

les **Séries**
d'Exercices



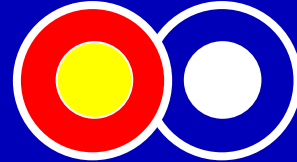
**Nouvelle
édition**

Revue et corrigée

*+ Groupe WhatsApp pour
Discuter les difficultés*



**Dérivation
Fonctions**



2 **OUARZAZATE 2023**

101 Exercices

Badr Eddine EL FATIHI

Bac SM

**MATHS
2023**

*Badr Eddine EL FATIHI
00212660344136
Professeurbadr.blogspot.com
Ouarzazate 2023*



SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2022-2023

Tome 3 : Dérivation et étude de fonctions

- **Dérivabilité en un point, sur un intervalle**
- **Approximation affine d'une fonction**
- **Théorème de Rolle**
- **Théorème des accroissements finis**
- **Variations d'une fonction numérique**
- **Branches infinies d'une courbe d'une fonction**
- **Concavité d'une fonction numérique**
- **Travailler avec la règle de l'Hôpital**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2022

Dimanche 15 Août 2022



1 : Préface

Ce livre est un support d'exercices corrigés conçu en faveur des élèves de la 2ème année Bac SM du Maroc. J'ai y classé 101 exercices pour la leçon intitulée Dérivation et étude de fonctions. Les exercices proposés sont riches, variés et contiennent tout type de questions. C'est une plate-forme de travail pour les élèves qui auraient besoin d'un supplément de soutien très particulier. dans ce cadre, l'élève est invité à choisir le type d'exercices là où il se sent faible et de prendre son temps pour renforcé ses apprentissages. Mon objectif est d'aider ces élèves à parvenir à un niveau qui leurs permettrait de passer les devoirs, les examens et tout type de concours d'admission pour les écoles supérieurs avec succès.

Cette série contient entre autre un rappel de cours, les énoncés des exercices et les réponses détaillées qu'on devrait lire attentivement et en profiter au maximum les idées de résolution. J'ai classé dedans encore des moyens et des méthodes hors programme juste pour élargir son équilibre de connaissances. Sachez que, dans les concours d'admission et même dans les examens, la réponse finale compte plus que la méthode suivie. La vitesse de réalisation est aussi importante car vous serez certainement serrés par le temps. D'ailleurs les concours sont formulés sous la forme de questions à choix multiple. Bon courage à tout le monde et à bientôt 😊

2 : Méthodologie du travail

- Considérer d'abord une séance d'exercice comme un jeu, car Apprendre par le jeu est le meilleur moyen existant de nos jours
- Choisir le type d'exercices voulu
- Lisez la question et essayer de trouver la réponse en 10 min en consultant de temps à autre le rappel de cours
- Consulter ma réponse sur ce livre
- Notez les lacunes et difficultés rencontrées
- Retourner pour refaire l'exercice à nouveau
- Passer à un autre exercice

3 : Rappel de cours

Outil N° 1 :

Dérivabilité en un point :

- f est dérivable en x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

- f est dérivable à droite en x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$$

- f est dérivable à gauche en x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$$

- f est dérivable en x_0

$$\Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Outil N° 2 :

Interprétation géométrique de la dérivation

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l \in \mathbb{R}$

(C_f) admet une tangente (Δ) en x_0
 \Leftrightarrow Avec $(\Delta) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l \in \mathbb{R}$

(C_f) admet une demi-tangente (Δ)
 \Leftrightarrow à droite en x_0
Avec $(\Delta) : y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l \in \mathbb{R}$

(C_f) admet une demi-tangente (Δ)
 \Leftrightarrow à gauche en x_0
Avec $(\Delta) : y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \pm\infty$

$\Leftrightarrow (C_f)$ admet une demi-tangente (Δ)
verticale en x_0 Avec $(\Delta) : x = x_0$

Outil N° 3 :

L'approximation Affine d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 :

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Outil N° 4 :

Les principales approximations des fonctions classiques au voisinage de 0.

- $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

- $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

- $(1+x)^2 \approx 1 + 2x$

- $(1+x)^3 \approx 1 + 3x$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\blacksquare \sin x \approx x$$

$$\blacksquare \frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

$$\blacksquare \tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$$

Outil N° 5 :

Dérivabilité sur un intervalle :

$$f \text{ est dérivable sur } I \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \ ; \ \forall x_0 \in I \end{array} \right.$$

Outil N° 6 :

Tableau des dérivées classiques :

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\text{constante})' = 0$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (ax+b)' = a$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad ; \quad (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall r \in \mathbb{Q}_+^* \quad ; \quad (x^r)' = r x^{r-1}$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\blacksquare \forall x \notin \frac{\pi}{2}[\pi] \quad ; \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2(x)$$

$$\blacksquare \forall x \in]-1,1[\quad ; \quad (\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare \forall x \in]-1,1[\quad ; \quad (\text{Arccos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Outil N° 7 :

Opérations sur les fonctions dérivables :

$$\blacksquare (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\blacksquare (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\blacksquare \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\blacksquare (f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

Outil N° 8 :

La dérivabilité implique la continuité :

$$\blacksquare f \text{ est dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

Outil N° 9 :

Dérivation d'une composition :

$$\blacksquare \left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \text{ dérivable sur } I \\ g : J \mapsto g(J) \text{ dérivable sur } f(I) \\ f(I) \subseteq J \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & f(I) \subseteq J & \xrightarrow{g} & g(J) \\ & & \downarrow & & \uparrow \\ & & & & g \circ f \end{array}$$

