,dx$$
$$= 4\int_{\alpha}^{\beta} x\,e^{-kx}\,dx - 2(\beta-\alpha)$$

Calculons : $4\int_{\alpha}^{\beta} x\,e^{-kx}\,dx$

$$4\int_{\alpha}^{\beta} x\,e^{-kx}\,dx = 4\int_{0}^{\beta} x\,e^{-kx}\,dx - 4\int_{0}^{\alpha} x\,e^{-kx}\,dx$$
$$= \frac{4}{k^2}\left(1-k\beta\,e^{-k\beta}-e^{-k\beta}\right)-\frac{4}{k^2}\left(1-k\alpha\,e^{-\alpha k}-e^{-\alpha k}\right)$$
$$= \frac{4}{k^2}\left(k\alpha\,e^{-\alpha k}+e^{-\alpha k}-\beta k\,e^{-\beta k}-e^{-\beta k}\right)$$
$$= \frac{1}{k^2}\left(4k\alpha\,e^{-\alpha k}+4e^{-\alpha k}-4\beta k\,e^{-\beta k}-4e^{-\beta k}\right)$$

Et puisque : $f_k(\alpha)=f_k(\beta)=0$

Alors $4\alpha\,e^{-\alpha k}=2$ et $4\beta\,e^{-\beta k}=2$ et $4e^{-\alpha k}=\frac{2}{\alpha}$ et $4e^{-\beta k}=\frac{2}{\beta}$

Donc $$4\int_{\alpha}^{\beta} x\,e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(2k+\frac{2}{\alpha}-2k-\frac{2}{\beta}\right)$$
$$= \frac{1}{k^2}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}\right)$$
$$= \frac{2(\beta-\alpha)}{k^2\alpha\beta}$$

Donc : $$\int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)\,dx = \frac{2(\beta-\alpha)}{k^2\alpha\beta}-2(\beta-\alpha)=\frac{2(\beta-\alpha)}{k^2\alpha\beta}\left(1-k^2\alpha\beta\right)$$

c- Déduisons que : $\ln(2\alpha).\ln(2\beta) \leqslant 1$

x	$-\infty$		α		$\frac{1}{k}$		β		$+\infty$
$f'_k(x)$				+	0	−			
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{ke}-2$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2
					$f_k(x) \geqslant 0$				

On a $\forall x \in [\alpha;\beta]; f_k(x) \geqslant 0$

Donc : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)\,dx \geqslant 0 \quad (\alpha<\beta)$

Donc : $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{k^2\alpha\beta}(1-k^2\alpha\beta) \geqslant 0$

Et puisque : $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{k^2\alpha\beta} \geqslant 0$

Alors : on aura : $1-\alpha\beta k^2 \geqslant 0$

Donc : $\alpha\beta k^2 \leqslant 1$

Donc : $\alpha k.\beta k \leqslant 1$ ⊛

Et puisque α et β sont les solutions de l'équation $g(x)=k$

Alors : $\dfrac{\ln(2\alpha)}{\alpha}=k$ et $\dfrac{\ln(2\beta)}{\beta}=k$

Donc : $\alpha k=\ln(2\alpha)$ et $\beta k=\ln(2\beta)$

D'où ⊛ devient $\ln(2\alpha).\ln(2\beta) \leqslant 1$

5- Montrons que si $u>0$ et $v>0$ tel que : $u \neq v$

et $\dfrac{\ln u}{u}=\dfrac{\ln v}{v}$

Alors : $\ln(u).\ln(v) \leqslant 1$

On a : $\dfrac{\ln u}{u}=\dfrac{\ln v}{v} \Leftrightarrow \dfrac{\ln\left(2.\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}}=\dfrac{\ln\left(2.\frac{v}{2}\right)}{\frac{v}{2}}$

On pose : $\dfrac{\ln\left(2.\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}}=\dfrac{\ln\left(2.\frac{v}{2}\right)}{\frac{v}{2}}=k$

Donc $\frac{u}{2}$ et $\frac{v}{2}$ sont les solutions de l'équation $g(x)=k$

(u et v existent entraîne $0<k<\frac{2}{e}$)

Or, d'après le résultat de la question précédente,

on aura : $\ln\left(2.\frac{u}{2}\right).\ln\left(2.\frac{v}{2}\right) \leqslant 1$

D'où : $\ln u.\ln v \leqslant 1$

I\ Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(0)=0$ et $f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$; pour tout $x>0$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. a. Montrer que f est continue en $x_0=0$ à droite.
   b. Montrer que f est dérivable en $x_0=0$ à droite.
   c. Montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b. Montrer que : $\forall t\geq 0$; $0\leq e^{-t}+t-1\leq\frac{t^2}{2}$
   c. Montrer que : $\forall x>0$; $-\frac{4}{x}\leq f(x)-x\leq\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$
   d. En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera son équation réduite.
3. Représenter la courbe (C_f) et la droite (Δ) .

II\ Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f_n(0)=0$ et $f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$; pour tout $x>0$

1. Montrer que f_n est dérivable en $x_0=0$ à droite.
2. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$
3. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=\frac{2}{n}$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$
   b. Montrer que : $(\forall x>0)(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\geq f_n(x)-\frac{2}{n}$
   c. En déduire que la suite (α_n) est décroissante, puis montrer qu'elle est convergente.

   On pose : $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

   d. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $n\alpha_n=2e^{\frac{2}{\alpha_n}}-2$
   e. Montrer que : $\alpha=0$

III\ Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_{x}^{2x} f(t)\,dt.$$

(avec f est la fonction définie en première partie)

1. a. Montrer que : $(\forall x>0)\ ;\ x f(x)\leqslant F(x)\leqslant x f(2x)$

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2. a. Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$

   b. Montrer que :

$$\begin{cases} F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) \ ;\ x>0 \\ F'_d(0)=0 \end{cases}$$

($F'_d(0)$ est le nombre dérivé de F en 0 à droite)

3. Dresser le tableau de variations de F.

REPONSE

I\ 1. a. Montrons que f est continue en $x_0=0$ à droite.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$

On pose $t=-\frac{2}{x}$ (Donc $x=-\frac{2}{t}$)

Si $x\to0^+$

Alors $t\to-\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-\frac{2}{t}+2\right)e^{t}=0$ Car $\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-\frac{2}{t}+2\right)=2\\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0\end{cases}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

Alors f est continue en $x_0=0$ à droite.

b. La dérivabilité de f en $x_0=0$ à droite.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+2)e^{-\frac{2}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}e^{-\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{2}{x}}-\left(-\frac{2}{x}e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

On pose $t=-\frac{2}{x}$

Si $x\to 0^+$

Alors $t\to -\infty$

Donc, on aura : $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{2}{x}}-\left(-\frac{2}{x}e^{-\frac{2}{x}}\right)=\lim_{t\to -\infty} e^{t}-te^{t}=0$

Car $\lim_{t\to -\infty} e^{t}=\lim_{t\to -\infty} te^{t}=0$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

D'où f est dérivable en $x_0=0$ à droite et $f'_d(0)=0$

Remarque

(Cf) admet une demi tangente horizontale à droite du point $O(0;0)$

c- Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

1ère méthode

Dans ce cas, on peut juste utiliser la définition, en effet, soit $(x;y)\in\mathbb{R}_+^{*2}$

$$x<y \Rightarrow x+2<y+2 \text{ et } -\frac{2}{x}<-\frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow 0<x+2<y+2 \text{ et } e^{-\frac{2}{x}}<e^{-\frac{2}{y}}$$

$$\Rightarrow (x+2)e^{-\frac{2}{x}}<(y+2)e^{-\frac{2}{y}}$$

$$\Rightarrow f(x)<f(y)$$

D'où, f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2ème méthode

Calculons $f'(x)$ pour toute $x>0$

On a : $x\longmapsto -\frac{2}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc : $x\longmapsto e^{-\frac{2}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et puisque : $x\longmapsto (x+2)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Alors f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$$f'(x)=\left((x+2)e^{-\frac{2}{x}}\right)'$$
$$=(x+2)'e^{-\frac{2}{x}}+(x+2)\left(e^{-\frac{2}{x}}\right)'$$
$$=e^{-\frac{2}{x}}+\left(-\frac{2}{x}\right)'(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$
$$=e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x^2}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$

Et puisque : $\forall x>0 ;\begin{cases} e^{-\frac{2}{x}}>0 \\ \frac{2}{x^2}>0 \\ (x+2)>0 \end{cases}$

Alors : $\forall x>0 ; f'(x)>0$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{2}$ - a - Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{x}=0$ et $t\longmapsto e^t$ continue en 0

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{2}{x}}=e^0=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b - Montrons que :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(t)=e^{-t}+t-1$

On a g est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Soit $t\in[0;+\infty[$

$$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$$

$$g'(t)=\left(e^{-t}+t-1\right)'=-e^{-t}+1$$

Donc : $\forall t\in[0;+\infty[; g'(t)=-e^{-t}+1$

On a : $t\geqslant 0 \Leftrightarrow -t\leqslant 0$
$$\Leftrightarrow e^{-t}\leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow 1-e^{-t}\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow g'(t)\geqslant 0$$

Donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$t \geqslant 0 \Longleftrightarrow g(t) \geqslant g(0)$

$\Longleftrightarrow e^{-t} + t - 1 \geqslant 0$

Donc : $\forall t \in [0;+\infty[\; ; e^{-t} + t - 1 \geqslant 0$ $\boxed{1}$

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$h(t) = \frac{t^2}{2} - e^{-t} - t + 1$

On a h est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Soit $t \in [0;+\infty[$

$h'(t) = \left(\frac{t^2}{2} - e^{-t} - t + 1\right)'$

$= e^{-t} + t - 1$

$= g(t)$

Et puisque : $\forall t \in [0;+\infty[\; ; g(t) \geqslant 0$

Alors : $h'(t) \geqslant 0$

Donc h est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$t \geqslant 0 \Longleftrightarrow h(t) \geqslant h(0)$

$\Longleftrightarrow \frac{t^2}{2} - e^{-t} - t + 1 \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow e^{-t} - t + 1 \geqslant \frac{t^2}{2}$