Outil N° 10 :**Dérivation de la fonction inverse :**

- $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ f' \neq 0 \text{ sur } I \\ f \text{ est une bijection} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(I) \\ (f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})} \end{array} \right.$$

Outil N° 11 : TAF**Théorème des accroissements finis :****Égalité des accroissements finis :**

- $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists c \in]a, b[\text{ tel que :} \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = f'(c) \end{array} \right.$$

Inégalité des accroissements finis :

- $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ m \leq f'(x) \leq M ; \forall x \in]a, b[\end{array} \right.$

$$\Rightarrow m \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \leq M$$

Théorème de Rolle :

- $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists c \in]a, b[\text{ tel que :} \\ f'(c) = 0 \end{array} \right.$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 12 :**Monotonie d'une fonction :****1^{ère} Méthode :**

- $\left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ f \text{ est strictement croissante sur } I \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que :} \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{array} \right.$$

- $\left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ f \text{ est strictement décroissante sur } I \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que :} \\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y) \end{array} \right.$$

2^{ème} Méthode :

- $\left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ f \text{ est strictement croissante sur } I \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in I^2 ; \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) > 0$$

- $\left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ f \text{ est strictement décroissante sur } I \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in I^2 ; \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) < 0$$

3^{ème} Méthode :

- $\left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ f \text{ est strictement croissante sur } I \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I ; f'(x) > 0$$

- $\left| \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ f \text{ est strictement décroissante sur } I \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I ; f'(x) < 0$$

Outil N° 13 :

Axe et centre de symétrie :

- $\left| \begin{array}{l} (C_f) \text{ est symétrique} \\ \text{par rapport à } (\Delta) : x = a \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{array} \right.$$

- $\left| \begin{array}{l} (C_f) \text{ est symétrique} \\ \text{par rapport à } \Omega(a, b) \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{array} \right.$$

Outil N° 14 :

Périodicité d'une fonction numérique :

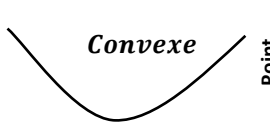
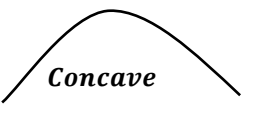
- f est T - périodique

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in D_f : \begin{cases} (x + T) \in D_f \\ (x - T) \in D_f \end{cases} \\ f(x + T) = f(x - T) = f(x) \end{array} \right.$$

Outil N° 15 :

Concavité d'une courbe d'une fonction :

Le tableau suivant résume la concavité d'une courbe d'une fonction numérique :

x	a	β	b
$f''(x)$	+	0	-
(C_f)		Point d'inflexion	

Outil N° 16 :

Branches infinies d'une courbe :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\Delta) : x = x_0 \text{ est une asymptote} \\ \text{verticale à la courbe } (C_f) \end{array} \right.$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\Delta) : y = b \text{ est une asymptote} \\ \text{horizontale à la courbe } (C_f) \end{array} \right.$$

- $\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (C_f) \text{ admet une branche parabolique} \\ \text{suivant l'axe des ordonnées } (Oy) \end{array} \right.$$

- $\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (C_f) \text{ admet une branche parabolique} \\ \text{suivant l'axe des abscisses } (Ox) \end{array} \right.$$

- $\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\Delta) : y = ax + b \text{ est une asymptote} \\ \text{Oblique à la courbe } (C_f) \end{array} \right.$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow (C_f)$ admet une branche parabolique suivant la droite $(\Delta) : y = ax$

Outil N° 17 :

Les fonctions primitives :

$$\blacksquare \left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ F : I \mapsto F(I) \\ F \text{ est primitive de } f \text{ sur } I \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I ; F'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

Outil N° 18 :

La condition d'existence d'une primitive :

$$\blacksquare f \text{ est continue sur } I \\ \Rightarrow f \text{ admet des primitives sur } I$$

Outil N° 19 :

Calcul d'une limite par la méthode du nombre dérivé :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x)_{/x=x_0} = f'(x_0)$$

Outil N° 20 :

Règle de l'Hôpital : hors programme bien évidemment, Mais vous devez la maîtriser pour sauver vos calculs au moins dans le brouillon dans un concours ou examen :

Règle de l'Hôpital :

$$\text{La forme } \left(\frac{0}{0} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque :

$$\text{La forme } \frac{\infty}{\infty} \text{ est valable aussi}$$

4 : Série d'exercices

Exercice N° 1 :

1) Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie ainsi :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie ci-dessus puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice N° 2 :

1) Étudier la dérivabilité en zéro de :

$$f(x) = 2x - \text{Arctan}\sqrt{x+1}$$

2) Étudier la dérivabilité en 3 de :

$$g(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

3) soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = x^2 - 1 & ; \quad x < 0 \\ h(x) = x - 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de h sur \mathbb{R} .

Exercice N° 3 :

$$\text{Soit } f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

1) Mq f est prolongeable par continuité en 0

2) Montrer que le prolongement \tilde{f} est dérivable sur \mathbb{R}

3) Montrer que la dérivée du prolongement \tilde{f} n'est pas continue en zéro.

Exercice N° 4 :

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$1) : \begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$2) : \begin{cases} g(x) = \sin x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

$$3) : \begin{cases} h(x) = \frac{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & ; \quad x \neq 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

Exercice N° 5 :

En appliquant le TAF Montrer que :

$$1) : \forall t > 0 \quad ; \quad \text{Arctan } t > \frac{t}{1+t^2}$$

$$2) : \forall x > 0 \quad ; \quad \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2} > 0$$

$$3) : \forall x > 0 \quad ; \quad 1 - x < \cos x < 1 + x$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 6 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x^2 & ; \quad \forall x \geq 0 \\ f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} & ; \quad \forall x < 0 \end{cases}$$

- 1) Étudier la dérivabilité de f en zéro
- 2) interpréter le résultat géométriquement
- 3) Étudier la dérivabilité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
- 4) Calculer $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Exercice N° 7 :

Calculer $g'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g dans chacun des cas suivants :

- 1) ■ $g(x) = \frac{-3}{x^2 + x + 1}$
- 2) ■ $g(x) = x - \cos x$
- 3) ■ $g(x) = 2x + \sin x$
- 4) ■ $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$
- 5) ■ $g(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$
- 6) ■ $g(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$

Exercice N° 8 :

En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, Calculer le nombre dérivé de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

- 1) ■ $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $a = 0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$2) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{2x-1} \quad ; \quad a = 4$$

$$3) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sin(2x) \quad ; \quad a = \frac{\pi}{6}$$

$$4) \quad \blacksquare \quad f(x) = \cos x \quad ; \quad a = \pi$$

$$5) \quad \blacksquare \quad f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 & ; \quad a = 0 \end{cases}$$

$$6) \quad \blacksquare \quad f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{2} & ; \quad a = 1 \end{cases}$$

Exercice N° 9 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} & ; \quad x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

- 1) Étudier la dérivabilité de f en 1
- 2) Déterminer les équations des demi-tangentes à la courbe (C_f) en $A(1,0)$
- 3) Tracer les demi-tangentes en $A(1,0)$ et la courbe (C_f) dans repère (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice N° 10 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

- 1) Calculer $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- 2) la courbe (C_f) admet-elle une tangente de coefficient directeur égal à -4

3) la courbe (\mathcal{C}_f) admet-elle une tangente Horizontale ?

Exercice N° 11 :

En utilisant la notion du nombre dérivé, Calculer les limites suivantes :

1) ■ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^5 + 3x^4 - 7x^3 + x^2 + x + 1}{x - 1} \right)$

2) ■ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2}}{x - 2} \right)$

3) ■ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - (x + 1)^3 \cos x}{x} \right)$

4) ■ $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x \sin x}{x - \pi} \right)$

5) ■ $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1 + \cos^3 x}{x - \pi} \right)$

6) ■ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} \cos(\pi x) + 1}{x - 1} \right)$

Exercice N° 12 :

Étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) ■ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

3) ■ $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 3}$

4) ■ $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2}$

5) ■ $f(x) = 3x + 4 - \frac{1}{x - 2}$

6) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - 2x$

Exercice N° 13 :

1) Montrer les inégalités suivantes :

a) ■ $\sin x \leq x$

b) ■ $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

c) ■ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$

d) ■ $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

2) En déduire un encadrement de $\sin x$ Puis donner une valeur approchée du nombre $\sin(0,7)$

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x - x}{x^2} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \right)$$

Exercice N° 14 :

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

1) Déterminer : $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$

2) Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}} ; \quad d^\circ(P_n(x)) = n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 15 :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ et que : $\forall x \geq 0 ; g'(x) \geq f'(x) \geq 0$
Et que $g'(x) \neq 0$.

$$1) \text{ Mq : } \exists c \in]0, x[; \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a :
 $0 \leq f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

Exercice N° 16 :

En utilisant la définition, Montrer que la fonction f est dérivable en x_0 en déterminant le nombre dérivé $f'(x_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$1) \blacksquare f(x) = \sqrt{x^2 + 1} ; x_0 = 0$$

$$2) \blacksquare f(x) = 2x - \sqrt[3]{x} ; x_0 = 1$$

$$3) \blacksquare f(x) = \frac{1}{x^2 + 2} ; x_0 = -2$$

$$4) \blacksquare f(x) = 2x - \text{Arctan}\sqrt{x+1} ; x_0 = 0$$

$$5) \blacksquare f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} ; x_0 = 0 \end{cases}$$

Exercice N° 17 :

Pour chacun des cas suivants, Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus :

$$1) \begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \boxed{x_0 = 1}$$

$$2) \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \boxed{x_0 = 0}$$

$$3) \begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} ; & x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) ; & x < 2 \end{cases} \quad \boxed{x_0 = 2}$$

Exercice N° 18 :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$, Montrer l'identité suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\text{Arctan } x - \text{Arctan } a}{x - a} \right) = \frac{1}{1 + a^2}$$

2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \right) ; \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left(\frac{\text{Arctan } x - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{\text{Arctan } x + \frac{\pi}{6}}{3x + \sqrt{3}} \right) ; \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{4\text{Arctan } x + \pi}{x + 1} \right)$$

Exercice N° 19 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la concavité de la courbe (C_f) de f en déterminant ses éventuels points d'inflexion :

$$1) \blacksquare f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$2) \blacksquare f(x) = 3x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$3) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$$

$$4) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos(2x)}$$

$$5) \quad \blacksquare \quad f(x) = x - \text{Arctan } x$$

$$6) \quad \blacksquare \quad f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