Donc : $\forall t \in [0;+\infty[\; ; e^{-t} - t + 1 \geqslant \frac{t^2}{2}$ $\boxed{2}$

D'après 1 et 2, on deduit que : $\forall t \geqslant 0 \; ; 0 \leqslant e^{-t} + t - 1 \leqslant \frac{t^2}{2}$

c) Montrons que : $\forall x > 0 \; ; -\frac{4}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

Soit $x > 0$ (Donc : $\frac{2}{x} > 0$)

D'après le résultat de la question précédente

$\forall t \in [0;+\infty[\; ; e^{-t} - t + 1 \geqslant \frac{t^2}{2}$

Et puisque : $\frac{2}{x} > 0$

Alors : $0 \leqslant e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x} - 1 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2$

Donc : $1 - \frac{2}{x} \leqslant e^{-\frac{2}{x}} \leqslant 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$

Donc : $(x+2)\left(1 - \frac{2}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant (x+2)\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$ $\quad \left((x+2) > 0\right)$

$$(x+2)\left(1-\frac{2}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant (x+2)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

$$x-2+2-\frac{4}{x} \leqslant f(x) \leqslant x-2+\frac{2}{x}+2-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}$$

$$-\frac{4}{x} \leqslant f(x)-x \leqslant -\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$$

D'où : $\forall x>0\ ;\ -\frac{4}{x} \leqslant f(x)-x \leqslant \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

d- La branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

D'après le résultat de la question précédente,

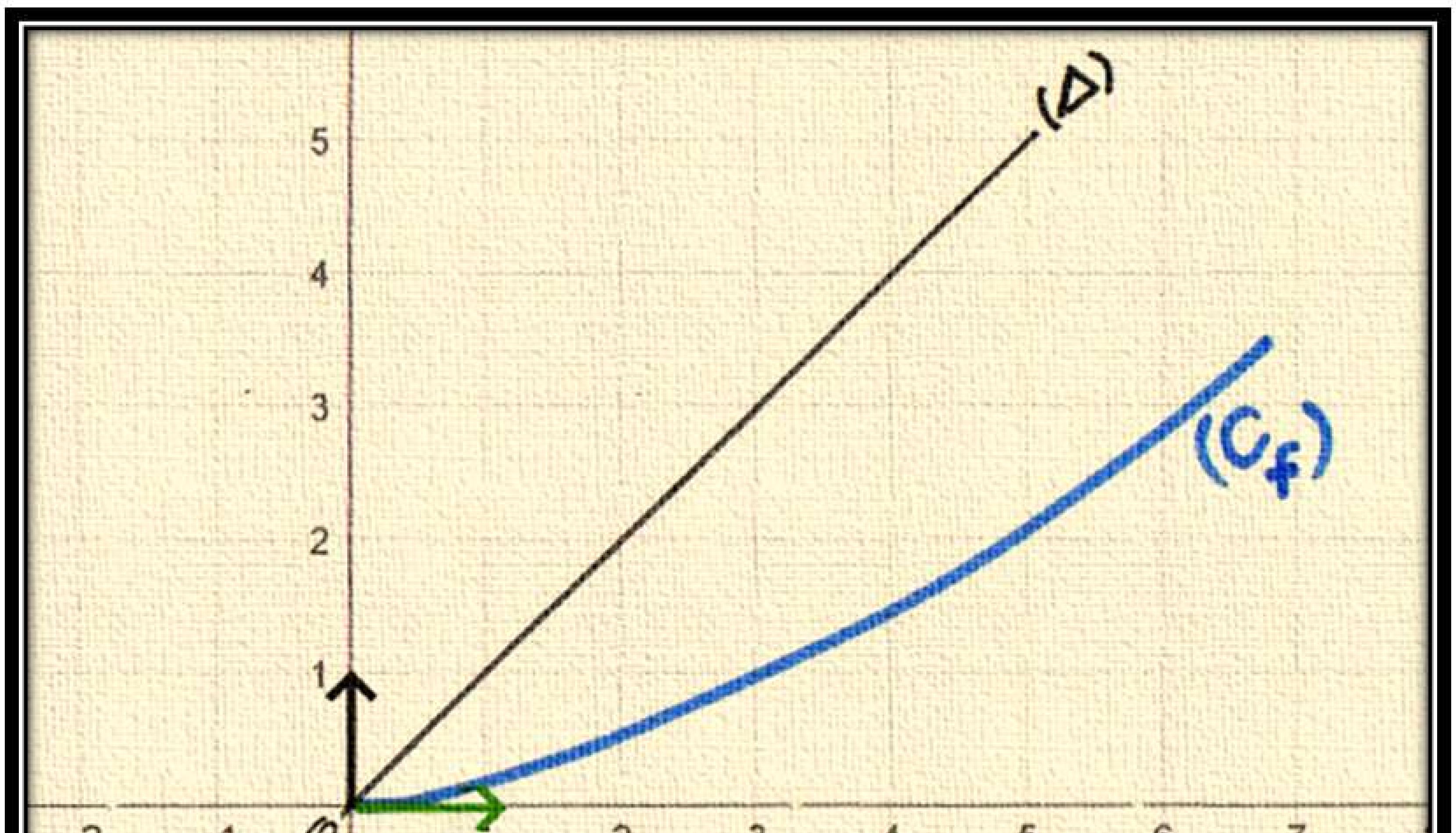
on a : $\forall x>0\ ;\ -\frac{4}{x} \leqslant f(x)-x \leqslant \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

Et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{4}{x}=0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=0$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-x=0$

Et par suite, la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

3- La représentation de (C_f) et (Δ)



II\ On a : $f_n(0)=0$ et $f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$ pour tout $x>0$

1- Montrons que f_n est dérivable en 0 à droite

- De la même manière que la question I-1-b-

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{-\frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}}$$

On pose : $t = -\frac{2}{x}$

Si $x \to 0^+$ Alors $t \to -\infty$

Donc on aura : $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{t \to -\infty} \left(e^{t} - \frac{1}{n} t e^{t}\right) = 0$

(Car $\lim_{t \to -\infty} e^{t} = \lim_{t \to -\infty} t e^{t} = 0$)

Donc : $\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = 0$

D'où f_n est dérivable à droite de 0 et $f'_{n_d}(0) = 0$

2 - Les variations de f_n

Remarque

Puisque f_n est dérivable en $x_0 = 0$ à droite.
Alors f_n est continue en $x_0 = 0$ à droite.

Calculons $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}}$

On a $\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{2}{n}\right) = +\infty$

Et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = 0$ et $t \mapsto e^{t}$ continue en 0

Donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{2}{x}} = e^{0} = 1$

D'où : $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

Calculons $f'_n(x)$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

On a f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$

(Comme étant composée et produit des fonctions dérivables)

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$f'_n(x) = \left(\left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}}\right)'$$

$$= \left(x + \frac{2}{n}\right)' e^{-\frac{2}{x}} + \left(x + \frac{2}{n}\right)\left(e^{-\frac{2}{x}}\right)'$$

$$=e^{-\frac{2}{x}}+\left(-\frac{2}{x}\right)'\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$$

$$=e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$$

Donc : $\forall x>0 ; f_n'(x)=e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

Et puisque : $x>0$

Alors, il est claire que : $f_n'(x)>0$

D'où f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\boxed{3}$ - a - Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Montrons que l'équation $f_n(x)=\frac{2}{n}$ admet une unique solution α_n dans $]0;+\infty[$

On a f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc f_n est une bijection de $]0;+\infty[$ vers

$$f_n(]0;+\infty[)=\left]\lim_{x\to0^+}f_n(x);\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\right[=]0;+\infty[$$

Et puisque $\frac{2}{n}\in]0;+\infty[$

Alors : $\exists!\,\alpha_n\in]0;+\infty[\,;\,f_n(\alpha_n)=\frac{2}{n}$

b - Montrons que : $(\forall x>0)(\forall n\in\mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\geq f_n(x)-\frac{2}{n}$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$$f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}-f_n(x)+\frac{2}{n}=\left(x+\frac{2}{n+1}\right)e^{-\frac{2}{x}}-\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{n}$$

$$=\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}-\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}\right)\left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right)$$

$$=-\frac{2}{n(n+1)}\left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right)$$

On a : $-\frac{2}{n(n+1)}>0$

Et : $x>0\Rightarrow-\frac{2}{x}<0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2}{x}}<1$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2}{x}}-1<0$$

$$\Rightarrow-\frac{2}{n(n+1)}\left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right)<0$$

Donc : $(\forall x>0)(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\, f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}-f_n(x)+\frac{2}{n}<0$

D'où : $(\forall x>0)(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\, f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\geq f_n(x)-\frac{2}{n}$

c) Déduisons que la suite (a_n) est décroissante

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $(\forall x>0)\,;\, f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\geq f_n(x)-\frac{2}{n}$

Pour $x=a_n$

On aura : $f_{n+1}(a_n)-\frac{2}{n+1}\geq f_n(a_n)-\frac{2}{n}$

Et puisque : $f_n(a_n)=\frac{2}{n}$

Alors, on aura : $f_{n+1}(a_n)\geq\frac{2}{n+1}$

Et puisque : $f_{n+1}(a_n)=\frac{2}{n+1}$

Alors, on aura : $f_{n+1}(a_n)\geq f_{n+1}(a_{n+1})$

Et puisque f_{n+1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

avec f bijection

Alors : $f_{n+1}(a_n)\geq f_{n+1}(a_{n+1})\Rightarrow f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(a_n)\right)\geq f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(a_{n+1})\right)$

$\Rightarrow a_n\geq a_{n+1}$

D'où (a_n) est une suite décroissante.