Exercice N° 20 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x - 1 & ; \quad x \geq 0 \\ f(x) = x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en zéro
- 2) Montrer que f est dérivable en zéro
- 3) Étudier la dérivabilité à gauche en 0
- 4) f est-elle dérivable en 0 ?
Interpréter géométriquement le résultat
- 5) Étudier les branches infinies de (C_f)
- 6) Étudier les variations de la fonction f
Sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$
- 7) Montrer que f réalise une bijection de $I = [0, +\infty[$ sur un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$
- 8) Calculer $f^{-1}(x)$; $\forall x \in J$
- 9) Calculer le nombre suivant $(f^{-1})'(-1)$
puis tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

Exercice N° 21 :

Soit f la fonction définie sur $I = [0, 8]$ par

$$f(x) = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}$$

- 1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - 8}{x}\right) = -\infty$

Et interpréter géométriquement le résultat

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

- 2) Montrer que la fonction f est
Strictement décroissante sur I
- 3) Montrer que f est bijective de I sur I
- 4) Montrer que $(\Delta) : y = x$ est un axe de
Symétrie pour la courbe (C_f)
- 5) En déduire une expression de $f^{-1}(x)$
En fonction de x puis calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} \left(\frac{f(x)}{x-8}\right)$$

Et interpréter géométriquement le résultat

- 6) Tracer dans un même repère (O, \vec{i}, \vec{j})
les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

Exercice N° 22 :

Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \sqrt[3]{x} - \sin(\sqrt[3]{x}) \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

- 1) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) , (\exists c \in]0, t^3[)$:

$$t - \sin t = \frac{1}{3} t^3 \left(\frac{1 - \cos(\sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c^2}}\right)$$

- 2) En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{t - \sin t}{t^3}\right)$$

Exercice N° 23 :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g'(x) = \left(\frac{1-x}{\sqrt{2x^2+2}}\right) \left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

- 3) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$:

$$0 < g'(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- 4) Dresser le tableau de variation de g
- 5) On considère la suite définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n < 1$

6) Établir la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

7) En déduire que (u_n) est convergente
Et préciser sa limite.

Exercice N° 24 :

On considère les fonctions définies par :

■ $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x - 1 ; \forall x \geq 0$

■ $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 6} ; \forall x \geq 0$

1) Calculer les quantités suivantes :

$$f(0) ; f\left(\frac{1}{2}\right) ; f(1) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

2) Calculer : $f'(x) ; \forall x \in \mathbb{R}^+$ puis
Dresser le tableau de variation de f

3) Montrer que f s'annule une fois et
une seule sur $[0, +\infty[$ en un $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$

4) Déterminer le signe de f sur $[0, \alpha[$
et sur $]\alpha, +\infty[$

5) Déterminer un encadrement de :

$$(x^2 + 4x + 6) \text{ pour } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

6) En déduire que : $0 < g(x) < \frac{1}{2}$

7) Montrer que : $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] ; |g'(x)| \leq \frac{5}{36}$

8) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

9) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$ et déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{36} |u_n - \alpha|$$

10) En déduire que la suite (u_n) est
Convergente et donner sa limite

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 25 :

Déterminer l'équation de la tangente éventuellement les équations des demi-tangentes de la courbe (C_f) en x_0 dans chacun des cas suivants :

1) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} ; x_0 = -1$

2) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} ; x_0 = -1$

3) ■ $f(x) = |x^2 - 4| ; x_0 = 2$

4) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} ; x \neq 0 ; x_0 = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

5) ■ $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \sin(x^2) ; x_0 = 0$

6) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} ; x_0 = -2$

7) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} ; x_0 = 1$

Exercice N° 26 :

Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ et
Son domaine de définition dans chacun
des cas suivants :

1) ■ $f(x) = \text{Arctan } \sqrt{x}$

2) ■ $f(x) = \text{Arctan } \sqrt{x^2 + 1}$

3) ■ $f(x) = \sqrt{\text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}}$

4) ■ $f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{2x + 1}{x - 1} \right)$

5) ■ $f(x) = \text{Arctan } \sqrt{x} + \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

6) ■ $f(x) = \sqrt{\text{Arctan } x}$

Exercice N° 27 :

Soit f la fonction définie ainsi :

$$f(x) = \sqrt{2 - x} - x ; \forall x \in]-\infty, 2] = I$$

1) Montrer que f réalise une bijection de
 I sur un intervalle J à déterminer.

- 2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-2, +\infty]$ puis calculer $(f^{-1})'(0)$
- 3) Construire dans un même repère les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$
- 4) Calculer en fonction de $y \in J$: $f^{-1}(y)$

Exercice N° 28 :

Déterminer la fonction dérivée de f et son domaine de définition dans chacun des cas suivants :

- 1) ■ $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$
- 2) ■ $f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos x}$
- 3) ■ $f(x) = (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}$
- 4) ■ $f(x) = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- 5) ■ $f(x) = \text{Arctan}(\sqrt[4]{x+1})$
- 6) ■ $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Exercice N° 29 :

Soit : $F(x) = \sqrt[n]{1+nx} - 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

- 1) Déterminer D_f domaine de définition f
- 2) Étudier la dérivabilité de F à droite en $\frac{-1}{n}$
- 3) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]\frac{-1}{n}, +\infty[$
- 4) Montrer que F réalise une bijection de $]\frac{-1}{n}, +\infty[$ sur un intervalle I à déterminer
- 5) Étudier la dérivabilité de F^{-1} sur I
- 6) Calculer $F^{-1}(x)$; $\forall x \in I$
- 7) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ on a :
 $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$
- 8) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $F(x) \leq x$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 30 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