Montrons que (a_n) est convergente

Puisque (a_n) est décroissante et minoreé par 0

Alors (a_n) est convergente

On pose : $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

d) Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\, n\,a_n=2e^{\frac{2}{a_n}}-2$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $f_n(a_n)=\frac{2}{n}$

Donc : $\left(a_n+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{a_n}}=\frac{2}{n}\Leftrightarrow\dfrac{a_n+\frac{2}{n}}{e^{\frac{2}{a_n}}}=\frac{2}{n}$

$\Leftrightarrow n\left(a_n+\frac{2}{n}\right)=2e^{\frac{2}{a_n}}$

$\Leftrightarrow n\,a_n+2=2e^{\frac{2}{a_n}}$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $n a_n = 2e^{\frac{2}{a_n}}-2$

e- Montrons que : $a=0$

Supposons que $a\neq 0$ (Donc $a>0$)

On a : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $n a_n = 2e^{\frac{2}{a_n}}-2$

Par passage à la limite, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} n a_n = \lim_{n\to+\infty} 2e^{\frac{2}{a_n}}-2$$

Donc : $+\infty = 2e^{\frac{2}{a}}-2$

Ce qui est absurde

Donc notre supposition est fausse

Et par suite $a=0$.

III\ $\boxed{1}$ - a - Montrons que : $(\forall x>0)$; $xf(x)\leqslant F(x)\leqslant xf(2x)$

Soit $x\in\,]0;+\infty[$

Donc : $x<2x$

Soit : $x\leqslant t\leqslant 2x$

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Alors : $f(x)\leqslant f(t)\leqslant f(2x)$

Et puisque f est continue sur $[0;+\infty[$

Alors: $\displaystyle\int_x^{2x} f(x)dt \leqslant \int_x^{2x} f(t)dt \leqslant \int_x^{2x} f(2x)\,dt$

Donc: $f(x)[t]_x^{2x}\leqslant F(x)\leqslant f(2x)[t]_x^{2x}$

Donc: $(2x-x)f(x)\leqslant F(x)\leqslant (2x-x)f(2x)$

D'où : $(\forall x>0)$; $xf(x)\leqslant F(x)\leqslant xf(2x)$

b- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

D'après le résultat de la question

on a: $(\forall x>0)$; $F(x)\geqslant xf(x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$

Et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

$\boxed{2}$-a- Montrons que F est dérivable sur $[0;+\infty[$

Étudions d'abord la dérivabilité de F en $x_0=0$ à droite.

D'après le résultat de la question III-1-a

on a : $(\forall x>0)\,;\ xf(x)\leqslant F(x)\leqslant xf(2x)$

Donc : $f(x)\leqslant \dfrac{F(x)}{x}\leqslant f(2x)$

Donc: $f(x)\leqslant \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\leqslant f(2x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(2x)=0$

Alors $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=0$

Donc F est dérivable en $x_0=0$ à droite et $F'_d(0)=0$

Soit $x\in[0;+\infty[$

On a f est continue sur $[0;+\infty[$

Donc f admet une primitive φ avec $\varphi'(x)=f(x)$

On a : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$

$$=\int_x^{0} f(t)dt+\int_0^{2x} f(t)dt$$

$$=-\int_0^{x} f(t)dt+\int_0^{2x} f(t)dt$$

$$=-\varphi(x)+\varphi(2x)$$

$$F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$$

Et puisque $x\longmapsto 2x$ et φ sont dérivables sur $]0;+\infty[$

Alors F est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et puisque F est dérivable en 0 à droite

Alors F est dérivable sur $[0;+\infty[$

b- Montrons que : $\begin{cases} F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)\ ;\ x>0 \\ F'_d(0)=0 \end{cases}$

Soit $x\in\,]0;+\infty[$

D'après $\boxed{\star}$, on aura : $F'(x)=(\varphi(2x)-\varphi(x))'$

$$=(2x)'.\varphi'(2x)-\varphi'(x)$$
$$=2.f(2x)-f(x)$$
$$=2.(2x+2)e^{-\frac{1}{x}}-(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$
$$=e^{-\frac{2}{x}}\left((4x+4)e^{\frac{1}{x}}-(x+2)\right)$$
$$=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2+3x+2)e^{\frac{1}{x}}-(x+2)\right)$$
$$=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}}+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}-(x+2)\right)$$
$$=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)$$

Et puisque : $F'_d(0)=0$

Alors : $\begin{cases} F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) \ ; x>0 \\ F'_d(0)=0 \end{cases}$

$\boxed{3}$ - Le tableau de variations de F

Étudions le signe de $F'(x)$

Soit $x\in]0;+\infty[$

On a $F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)$

On a $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}>0$ et $3x+2>0$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>1 \text{ et } (3x+2)e^{\frac{1}{x}}>0$$
$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}-1>0 \text{ et } (3x+2)e^{\frac{1}{x}}>0$$
$$\Rightarrow (x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)>0 \text{ et } (3x+2)e^{\frac{1}{x}}>0$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)>0$$
$$\Rightarrow F'(x)>0$$

Donc F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	0 $\qquad$ $+$
$F(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(1+x)e^{-2x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

I- 1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b- Étudier les branches infinies de (C_f).

2- Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

3- a- Étudier la concavité de (C_f)

b- Représenter (C_f)

4- a- Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle : (E): $y''+3y'+2y=-e^{-2x}$

b- Déterminer la solution générale de (E)

II- Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On désigne par A_n l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation : $x=n$

1- Calculer A_n en fonction de n

2- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

III- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=n\int_0^1 (f(x))^n\,dx$.

1- À l'aide du changement de variable $t=nx$, montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ u_n=\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt$

2- a- Montrer que : $\forall r\in[1;2];\ 2-r\leq\frac{1}{r}\leq 1$

b- En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in[0;n]);\ x-\frac{x^2}{2n}\leq n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leq x$

3- a- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n\leq\int_0^n e^{-x}\,dx$.

b- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}\,dx\leq u_n$

c- En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

$\boxed{4}$- Soit $a\in]0;1[$

a- Montrer que : $\int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leqslant n(1-a)(f(a))^n$

b- En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^1 n(f(x))^n\,dx=0$

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^a n(f(x))^n\,dx$

REPONSE

I- $\boxed{1}$-a- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x)e^{-2x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}+\frac{x}{e^{2x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{e^{2x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}$$

On pose $t=2x$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to+\infty$

On aura : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{e^{t}}{t}}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t}=+\infty\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1+x)e^{-2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{(e^{x})^2}\quad\left(\text{Car : }\lim_{x\to-\infty}(1+x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^{x}=0^{+}\right)$$
$$=-\infty$$

b- Les branches infinies de (C_f).

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1+x)e^{-2x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{x}\cdot\frac{1}{(e^x)^2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\frac{1}{(e^x)^2}$$
$$= +\infty$$

$\left(\text{Car: } \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+\right)$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$\boxed{2}$ Les variations de f.

On a : $x\longmapsto -2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

Donc : $x\longmapsto e^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et puisque : $x\longmapsto (1+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Comme étant produit de deux fonctions dérivables)

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left((1+x)e^{-2x}\right)'$$
$$=(1+x)'\cdot e^{-2x}+(1+x)\cdot\left(e^{-2x}\right)'$$
$$=e^{-2x}+(-2x)'(1+x)\cdot e^{-2x}$$
$$=e^{-2x}-2(1+x)\cdot e^{-2x}$$
$$=(-2x-1)\,e^{-2x}$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=(-2x-1)\,e^{-2x}$

Puisque : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ e^{-2x}>0$

Alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-2x-1)$

$$-2x-1=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e=\frac{e}{2}$

3 - a - La concavité de (C_f)

Calculons $f''(x)$

On a $f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

(comme étant produit de deux fonctions dérivables)

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left((-2x-1)e^{-2x}\right)' \\
&= (-2x-1)'\cdot e^{-2x}+(-2x-1)\left(e^{-2x}\right)' \\
&= -2\cdot e^{-2x}+(-2x)'(-2x-1)e^{-2x} \\
&= -2\cdot e^{-2x}-2(-2x-1)e^{-2x} \\
&= (-2+4x+2)e^{-2x} \\
&= 4x\,e^{-2x}
\end{aligned}
$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f''(x)=4x\,e^{-2x}$

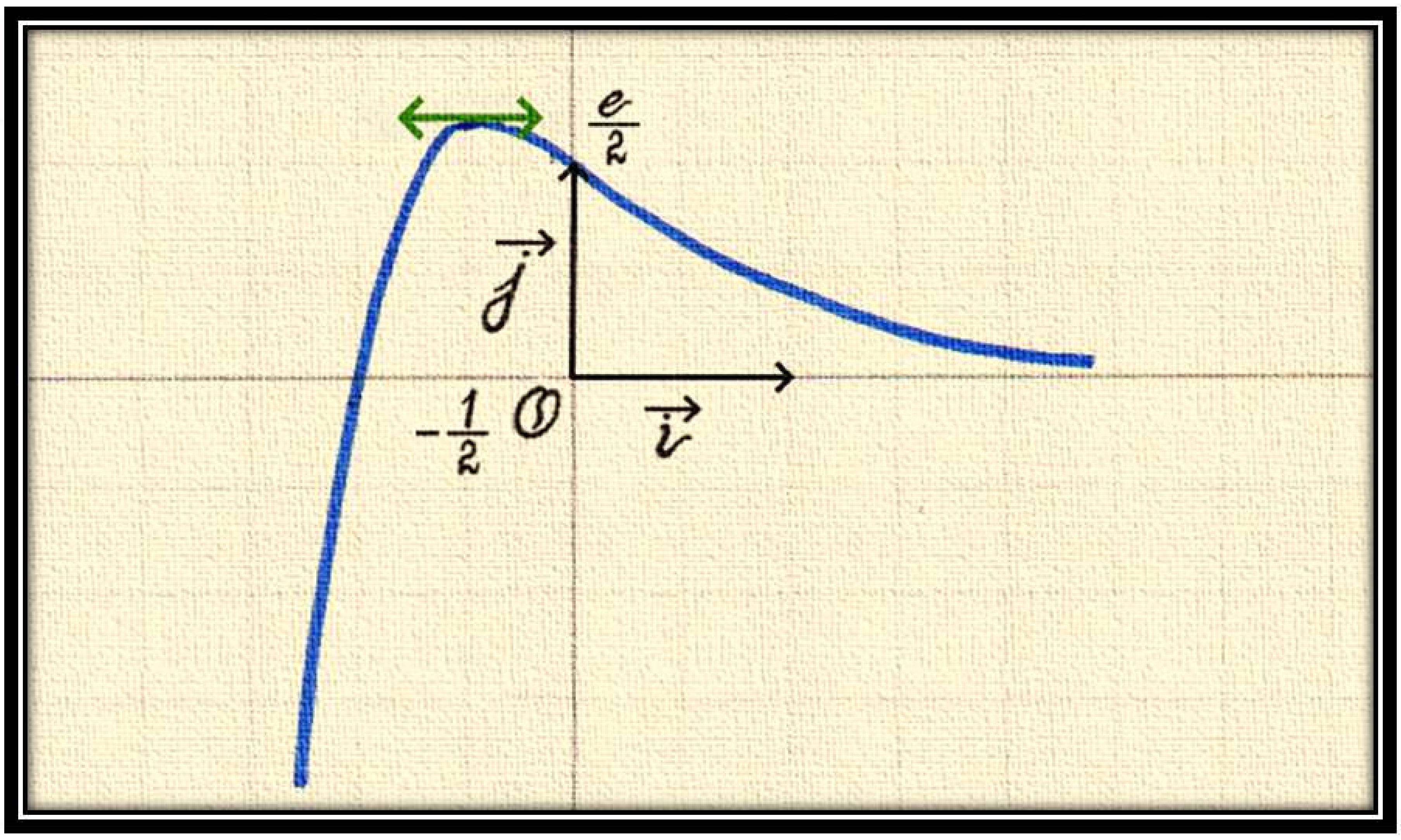
Puisque : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ 4e^{-2x}>0$