- 1) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter géométriquement le résultat
- 2) Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$
- 3) Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une seule solution dans $]1, +\infty[$
- 5) Étudier la branche infinie en $+\infty$
- 6) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice N° 31 :

Soit la fonction numérique définie par :

$$g(x) = x \cos x - \sin x \quad ; \quad \forall x \in [0, \pi] = I$$

- 1) Étudier les variations de g et donner son tableau de variations
- 2) En déduire le signe de $g(x)$ sur I
- 3) Soit f la fonction définie sur I par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & ; \quad x \in]0, \pi] \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Étudier les variations de f sur $]0, \pi]$

- 4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 0 \leq x - \sin x$

$$\text{Soit } \psi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Calculer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$

- 6) en déduire le signe de $\psi(x)$ sur \mathbb{R}^+
- 7) Déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$.
- 8) Construire (C_f) dans (O, \vec{i}, \vec{j})

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 32 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{1+u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

- 1) Calculer les termes : u_1 ; u_2 ; u_3
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 2$
- 3) Montrer que (u_n) est strictement \nearrow
- 4) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente
Soit $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
- 5) Montrer que α est la seule solution de l'équation $g(x) = x - \sqrt[3]{1+x} = 0$

Exercice N° 33 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1} \quad ; \quad \forall x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\text{On pose : } I = \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty \right[$$

- 1) Montrer que f est continue sur I .
- 2) Montrer que f est strictement \nearrow sur I
- 3) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer
- 4) Définir la fonction inverse f^{-1}
- 5) Montrer que $\forall x \in I ; x \leq f(x)$
- 6) Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Montrer que : $u_0 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq u_n \leq 0$

- 7) Montrer que : $u_0 \leq 0 \Rightarrow (u_n)$ converge
- 8) Montrer l'implication suivante :

$$u_0 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; (u_{n+1} - u_n) \geq a$$

avec : $a = u_0 \left(\sqrt[3]{u_0^3 + 1} - 1 \right)$

9) En déduire l'implication suivante :

$$u_0 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq u_0 + na$$

10) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ dans le cas $(u_0 > 0)$

Exercice N° 34 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} & ; \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de f sur \mathbb{R}
- 2) Montrer que f est impaire puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R}
- 4) Calculer $f'(x) ; \forall x \in \mathbb{R}^*$
- 5) Montrer que f est strictement \nearrow sur \mathbb{R}
- 6) construire (C_f) et (Δ) la tangente à (C_f) en zéro dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 7) Montrer que f réalise une bijection à Définir puis donner $f^{-1}(x)$ en fonction de x

Exercice N° 35 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

- 1) Montrer que pour $x \leq t \leq x+1$ et $x > 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- 2) En déduire que pour $\forall x > 0$ on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- 3) Soit (u_n) la suite définie ainsi :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente

Exercice N° 36 :

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$$

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \text{Arctan } x - x + \frac{x^3}{3} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; |f'(x)| \leq x^4$

3) Dédurre que : $\forall x \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq |x^5|$

4) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x - x}{x^2} \right)$

Exercice N° 37 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + 4}{2} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) Soit $g(x) = f(x) - x$, Montrer que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{3}{2} - x \leq g(x) \leq \frac{5}{2} - x$$

4) Dédurre : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $g(\mathbb{R})$

5) Montrer que : $\exists ! x_0 \in \mathbb{R} ; f(x_0) = x_0$

6) Vérifier que : $\frac{2\pi}{3} < x_0 < \frac{5\pi}{6}$

7) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N}$ On a :

$$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - x_0|$$

8) En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 38 :

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que (S_n) est strictement ↗

2) Soit : $f(t) = \frac{1}{t^2} ; \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$

Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$ on a :

$$\frac{2}{(1+p)^3} < f(p) - f(p+1) < \frac{2}{p^3}$$

3) Dédurre que pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < S_n < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

4) Montrer que $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente

Exercice N° 39 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 0 \leq f'(x) \leq x^2$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{3}$

3) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$

4) En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right)$

Exercice N° 40 :

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite de f en a dans chacun des cas ainsi proposés :

1) ■ $f(x) = \frac{\sin x}{x} ; \quad a = 0$

2) ■ $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} ; \quad a = 0$

3) ■ $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} ; \quad a = \frac{\pi}{2}$

$$4) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x} \quad ; \quad a = \frac{\pi}{2}$$

Exercice N° 41 :

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

$$1) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

$$2) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$3) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{-1}{\tan x}$$

$$4) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{3x + 4}$$

$$5) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - x^3}$$

$$6) \quad \blacksquare \quad f(x) = \frac{-3}{(x - 1)(x + 2)}$$

Exercice N° 42 :

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

$$1) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

$$2) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$$3) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

$$4) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{2x - 1}$$

$$5) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$6) \quad \blacksquare \quad f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$$

Exercice N° 43 :

En utilisant la notion du nombre dérivé, Calculer les limites suivantes :

$$1) \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} \right)$$

$$2) \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x) + \cos x - 1}{x} \right)$$

$$3) \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} \right)$$

$$4) \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \sin x)^3 - 1}{x}$$

$$5) \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x) \cdot \cos x}{x - \pi}$$

$$6) \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 - \sin x} + x^2 + x - 1}{x} \right)$$

Exercice N° 44 :

Soit (C_f) la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par ce qui suit :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$$

Déterminer les points de (C_f) dans chacun des cas suivants :

1) la tangente à (C_f) en ces points est parallèle à l'axe des abscisses.