Alors le signe de $f''(x)$ est le signe de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
La concavité de (C_f)			$I(0;1)$ point d'inflexion		

b - Représentation de (C_f)



4 - a - Montrons que la fonction f est une solution de l'équation différentielle : (E): $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\begin{cases} f''(x) = 4x\, e^{-2x} \\ f'(x) = (-2x-1)\, e^{-2x} \\ f(x) = (1+x)\, e^{-2x} \end{cases}$

Donc : $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 4x\, e^{-2x} + (-6x-3)\, e^{-2x} + (2x+2)\, e^{-2x}$

$= (4x - 6x - 3 + 2 + 2x)\, e^{-2x}$

$= -e^{-2x}$

D'où f est une solution de l'équation differentielle (E)

b - Déterminons la solution générale de (E)

La solution générale de (E) s'écrit sous la forme : $y = y_H + y_p$

où y_H est une solution de l'équation homogène : $y'' + 3y' + 2y = 0$

Et y_p est une solution particulière de (E)

(Dans notre cas : $y_p = f$)

Soit (E_H) : $y'' + 3y' + 2y = 0$

Son équation caracteristique est : $r^2 + 3r + 2 = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r+2) = 0$

$\Leftrightarrow r = -1$ ou $r = -2$

Donc la solution de (E_H) est :

$y_H(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$ avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Et par suite, la solution générale de (E) s'écrit sous la forme :

$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}+f(x)$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $y(x)=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}+f(x)$ avec $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

II ~ Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$\boxed{1}$ ~ Calculons $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

$$\mathcal{A}_n=\int_0^n |f(x)|\,dx\ (u.a)$$

$$=\int_0^n \left|(1+x)e^{-2x}\right|dx\ \ (u.a)$$

Et puisque : $\forall x\in[0;n]$; $(1+x)e^{-2x}>0$

Alors : $\mathcal{A}_n=\int_0^n (1+x)e^{-2x}\,dx\ (u.a)=\int_0^n f(x)\,dx\ (u.a)$

Déterminons une primitive de f

On peut utiliser l'intégration par parties, ou bien utiliser le fait que f est une solution de l'équation différentielle : $y''+3y'+2y=-e^{-2x}$

Donc : $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=-e^{-2x}$

Donc :
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-e^{-2x}-f''(x)-3f'(x)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}-f'(x)-3f(x)\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}-(-2x-1)e^{-2x}-3(1+x)e^{-2x}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}+(2x+1)e^{-2x}-3(1+x)e^{-2x}\right)'$$
$$=\frac{1}{4}\left((-3-2x)e^{-2x}\right)'$$

Donc :
$$\mathcal{A}_n=\frac{1}{4}\int_0^n \left((-3-2x)e^{-2x}\right)'dx\quad (u.a)$$
$$=\frac{1}{4}\left[(-3-2x)e^{-2x}\right]_0^n$$
$$=\frac{1}{4}\left((-3-2n)e^{-2n}+3\right)$$
$$=\frac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4}$$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\mathcal{A}_n=\dfrac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4}\ (u.a)$

$\boxed{2}$ ~ Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{A}_n$

$$\lim_{n\to+\infty}\mathcal{A}_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(3-(2n+3)e^{-2n}\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(3-2ne^{-2n}-3e^{-2n}\right)$$

On pose $t=-2n$

Si $n \to +\infty$

Alors $t \to -\infty$

Donc, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(3-2ne^{-2n}-3e^{-2n}\right)=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{4}\left(3-te^{t}-3e^{t}\right)=\frac{3}{4}$$

$\left(\text{Car } \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=\lim\limits_{t\to-\infty} te^{t}=0\right)$

III ~ Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose : $u_n = n\int_0^1 (f(x))^n\,dx$.

1 ~ Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_n=\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt$

On a : $u_n = n\int_0^1 (f(x))^n\,dx = n\int_0^1\left((1+x)e^{-2x}\right)^n dx$

$$= n\int_0^1 (1+x)^n e^{-2xn}\,dx$$

On pose : $t=nx$

Si $x=0$, alors $t=0$

Si $x=1$, alors $t=n$

On a : $x=\frac{t}{n} \Rightarrow dx=\frac{1}{n}\,dt$.

Donc : $u_n = n\int_0^1 (1+x)^n e^{-2xn}\,dx$

$$= n\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\cdot\frac{1}{n}\,dt$$

$$= n\cdot\frac{1}{n}\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt$$

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_n=\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt$

2 ~ a ~ Montrons que : $\forall r\in[1;2]$; $2-r\leqslant\frac{1}{r}\leqslant 1$

Soit $r\in[1;2]$

$r\in[1;2] \Rightarrow r\geqslant 1$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\leqslant 1$ ⊛

$\frac{1}{r}-(2-r)=\frac{1-2r+r^2}{r}$

$$=\frac{(1-r)^2}{r}$$

Puisque : $r \in [1;2]$

Alors : $\dfrac{(1-r)^2}{r} \geqslant 0$

Donc : $\dfrac{1}{r} - (2-r) \geqslant 0$

Donc : $\dfrac{1}{r} \geqslant 2 - r$ ⊛⊛

D'après ⊛ et ⊛⊛ , on aura : $\forall r \in [1;2]\ ;\ 2 - r \leqslant \dfrac{1}{r} \leqslant 1$

6- Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\big(\forall x \in [0;n]\big)\ ;\ x - \dfrac{x^2}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqslant x$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;n]$

Donc : $\dfrac{x}{n} \in [0;1]$

Donc : $1 + \dfrac{x}{n} \in [1;2]$

On pose $t = \dfrac{x}{n}$

On a : $1 + t \in [1;2]$

Donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$2 - (1+t) \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$$

Donc : $1 - t \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$

$$\int_0^{\frac{x}{n}} (1-t)\,dt \leqslant \int_0^{\frac{x}{n}} \frac{1}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^{\frac{x}{n}} 1\,dt \quad \left(0 \leqslant \frac{x}{n}\right)$$

$$\left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{x}{n}} \leqslant \Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{x}{n}} \leqslant \Big[t\Big]_0^{\frac{x}{n}}$$

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leqslant \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n}$$

Donc : $x - \dfrac{x^2}{2n^2} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqslant x$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\big(\forall x \in [0;n]\big)\ ;\ x - \dfrac{x^2}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqslant x$

$\boxed{3}$-a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \leqslant \displaystyle\int_0^n e^{-x}\,dx.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après la question precédente : $\big(\forall x \in [0;n]\big)\ ;\ n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqslant x$

Donc : $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant x$

Donc : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x$

Donc : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leqslant e^x e^{-2x}$

Donc : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leqslant e^{-x}$

Donc: $\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx \leqslant \int_0^n e^{-x}dx$

D'où: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n \leq \int_0^n e^{-x}dx$.

b. Montrons que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}dx \leq u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0;n]$

On a, d'après le résultat de la question 2.b: $x-\frac{x^2}{2n} \leq \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Donc: $e^{x-\frac{x^2}{2n}} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Donc: $e^{-2x}.e^{x-\frac{x^2}{2n}} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$

Donc: $e^{-x-\frac{x^2}{2n}} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$

Donc: $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}dx \leqslant \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$

Donc: $\int_0^n e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx \leqslant u_n$ $\boxed{1}$

D'autre part: (D'après la relation de Chasles)

$$\int_0^n e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx = \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx + \int_{\sqrt[3]{n}}^n e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx$$

Et puisque: $\sqrt[3]{n}\leqslant n$ et $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}>0$

Alors, on aura: $\int_0^n e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx \geqslant \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx$ $\boxed{2}$

Et on a: $0\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{n} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{n}^2 \leqslant -x^2 \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt[3]{n}^2}{2n} \leqslant -\frac{x^2}{2n} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} \leqslant -\frac{x^2}{2n} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \leqslant e^{-\frac{x^2}{2n}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}.e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \leqslant e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}.e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}dx \leqslant \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}dx \leqslant \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}dx$$

Donc, d'après $\boxed{2}$, on aura : $\int_0^n e^{-x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}} dx \geqslant e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx$

Et d'après $\boxed{1}$, on aura : $u_n \geqslant e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx \leqslant u_n$

c- Déduisons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

On a, d'après les résultats précédents ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \ e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx \leqslant u_n \leqslant \int_0^n e^{-x} dx.$$

Et : $\begin{cases} e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx = e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \left[-e^{-x}\right]_0^{\sqrt[3]{n}} = e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \left(1 - e^{-\sqrt[3]{n}}\right) \\ \int_0^n e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = 1 - e^{-n} \end{cases}$