2) la tangente à (C_f) en ces points est parallèle à $(\Delta) : y = -3x + 1$.

3) la tangente à (C_f) en ces points est perpendiculaire à $(D) : y = \frac{1}{7}x - 4$.

Exercice N° 45 :

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer D_h l'ensemble de définition

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) ; \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

3) Montrer que pour tout $x \in D_h$ on a :

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 \left(\frac{3-x}{x-1}\right)$$

4) Étudier les variations de la fonction h

5) Montrer que : $\exists ! \alpha \in]1,3]$; $h(\alpha) = 0$

Exercice N° 46 :

Étudier la dérivabilité à gauche en x_0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu :

1) ■ $f(x) = x + \sqrt[3]{1-x}$; $x_0 = 1$

2) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$; $x_0 = 1$

3) ■ $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; $x_0 = 0$

4) ■ $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$; $x_0 = -2$

5) ■ $f(x) = \sqrt{\pi - 3 \operatorname{Arctan} x}$; $x_0 = \sqrt{3}$

6) ■ $f(x) = \sqrt{1-x^3}$; $x_0 = 1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 47 :

Calculer les dérivées des fonctions :

1) ■ $f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

2) ■ $g(x) = \sqrt[3]{x^4} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

3) ■ $h(x) = |4x-2|^{\frac{5}{3}}$

4) ■ $k(x) = x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[4]{x^3+1}$

Exercice N° 48 :

1) Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \sin(x\sqrt{x}) ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

est dérivable sur \mathbb{R}^+ puis déterminer sa dérivée

2) Étudier la dérivée de la fonction g :

$$g(x) = \cos(\sqrt{x^2 - x})$$

sur son domaine de définition puis Déterminer sa dérivée.

Exercice N° 49 :

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = x - 3 + \sqrt{x^2 - x} ; \forall x \in [1, +\infty[$$

1) Étudier la dérivée de la fonction g à droite en 1

2) Interpréter géométriquement le résultat

3) Étudier les variations de la fonction g

4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution dans $[1, +\infty[$

5) Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x

6) Montrer que g^{-1} est dérivable en $(\sqrt{2}-1)$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2}-1)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 50 :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} g(x) = 4x \cdot \sqrt[3]{x} & ; x > 0 \\ g(x) = \frac{-2x}{\sqrt[3]{1-x}} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivée à gauche et à droite de la fonction g au point $x_0 = 0$ puis Interpréter graphiquement les résultats

2) Étudier les variations de la fonction g

3) Soit h la restriction de g sur \mathbb{R}^- Montrer que h est une bijection de \mathbb{R}^- sur un intervalle I à déterminer.

4) Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur I puis calculer $(h^{-1})'(7)$. On donne -7 est La seule solution négative de l'équation :
 $8x^3 - 343x + 343 = 0$

Exercice N° 51 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(t) = \sqrt{t} \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, Montrer que $\forall t \in [x; x+1]$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) Soit $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente

Exercice N° 52 :

Dans chacun des cas suivants, Montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe (C_f) de f :

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 1}$; $(\Delta) : x = 2$

2) $f(x) = \sin^4 x - 5\cos^2 x + 7$; $(\Delta) : x = \frac{\pi}{2}$

3) $f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + 4x})$; $(\Delta) : x = -2$

4) $f(x) = \frac{2 - \sin^4 x}{\cos x + 3}$; $(\Delta) : x = 0$

Exercice N° 53 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arctan} x - \frac{1}{\text{Arctan} x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-6x} + x - 1}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

- 1) f est-elle continue en 0 ?
- 2) Étudier la dérivabilité à gauche en 0 de f puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 3) Étudier les branches infinies de (C_f)
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$
- 5) Étudier les variations de f .
- 6) Construire (C_f) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 7) Soit g la restriction de f sur $I =]0, +\infty[$ Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$
- 8) Calculer $g^{-1}(x)$; $\forall x \in J$

Exercice N° 54 :

Soit φ la fonction numérique définie par

$$\varphi(x) = 2 \sin^2 x + 4 \sin x + 2$$

- 1) Montrer que φ est 2π -périodique.
- 2) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
 $\varphi'(x) = 4 \cos x \cdot (1 + \sin x)$
- 3) Donner le tableau de variations de la fonction φ sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$
- 4) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_φ) en 0.
- 5) Calculer $\varphi''(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Exercice N° 55 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{x+1}$$

- 1) Déterminer D_f ensemble de définition
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 3) Calculer $f'(x)$; $\forall x \in D_f$.
- 4) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en -3 .
- 5) montrer que pour tout $x \in D_f$ on a :

$$f''(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^2}$$

- 6) En déduire la monotonie de f'
- 7) Déterminer le signe de $f'(x)$; $\forall x \in D_f$
on donne -3 est une racine simple de l'équation $x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0$
- 8) Donner le tableau de variations de f

Exercice N° 56 :

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}} & ; \quad x \leq 0 \\ g(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- 2) Étudier la dérivabilité de g en 0 puis interpréter géométriquement le résultat
- 3) Calculer : $g'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$
- 4) Étudier le signe de $g'(x)$ sur \mathbb{R}^*
- 5) Donner le tableau de variations de g
- 6) Tracer la courbe (C_g) dans (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice N° 57 :

Étudier la dérivabilité à droite en x_0 de la fonction f puis interpréter le résultat d'un point de vue graphique :

- 1) ■ $f(x) = \sqrt[4]{x-2}$; $x_0 = 2$
- 2) ■ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $x_0 = -1$
- 3) ■ $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$; $x_0 = 1$
- 4) ■ $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+5}}$; $x_0 = 0$
- 5) ■ $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x})$; $x_0 = 0$
- 6) ■ $f(x) = (\text{Arctan} \sqrt{x-3})^2$; $x_0 = 3$

Exercice N° 58 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+8} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 1) Montrer que f est dérivable en zéro

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) En déduire une approximation affine
De l'expression $\sqrt[3]{x^3 + 8}$ au voisinage de 0

3) Déterminer des valeurs approchées
des Nombres $\sqrt[3]{8,004}$ et $\sqrt[3]{7,9995}$.