Et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \left(1 - e^{-\sqrt[3]{n}}\right) = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\sqrt[3]{n}} = 0$

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n} = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$

Donc, d'après les critères de convergence, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Et par suite, la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

$\boxed{4}$- Soit $\alpha \in]0;1[$

a- Montrons que : $\int_\alpha^1 n (f(x))^n dx \leqslant n(1-\alpha)(f(\alpha))^n$

On a f est strictement décroissante sur $[0;1]$

Donc elle est sur l'intervalle $[\alpha;1]$

Soit $\alpha \leqslant x \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
\alpha \leqslant x \leqslant 1 &\Rightarrow f(\alpha) \geqslant f(x) \\
&\Rightarrow (f(\alpha))^n \geqslant (f(x))^n \quad (\text{car } \forall x \in [0;1] ; f(x) > 0) \\
&\Rightarrow n (f(\alpha))^n \geqslant n (f(x))^n \\
&\Rightarrow \int_\alpha^1 n (f(\alpha))^n dx \geqslant \int_\alpha^1 n (f(x))^n dx \quad (\text{car } \alpha \leqslant 1) \\
&\Rightarrow n (f(\alpha))^n \int_\alpha^1 1 dx \geqslant \int_\alpha^1 n (f(x))^n dx \\
&\Rightarrow n (f(\alpha))^n [x]_\alpha^1 \geqslant \int_\alpha^1 n (f(x))^n dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n(1-a)(f(a))^n \geq \int_a^1 n(f(x))^n\,dx$$

D'où : $\int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leq n(1-a)(f(a))^n$

b. Déduisons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n(f(x))^n\,dx = 0$

Démontrons d'abord le résultat suivant :

Soit $0<q<1$

On a $\lim nq^n = 0$

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n = \lim_{n\to+\infty} n\,e^{\ln q^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\,e^{n\ln q}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln q}\left(n\ln q\, e^{n\ln q}\right)$$

On pose $x = n\ln q$

Si $n\to+\infty$

Alors $x\to-\infty$ (car : $\ln q<0$)

Donc, on aura : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln q}\left(n\ln q\, e^{n\ln q}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln q}\cdot x e^x = 0$

On a f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Soit $0<a<1$

$0<a<1 \Rightarrow f(1)<f(a)<f(0)$

$\Rightarrow 0<f(a)<1$ (car $f(1)>0$ et $f(0)=0$)

Donc, d'après le résultat precedent : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(f(a))^n = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-a)(f(a))^n = 0$

Et puisque : $\int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leq n(1-a)(f(a))^n$

et $\int_a^1 n(f(x))^n\,dx \geq 0$ (car $0<a<1$ et $(\forall x\in[a\,;1])\,;(f(x))^n\geq 0)$

Alors : $0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leq n(1-a)(f(a))^n$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n(f(a))^n = 0$

Alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{a}^{1} n(f(x))^{n}\,dx = 0$

c- Calculons: $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{0}^{a} n(f(x))^{n}\,dx$

On a : $\int_{0}^{a} n(f(x))^{n}\,dx = \int_{0}^{1} n(f(x))^{n}\,dx + \int_{1}^{a} n(f(x))^{n}\,dx$

$= \int_{0}^{1} n(f(x))^{n}\,dx - \int_{a}^{1} n(f(x))^{n}\,dx$

$= u_n - \int_{a}^{1} n(f(x))^{n}\,dx$

Et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{a}^{1} n(f(x))^{n}\,dx = 0$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{0}^{a} n(f(x))^{n}\,dx = 1$

Exercice7: 2006 Ordinaire — 9,00 points

Première partie

Dans cette partie, n est un entier tel que : $n \geq 3$

On considère la fonction numérique g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g_n(x) = nx + 2\ln x.$$

1. Dresser le tableau de variations de g_n

2. Montrer que : $(\forall x > 0)\ ;\ \sqrt{x} > \ln x$.

3. a. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

Deuxième partie

I. Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot e^{-x}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend : $\|\vec{i}\| = 3cm$)

1. Étudier la dérivabilité de f en 0 à droite, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$ $\odot$

   b. Dresser le tableau de variations de f.

4. Représenter la courbe (C_f) (On prend $f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0,5$)

II. On pose : $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$

1. a. Montrer que : $f(I) \subset I$

   b. En utilisant la relation $\odot$, montrer que : $(\forall x \in I)\ ;\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

   c. Montrer que : $(f(x) = x \text{ et } x > 0) \Leftrightarrow x = \alpha_3$

   (α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$ définie dans la première partie.)

2- Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n\in I$.

b- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

c- En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

d- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

III- Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{8x}f(t)\,dt$.

1- a- Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$

b- Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$, puis en déduire les variations de F

2- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ 0\leq F(x)\leq 2(1-e^{-7x})f(x)$

b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

c- Dresser le tableau de variations de F

REPONSE

Première partie

Soit $n\in[\![3;+\infty[\![$ et $g_n(x)=nx+2\ln x$.

1- Le tableau de variations de g_n :

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}g_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}nx+2\ln x=-\infty$ (Car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}nx+2\ln x=+\infty$ Car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}nx=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$

Calculons $g_n'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$

On a g_n est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

(Somme des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$)

Soit $x\in]0;+\infty[$

$g_n'(x)=(nx+2\ln x)'=n+\frac{2}{x}$

Donc : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g_n'(x)=n+\frac{2}{x}$

On a : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g_n'(x)>0$

Donc g_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

2) – Montrons que : $(\forall x>0)\ ;\ \sqrt{x}>\ln x$

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\sqrt{x}-\ln x$

On a h est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$$h'(x)=(\sqrt{x}-\ln x)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$
$$=\frac{x-4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

Donc : $(\forall x>0)\ ;\ h'(x)=\dfrac{x-4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$

Puisque : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)>0$

Alors le signe de $h'(x)$ est le signe de $x-4$

x		4	
$x-4$	$-$	0	$+$

Donc :

x	0		4		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	

$h(4)=2-2\ln 2$

Remarque

On a : $2<e \Leftrightarrow \ln 2<1$
$\Leftrightarrow 2-2\ln 2>0$

On a : $2-2\ln 2$ est la valeur minimale de h sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc : $(\forall x>0)\ ;\ h(x)\geq 2-2\ln 2$

Et puisque : $2-2\ln 2>0$

Alors : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ h(x)>0$

D'où : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ \sqrt{x}>\ln x$

3) – a – Montrons que l'équation $g_n(x)=0$ admet une solution unique α_n sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

On a g_n est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc g_n est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $g_n(]0;+\infty[)$

$g_n(]0;+\infty[)=]\lim_{x\to 0^+} g_n(x);\lim_{x\to+\infty} g_n(x)[$
$=]-\infty;+\infty[$

Et puisque $0\in]-\infty;+\infty[$

Alors : $\exists!\alpha_n\in]0;+\infty[\ ;\ g_n(\alpha_n)=0$

Pour montrer que : $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

il suffit de vérifier que : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)\cdot g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<0$

On a : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=n\cdot\frac{1}{n}+2\ln\left(\frac{1}{n}\right)=1-2\ln n$

On a : $n\geqslant 3\Rightarrow n>e$
$\Rightarrow \ln n>1$
$\Rightarrow 1-2\ln n<0$

Donc : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$ ⊛

On a : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
$=\sqrt{n}-2\cdot\frac{1}{2}\ln n$
$=\sqrt{n}-\ln n$

Et d'après le résultat de la question 2

On a : $(\forall x>0)\ ;\ \sqrt{x}>\ln x$

Et puisque : $n\in]0;+\infty[$

Alors : $\sqrt{n}-\ln n>0$

Donc : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>0$ ⊛⊛

D'après ⊛ et ⊛⊛, on aura : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)\cdot g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<0$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

on aura bien : $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

b- Déduisons $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$

D'après la question précédente, on a : $\forall n\in[\![3;+\infty[\![\ ;\ \frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

Et puisque : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Alors, d'après le théorème des gendarmes, on aura bien $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

Deuxième partie

I- Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot e^{-x}$

1 ~ Étudions la dérivabilité de f en 0 à droite.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}.e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}.e^{-x}}{\sqrt[3]{x}^3}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}^2}$$
$$=+\infty$$

D'où f n'est pas dérivable en 0 à droite

Interprétation géométrique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $O(0;0)$ (Dirigée vers le haut)

2 ~ Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}.e^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(e^{3x})^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{3x}}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{3x}{e^{3x}}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{\frac{e^{3x}}{3x}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

On pose $t=3x$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to+\infty$

Donc, on aura $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{\frac{e^{3x}}{3x}}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{\frac{e^{t}}{t}}\right)^{\frac{1}{3}}=0$ (Car $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=0$)

D'où : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Interprétation géométrique

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Donc, l'axe des abscisse $(y=0)$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

3 - a - Montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ ⊙

On a f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x}.e^{-x}\right)' \\ &= \left(\sqrt[3]{x}\right)'.e^{-x} + \sqrt[3]{x}\left(e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}e^{-x} - \sqrt[3]{x}.e^{-x} \\ &= \frac{e^{-x} - 3x.e^{-x}}{3\sqrt[3]{x}^2} \\ &= \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x}^2}.e^{-x} \\ &= \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x}^2.\sqrt[3]{x}}.\sqrt[3]{x}.e^{-x} \\ &= \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x) \end{aligned}$$

D'où : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ ⊙

b - Le tableau de variations de f

Étudions le signe de $f'(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$

On a : $\frac{f(x)}{3x} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-3x$

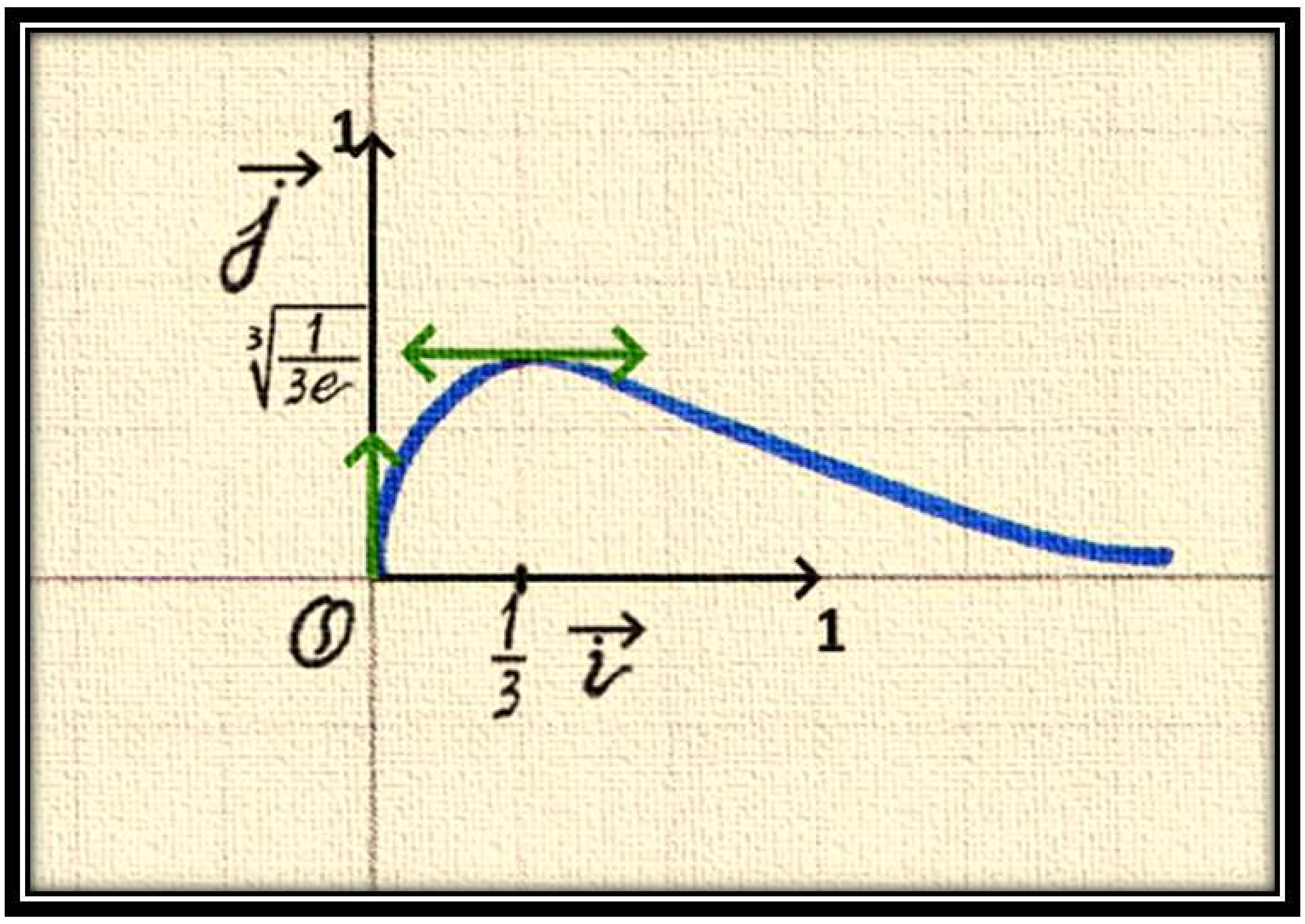
- $1-3x=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{3}$
- $1-3x>0 \Longleftrightarrow x<\frac{1}{3}$
- $f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.e^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3e}}$

x		$\frac{1}{3}$	
$1-3x$	+	0	−

D'où :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[3]{\frac{1}{3e}}$	↘	0

4 ~ Construction de (C_f).



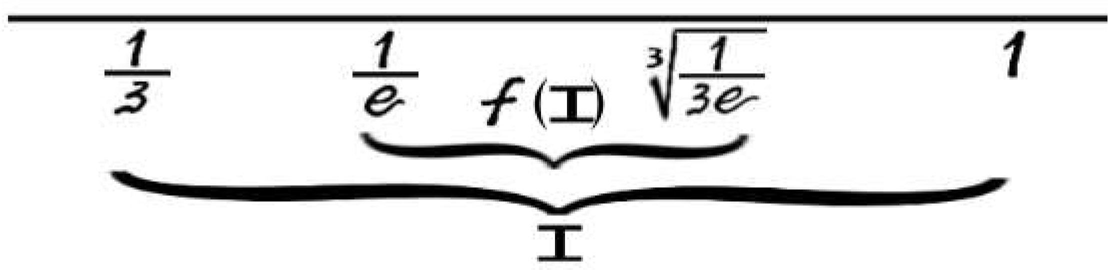
II ~ On pose : $I = \left[\frac{1}{3} ; 1\right]$

1 ~ a ~ Montrons que : $f(I) \subset I$

On a f est continue et strictement décroissante sur I

Donc : $f(I) = f\left(\left[\frac{1}{3} ; 1\right]\right) = \left[f(1) ; f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[\frac{1}{e} ; \sqrt[3]{\frac{1}{3e}}\right]$

On a : $\begin{cases} 3 > e \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{3} \\ 3e > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3e}} < 1 \end{cases}$



D'où : $f(I) \subset I$

b ~ Montrons que : $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leqslant \frac{2}{3}$

Soit $x \in I$

On a : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x) = -\frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{x}\right) f(x)$

Donc : $|f'(x)| = \left|\frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{x}\right) f(x)\right|$

On a : $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant -1$

$\Leftrightarrow 3 - 3 \leqslant 3 - \frac{1}{x} \leqslant 3 - 1$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 3 - \frac{1}{x} \leqslant 2$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{2}{3}$

Et puisque : $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$ car : $f(I) \subset I$

Alors : $0 \leqslant \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{x}\right) f(x) \leqslant \frac{2}{3}$

Donc : $0 \leqslant -f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$

D'où : $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leqslant \frac{2}{3}$

c ~ Montrons que : $(f(x) = x \text{ et } x > 0) \Leftrightarrow x = \alpha_3$

Soit $x>0$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \sqrt[3]{x}.e^{-x}=x \text{ et } x>0 \\ &\iff e^{-x}=x^{\frac{2}{3}} \text{ et } x>0 \\ &\iff -x=\frac{2}{3}\ln x \text{ et } x>0 \\ &\iff 2\ln x+3x=0 \text{ et } x>0 \\ &\iff g_3(x)=0 \text{ et } x>0 \\ &\iff x=\alpha_3 \end{aligned}$$

D'où : $(f(x)=x \text{ et } x>0) \iff x=\alpha_3$

$\boxed{2}$ On pose : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ u_{n+1}=f(u_n), n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\in I$

Initialisation

Pour $n=0$

On a : $u_0=\frac{1}{3}$

Donc $u_0\in I$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $u_n\in I$

Montrons que : $u_{n+1}\in I$

On a : $u_n\in I$ (D'après la supposition)

Et puisque : $f(I)\subset I$

Alors : $f(u_n)\in I$

Donc : $u_{n+1}\in I$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\in I$

b) Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha_3|\leqslant\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

On a f est dérivable sur l'intervalle I

Et : $(\forall x\in I)$; $|f'(x)|\leqslant\frac{2}{3}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall(x;y)\in I^2$; $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{2}{3}|x-y|$

Et puisque : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\in I$ et $\alpha_3\in I$

Alors : $|f(u_n)-f(\alpha_3)|\leqslant\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

Donc : $|u_{n+1}-\alpha_3|\leqslant\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$ car $u_{n+1}=f(u_n)$ et $f(\alpha_3)=\alpha_3$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_{n+1}-\alpha_3|\leqslant\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

c- Déduisons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_n-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ - Par récurrence -

Pour $n=0$

Vérifions que : $|u_0-\alpha_3|\leqslant\frac{2}{3}$

On a : $\frac{1}{3}\leqslant\alpha_3\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$ (car : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$)

Donc : $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant-\alpha_3\leqslant-\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{1}{3}-\alpha_3\leqslant0$

Donc : $\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant u_0-\alpha_3\leqslant0$

Donc : $|u_0-\alpha_3|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\leqslant1-\frac{1}{3}\leqslant\frac{2}{3}$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $|u_n-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Montrons que : $|u_{n+2}-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

On a : $|u_n-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ (D'après la supposition)

Donc : $\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

Et puisque : $|u_{n+1}-\alpha_3|\leqslant\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

(D'après le résultat de la question précédente)

Alors : $|u_{n+1}-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_n-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

d- Montrons que la suite (u_n) est convergente.

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_n-\alpha_3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$ (car $-1<\frac{2}{3}<1$)

Alors, d'après les critères de convergence, on aura : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha_3$.

III - Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{8x}f(t)\,dt$.