Exercice N° 59 :

Calculer les dérivées des fonctions :

1) ■ $f(x) = 4x^5 + 8x^2 - 13x + 7$

2) ■ $h(x) = (x^2 + 5x + 4 \cos x)^7$

3) ■ $u(x) = (x^4 + x + 2) \cdot \sin(8x)$

4) ■ $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x^4 + 1}}$

5) ■ $k(x) = \frac{2x^3 + x + 2}{x^2 + x}$

6) ■ $v(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 4}$

Exercice N° 60 :

Calculer la dérivée de la fonction f dans
chaque cas ci-dessous et déterminer les
domaines de définition D_f et $D_{f'}$

1) ■ $f(x) = x^4 \cdot \text{Arctan } x$

2) ■ $f(x) = \sqrt[3]{\text{Arctan } x}$

3) ■ $f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{\sqrt{x}}$

4) ■ $f(x) = x \cdot \text{Arctan} \sqrt{x}$

5) ■ $f(x) = \sqrt{x + \text{Arctan } x}$

6) ■ $f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{2x}{1 - x^2} \right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 61 :

Soit n un entier non nul, en utilisant le
nombre dérivé, calculer les limites
suivantes avec $a \in \mathbb{R}^+$:

1) ■ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^n - a^n}{x - a} \right)$

2) ■ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt[n]{x + a} - \sqrt[n]{2a}}{x - a} \right)$

3) ■ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$

4) ■ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^n x - 1}{x} \right)$

5) ■ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x - a} \right)$

6) ■ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)$

Exercice N° 62 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x} \quad ; \quad \forall x \in I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

1) Étudier les variations de la fonction f
2) En déduire que la fonction f admet
une fonction réciproque sur un inter-
valle J à déterminer bien sûr.

3) Montrer que pour tout $x \in I$ on a :

$$f'(x) = (f(x) - 1) \cdot \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$$

4) Montrer que f^{-1} est dérivable $]2, +\infty[$

5) Montrer que pour tout $x > 2$ on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}}$$

Exercice N° 63 :

En utilisant le TAF Montrer les inégalités

$$1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan } x < x$$

$$3) \quad \text{pour tout } (x, y) \in [0, 10]^2 \text{ on a :} \\ |x \sin x - y \sin y| \leq 11|x - y|$$

$$4) \quad \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[; \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x$$

Exercice N° 64 :

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

- 1) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter géométriquement le résultat
- 2) Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$
- 4) Étudier la concavité de f sur $[1, +\infty[$
- 5) Dresser le tableau de variations de f puis tracer la courbe (\mathcal{C}_f).

Exercice N° 65 :

Calculer les limites suivantes en s'aidant De la technique du nombre dérivé.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{10} - 1}{x} \right)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x + \sin x - 1}{x} \right)$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}} \right)$$

Exercice N° 66 :

Étudier les variations des fonctions suivantes et déterminer éventuellement des extrema locaux ou globaux :

$$1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 3}{x}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$4) \quad f(x) = x^4 - 4x$$

$$5) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$6) \quad f(x) = \sqrt{x} - x^2$$

Exercice N° 67 :

Calculer chacune des limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \right)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x^3} \right)$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x^2} \right)$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi x}{2} \right)$$

Exercice N° 68 :

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{0; 1; 2\}$ soit la fonction :

$$f(x) = \sqrt{(1-x)^n} + (1-x)^n ; \quad \forall x \in]-\infty, 1[$$

- 1) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$
- 2) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1
- 3) Montrer que f réalise une bijection De I vers J à déterminer
- 4) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J
- 5) Calculer $f^{-1}(y)$ en fonction de $y \in J$
- 6) Mq $f(x) = x$ admet une seule solution
- 7) Construire (\mathcal{C}_f) et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ pour $n = 3$

Exercice N° 69 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x$$

- 1) Étudier les variations de la fonction f
- 2) Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 3) Soit g la restriction de f sur $I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et h la restriction de f sur $I' = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer
- 4) Calculer $g^{-1}(y)$ en fonction de $y \in J$
- 5) Montrer que h réalise une bijection de I' vers un intervalle J' à déterminer.
- 6) Calculer $h^{-1}(y)$ en fonction de $y \in J'$

Exercice N° 70 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{4-x} = x \cdot (4-x)^{\frac{1}{3}}$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) Résoudre dans $I = [1, 3]$ l'équ $f(x) = x$
- 2) Montrer que : $f(I) \subseteq I$
- 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 3$
- 4) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 5) En déduire que (u_n) est convergente
- 6) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice N° 71 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x^3 - 1)^4$$