$\boxed{1}$ - a - Montrons que F est dérivable sur $[0;+\infty[$

On a f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Donc f est continue sur l'intervalle $[0;8x]$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

Donc f admet une fonction primitive φ sur $[0;8x]$

Donc φ est dérivable sur $[0;8x]$ et : $\forall t\in[0;8x]\,;\ \varphi'(t)=f(t)$

On a : $F(x)=\int_x^{8x} f(t)\,dt$

$=[\varphi(t)]_x^{8x}$

$=\varphi(8x)-\varphi(x)$

Et puisque $8x>0$ (car $x>0$)

Alors : $x\longmapsto\varphi(8x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

(comme étant composée des fonctions dérivables)

Donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$)

b- Calculons $F'(x)$, pour tout $x\in[0;+\infty[$

On a F est dérivable sur $[0;+\infty[$

Soit $x\in[0;+\infty[$

On a $F(x)=\varphi(8x)-\varphi(x)$

Donc : $F'(x)=(8x)'\varphi'(8x)-\varphi'(x)$

$=8f(8x)-f(x)$

$=8\sqrt[3]{8x}\,e^{-8x}-\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$

$=16\sqrt[3]{x}\,e^{-8x}-\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$

$=(16e^{-7x}-1)\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$

$=(16e^{-7x}-1)f(x)$

Donc : $\forall x\in[0;+\infty[\,;\ F'(x)=(16e^{-7x}-1)f(x)$

Puisque : $\forall x\in[0;+\infty[\,;\ f(x)\geqslant 0$

~~Al~~ Alors le signe de $F'(x)$ est le signe de $(16e^{-7x}-1)$

$16e^{-7x}-1=0 \Longleftrightarrow e^{-7x}=\frac{1}{16}$

$\Longleftrightarrow -7x=-\ln 16$

$\Longleftrightarrow x=\frac{\ln 16}{7}$

$16e^{-7x}-1>0 \Longleftrightarrow e^{-7x}>\frac{1}{16}$

$\Longleftrightarrow -7x>-\ln 16$

$\Longleftrightarrow x<\frac{\ln 16}{7}$

D'où F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\ln 16}{7};+\infty\right[$

et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\ln 16}{7}\right]$

$\boxed{2}$ a- Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ 0\leqslant F(x)\leqslant 2(1-e^{-7x})f(x)$

Soient $x\in[0;+\infty[$ et $t\in[x;8x]$

On a: $\forall t\in[x;8x];f(t)\geqslant 0$

Donc: $\int_x^{8x} f(t)dt\geqslant 0$

Donc: $\forall x\in[0;+\infty[\ ;F(x)\geqslant 0$ $\boxed{1}$

On a: $t\leqslant 8x \Rightarrow \sqrt[3]{t}\leqslant 2\sqrt[3]{x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{t}\,e^{-t}\leqslant 2\sqrt[3]{x}\,e^{-t}$

$\Rightarrow \int_x^{8x}\sqrt[3]{t}\,e^{-t}dt\leqslant \int_x^{8x}2\sqrt[3]{x}\,e^{-t}dt$ $(x\leqslant 8x)$

$\Rightarrow F(x)\leqslant 2\sqrt[3]{x}\left[-e^{-t}\right]_x^{8x}$

$\Rightarrow F(x)\leqslant 2\sqrt[3]{x}\left(e^{-x}-e^{-8x}\right)$

$\Rightarrow F(x)\leqslant 2\left(1-e^{-7x}\right)\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$

$\Rightarrow F(x)\leqslant 2\left(1-e^{-7x}\right)f(x)$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}^+);F(x)\leqslant 2(1-e^{-7x})f(x)$ $\boxed{2}$

Et d'après $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on aura: $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ 0\leqslant F(x)\leqslant 2(1-e^{-7x})f(x)$

c- Déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

D'après le résultat de la question précédente, on a:

$(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ 0\leqslant F(x)\leqslant 2(1-e^{-7x})f(x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2(1-e^{-7x})f(x)=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}2(1-e^{-7x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{(e^x)^7}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (D'après I-2)

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

c- Le tableau de variations de F

x	0		$\frac{\ln 16}{7}$		$+\infty$
$F'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	$\searrow$	0

Exercice8: 2006 Rattrapage -1- 3,00 points

1 - Montrer que : $\forall t\in\mathbb{R}\,;\ \dfrac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{t}{3+t^2}+\dfrac{1}{3+t^2}$

2 - Montrer que : $\forall \alpha\in\mathbb{R}\,;\ \displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{1}{3+t^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$

3 - On considère la fonction numérique F définie sur $[0;\pi]$ par :

$$F(x)=\int_0^{x}\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du.$$

a - Montrer que F est dérivable sur $[0;\pi]$

b - En utilisant le changement de variable $t=\tan\frac{u}{2}$,

montrer que : $\forall x\in[0;\pi]\,;\ F(x)=2\displaystyle\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt$

(On rappelle que : $\cos u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin u=\dfrac{2t}{1+t^2}$

avec $t=\tan\frac{u}{2}$ et $u\in[0;\pi[$)

c - En utilisant les questions 1 et 2, montrer que :

$$\forall x\in[0;\pi[\,;\ F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

d - En utilisant la continuité de F, montrer que :

$$\int_0^{\pi}\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du=\ln 3+\frac{\pi}{3}$$

REPONSE

1 - Montrons que : $\forall t\in\mathbb{R}\,;\ \dfrac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{t}{3+t^2}+\dfrac{1}{3+t^2}$

Soit $t\in\mathbb{R}$

On a
$$\frac{t}{1+t^2}-\frac{t}{3+t^2}+\frac{1}{3+t^2}=\frac{t(3+t^2)-t(1+t^2)+1+t^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$=\frac{3t+t^3-t-t^3+1+t^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$=\frac{t^2+2t+1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

D'où : $\forall t\in\mathbb{R}\,;\ \dfrac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{t}{3+t^2}+\dfrac{1}{3+t^2}$

2 - Montrons que : $\forall \alpha \in \mathbb{R} ; \int_0^{\alpha} \frac{1}{3+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

On a : $\int_0^{\alpha} \frac{1}{3+t^2} dt = \int_0^{\alpha} \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} dt$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\alpha} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$$

D'où : $\forall \alpha \in \mathbb{R} ; \int_0^{\alpha} \frac{1}{3+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$

3 - On pose : $F(x) = \int_0^{x} \frac{1+\sin u}{2+\cos u} du$ avec $x \in [0;\pi]$

a - Montrons que est dérivable sur $[0;\pi]$

Soit $x \in [0;\pi]$

On a : $2+\cos x \geqslant 1$

Donc : $\forall x \in [0;\pi] ; 2+\cos x \neq 0$

Et puisque les deux fonctions : $x \mapsto 1+\sin x$ et : $x \mapsto 2+\cos x$ sont continues sur $[0;\pi]$

Alors : $x \mapsto \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$ est continue sur $[0;\pi]$

Donc : $x \mapsto \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$ admet une primitive F qui s'annule en 0

D'où F est dérivable sur $[0;\pi]$

Et : $\forall x \in [0;\pi] ; F'(x) = \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

b - À l'aide du changement de variable : $t = \tan \frac{u}{2}$

Montrons que : $\forall x \in [0;\pi] ; F(x) = 2\int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$

Soit $x \in [0;\pi]$

On pose : $t = \tan \frac{u}{2}$

Donc : $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Et on a : $t = \tan \frac{u}{2} \Leftrightarrow \frac{u}{2} = \operatorname{Arctan} t$

$\Leftrightarrow u = 2 \operatorname{Arctan} t$.

$$\Leftrightarrow du=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Si : $u=0$

Alors : $t=\tan 0=0$

Si : $u=x$

Alors : $t=\tan\frac{x}{2}$

On a : $\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}=\dfrac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{(1+t)^2}{3+t^2}$

Donc : $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1+\sin u}{2+\cos u}du$

$$=\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{3+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

D'où : $F(x)=2\displaystyle\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$

c- Montrons que :

$$\forall x\in[0;\pi[\ ;\ F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

D'après le résultat de la question $\boxed{1}$, on aura :

$$F(x)=2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

$$=2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{t}{3+t^2}+\frac{1}{3+t^2}\right)dt$$

$$=2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{t}{1+t^2}dt-2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{t}{3+t^2}dt+2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{1}{3+t^2}dt$$

$$=\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{2t}{1+t^2}dt-\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{2t}{3+t^2}dt+2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{1}{3+t^2}dt$$

$$=\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)}dt-\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(3+t^2)'}{(3+t^2)}dt+2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{1}{3+t^2}dt$$

$$=\Big[\ln|1+t^2|\Big]_0^{\tan\frac{x}{2}}-\Big[\ln|3+t^2|\Big]_0^{\tan\frac{x}{2}}+2\,\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - \ln 1 - \left(\ln\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right) - \ln 3\right)$$

$$= \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

D'où : $\forall x \in [0;\pi[$; $F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$

d) Montrons que : $\int_0^{\pi} \frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du = \ln 3 + \frac{\pi}{3}$

On a F est continue sur l'intervalle $[0;\pi]$

car elle est dérivable sur $[0;\pi]$

En particulier F est continue en π à gauche.

Donc : $\lim\limits_{x\to\pi^-} F(x) = F(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du$

Or $\lim\limits_{x\to\pi^-} F(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)\right)$

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\boxed{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \tan t = +\infty}$$

Si : $x \longrightarrow \pi^-$

Alors : $t \longrightarrow +\infty$

Donc, on aura :

$$\lim\limits_{x\to\pi^-} F(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+t^2}{3+t^2}\right)\right)$$

Et puisque : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{3+t^2}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{3}{t^2}+1}\right) = 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to\pi^-} F(x) = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

D'où : $\int_0^{\pi} \frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Exercice9: 2006 Rattrapage -2- | 3,00 points

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel superieur ou égal à 2

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\frac{x}{n}-e^{-nx}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$

   b. Étudier les branches infinies de la courbe (C_n)

2. Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f_n

3. a. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}$

   b. Montrer que : $f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$

   c. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $e^x\geqslant x+1$. En deduire que : $f_n(1)>0$

   d. Montrer que : $\frac{1}{n}<\alpha_n<1$

4. Representer la courbe (C_2) (On prendra $\alpha_2\simeq 0,6$)

5. a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$; $f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n}-\frac{1}{n}-1\right)$

   b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$; $f_{n+1}(\alpha_n)\geqslant 0$

   c. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

   En déduire que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

6. a. En utilisant la question 3, montrer que :

   $\forall n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$; $\frac{1}{n^2}<e^{-n\alpha_n}<\frac{1}{n}$

   b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$; $\frac{\ln n}{n}<\alpha_n<2\frac{\ln n}{n}$

   c. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$

REPONSE

Soit $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$

1. a. Calculons $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n}-e^{-nx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n}-\frac{1}{(e^x)^n}=+\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty\right)$$

$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{n} - e^{-nx} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{n} - \frac{1}{(e^x)^n} = -\infty$ (car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$)

b) Étudions les branches infinies de (C_n)

Au voisinage de $+\infty$

Remarque et astuce

Si : $f(x) = ax + b + h(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$
Alors la droite (Δ) d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞

Si : $\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0$
Alors la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞

On a : $\lim_{x\to+\infty} \left(f_n(x) - \frac{x}{n}\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{(e^x)^n} = 0$

Donc, la droite (Δ_n) d'équation $y = \frac{1}{n}x$ est une asymptote oblique à (C_n) au voisinage de $+\infty$

Remarque

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(f_n(x) - \frac{x}{n}\right) = -\frac{1}{(e^x)^n} < 0$
Donc, la courbe (C_n) est au dessous de la droite (Δ_n)

Au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$

Calculons $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{n} - e^{-nx}}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{n} + n.\frac{e^{-nx}}{-nx}$$

On pose : $t = -nx$

Si : $x \to -\infty$

Alors : $t \to +\infty$

Donc, on aura : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{n} + n.\frac{e^t}{t} = +\infty$ (car $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$)

D'où la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$\boxed{2}$ - Calculons $f'_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'_n(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n} - (-nx)' e^{-nx} = \frac{1}{n} + n e^{-nx}$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'_n(x) = \frac{1}{n} + n e^{-nx}$

Le tableau de variations de f_n.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(\frac{1}{n} > 0 \text{ et } n e^{-nx} > 0\right)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'_n(x) > 0$

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'_n(x)$	$+$
$f_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$\boxed{3}$ - a - Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

On a f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et $f_n(\mathbb{R}) = f_n(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$

Et puisque : $0 \in]-\infty;+\infty[$

Alors : $\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}$; $f_n(\alpha_n) = 0$

b - Montrons que : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$

On a : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - e^{-1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}$

On a : $n \geqslant 2 \Rightarrow n^2 \geqslant 4 > e$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$

$\Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

D'où : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

c) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x \geq x+1$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=e^x-x-1$

On a h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Somme des fonctions dérivables)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$h'(x)=(e^x-x-1)'=e^x-1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $h'(x)=e^x-1$

- $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$
- $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$

Donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tableau de variations de h, on a 0 est la valeur minimale de h sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) \geq 0$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x \geq x+1$

Déduisons que : $f_n(1)>0$

D'après le résultat précédent, on aura : $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x > x$

On prend : $x=n$ avec $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$

On aura : $e^n > n \Leftrightarrow \frac{1}{n} > e^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - e^{-n} > 0 \Leftrightarrow f_n(1)>0$

D'où : $f_n(1)>0$

d) Montrons que : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$

On a f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc elle admet une fonction réciproque f_n^{-1} définie sur l'intervalle : $J = f_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} J &= f_n(\mathbb{R}) \\ &= f_n(]-\infty;+\infty[) \\ &= \left]\lim_{x\to-\infty} f_n(x) ; \lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[\\ &=]-\infty;+\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

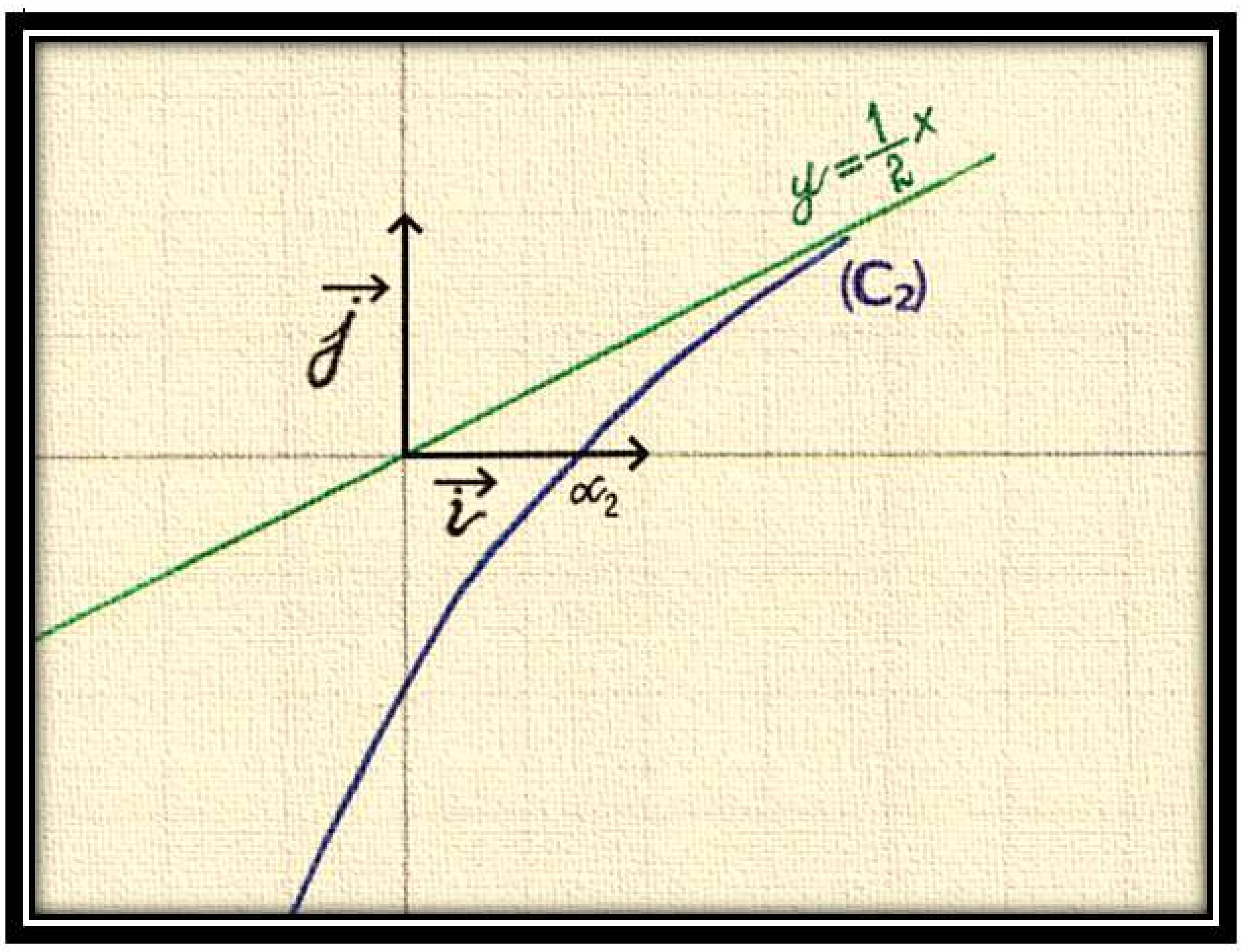
Et on a f_n^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Et puisque : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 < f_n(1)$

Alors : $f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) < f_n^{-1}(0) < f_n^{-1}\left(f_n(1)\right)$

D'où : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

$\boxed{4}$- Représentation de (C_2)



$\boxed{5}$- a- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On a : $f_n(\alpha_n) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha_n}{n} - e^{-n\alpha_n} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_n = n e^{-n\alpha_n}$

On a : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$

$$= \frac{n e^{-n\alpha_n}}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$= \frac{n}{n+1} e^{-(n+1)\alpha_n}\left(e^{\alpha_n} - \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$$

Donc : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$

b- Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

D'après le résultat de la question 3- d, on a : $\alpha_n > \frac{1}{n}$

Donc : $e^{\alpha_n} > e^{\frac{1}{n}}$

Donc : $e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 > e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1$

Et puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x \geqslant x + 1$

(D'après le résultat de la question 3- c)

Alors : $e^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}-1\geqslant 0$

Donc : $e^{\alpha_n}-\frac{1}{n}-1>0$

Et puisque : $\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}>0$

Alors : $\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n}-\frac{1}{n}-1\right)>0$

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\,;\, f_{n+1}(\alpha_n)\geqslant 0$

c- Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

On sait que : $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$

Et d'après le résultat de la question précédente, on aura :

$f_{n+1}(\alpha_n)\geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Et puisque f_{n+1} est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

et f_{n+1}^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Alors : $f_{n+1}(\alpha_n)\geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})\Longleftrightarrow f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_n))\geqslant f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_{n+1}))$

$\Longleftrightarrow \alpha_n\geqslant\alpha_{n+1}$

D'où $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite décroissante.

Déduisons que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

D'après le résultat de la question 3-d, on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\,;\,\frac{1}{n}<\alpha_n<1$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\,;\,\alpha_n>0$

Donc $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée par 0

Et puisque $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante

Alors $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

6- a- Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\,;\,\frac{1}{n^2}<e^{-n\alpha_n}<\frac{1}{n}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

D'après le résultat de la question 3-d, on a : $\frac{1}{n}<\alpha_n<1$

Donc : $\frac{1}{n^2}<\frac{\alpha_n}{n}<\frac{1}{n}$

Et puisque : $\frac{\alpha_n}{n}=e^{-n\alpha_n}$ (car $\frac{\alpha_n}{n}-e^{-n\alpha_n}=0$)

Alors : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

b- Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < 2\frac{\ln n}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

D'après le résultat de la question précédente on a : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

Et puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Alors : $\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < -n\alpha_n < \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc : $-2\ln n < -n\alpha_n < -\ln n$

Donc : $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < 2\frac{\ln n}{n}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < 2\frac{\ln n}{n}$

c- Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

D'après le résultat de la question précédente,

on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < 2\frac{\ln n}{n}$

Et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Alors, d'après les critères de convergence, on aura : $\lim \alpha_n = 0$

اللَّهُمَّ أَطْعِمْ أُمِّي وَأَبِي مِنَ الجَنَّةِ، وَأَرِهِمْ مَكَانَهُمْ
مِنَ الجَنَّةِ، وَقُلْ لَهُمْ ادخُلُوا مِنْ أَيِّ بَابٍ تَشَاؤُونَ

اللَّهُمَّ صَلِّ وَسَلِّمْ عَلَى سَيِّدِنَا مُحَمَّد
صَلَاةً تَحِلُّ بِهَا عُقْدَتِي، وَتُفَرِّجُ بِهَا كُرْبَتِي،
وَتَمْحُو بِهَا خَطِيئَتِي، وَتَقْضِي بِهَا حَاجَتِي

بقلم الأستاذ : البشير الحجاجي

نسألكم الدعاء