- 1) Calculer $f'(x) ; \forall x \in \mathbb{R}$
- 2) En utilisant la formule de la dérivée De la fonction composée, Déterminer les Dérivées des fonctions suivantes :

$$g(x) = f(\cos x) \quad ; \quad h(x) = f(\sqrt[3]{6x+1})$$

$$k(x) = f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \quad ; \quad S(x) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

$$u(x) = f(\sqrt[4]{x}) \quad ; \quad v(x) = f((\operatorname{Arctan} x)^4)$$

Exercice N° 72 :

En utilisant le nombre dérivé, Calculer Chacune des limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{4x+3}}{x-6}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{4 \cos^2 x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\tan x - 1} \right)$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} \right)$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x + \sin^2 x - \pi}{x - \pi} \right)$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{\tan x - x} \right)$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\tan^2 x - 1} \right)$$

Exercice N° 73 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

- 1) Étudier les variations de la fonction f
- 2) Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$
Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$.
- 4) Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

Exercice N° 74 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sin x - x^2$$

- 1) Montrer que : $\exists \alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[; f(\alpha) = 0$
- 2) En déduire que l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet une solution dans \mathbb{R} .
- 3) cette solution est-elle unique ?

Exercice N° 75 :

Dans chacun des cas suivants, Montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe (C_f) :

$$1) \quad f(x) = \frac{3x^2 + 8x + 4}{x + 1} ; \quad \Omega(-1, 2)$$

$$2) \quad f(x) = \sqrt{3} \cos(2x) + \sin 2x ; \quad \Omega\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$$

$$3) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} ; \quad \Omega\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Exercice N° 76 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x \operatorname{Arctan} x & ; \quad \boxed{x \leq 1} \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\pi}{2} & \boxed{x > 1} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de f en 1 puis donner une interprétation géométrique des résultats
- 3) Calculer : $f'(x)$; $f''(x)$; $f'(0)$ puis Donner le tableau de variations de f' sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.
- 4) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
- 5) Montrer que la droite $(\Delta) : y = \frac{\pi}{2}x - 1$ est une asymptote de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

On donne :

$$\blacksquare \quad \forall x > 0 \quad : \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) Montrer que la droite (Δ') : $y = \pi x + 2$ est une asymptote de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

On donne :

$$\blacksquare \forall x < 0 : \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{-\pi}{2}$$

Exercice N° 77 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{x+1}\right) ; \quad \forall x \in [0,1]$$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et que : $\forall x \in [0,1] ; |f'(x)| < \frac{1}{4 \cos^2 1}$

2) Montrer que : $\exists! \alpha \in]0,1[: f(\alpha) = \alpha$

3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in]0,1[\setminus \{\alpha\} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

4) En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice N° 78 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1} ; \quad x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x - \operatorname{Arctan} x} ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en 0

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \operatorname{Arctan} x \leq x$

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \operatorname{Arctan} x \leq \frac{x^3}{3}$$

4) Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} \right)$

5) Étudier la dérivabilité de f en zéro

6) Étudier les variations de f sur \mathbb{R}

7) Étudier les branches infinies de (C_f)

8) Construire (C_f) dans un repère.

9) soit g la restriction de f sur $I =]-\infty, 0[$ Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

10) Déterminer $g^{-1}(y) ; \quad \forall y \in J$

11) Soit (u_n) la suite définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n - \operatorname{Arctan}(u_n)} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est strictement \searrow

12) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

Exercice N° 79 :

Dans chacun des cas ci-dessous, Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer et préciser $D_{f^{-1}}$ et les variations et une expression de $f^{-1}(y) ; \quad \forall y \in J$:

1) $\blacksquare f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2} ; \quad I = [5, +\infty[$

2) $\blacksquare f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} ; \quad I = [0, +\infty[$

3) $\blacksquare f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} ; \quad I = [1, +\infty[$

$$4) \blacksquare f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$$

Exercice N° 80 :

Soit f la fonction numérique définie ainsi

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que f est une fonction impaire
- 2) Vérifier que f est dérivable sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle I à déterminer.
- 4) Étudier les variations de f^{-1} puis Étudier la parité de la fonction f
- 5) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de $x \in I$
- 6) La fonction f^{-1} est-elle dérivable en 0 ?

Exercice N° 81 :

- 1) Montrer que la fonction $f(x) = x^2 - 2x$ réalise une bijection de $I = [1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
- 2) Déterminer l'équation de la tangente (T) de la courbe (C_f) en $A(2,0)$.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente (T') de la courbe ($C_{f^{-1}}$) en $A'(0,2)$.
- 4) Construire les courbes (C_f) et ($C_{f^{-1}}$) dans un même repère (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice N° 82 :

$$\text{Soit : } f(x) = \cos(2x) \quad ; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de I vers $J = [-1, 1]$
- 2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$
- 3) Déterminer le nombre : $(f^{-1})'(0)$

- 4) Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$ on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

- 5) Construire dans un même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (C_f) et ($C_{f^{-1}}$).

Exercice N° 83 :

Soit f la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

- 1) Montrer que f est dérivable sur I .
- 2) Soit g la restriction de f sur $E = [1, +\infty[$ Montrer que g réalise une bijection de E vers un intervalle J à déterminer.
- 3) Calculer $g^{-1}(x)$ en fonction de $x \in J$
- 4) la fonction g^{-1} est-elle dérivable sur J ?
- 5) Montrer que : $\exists ! \alpha \in]1, \sqrt[3]{2}[$; $f(\alpha) = \alpha^3$

Exercice N° 84 :

Soit f la fonction numérique définie ainsi

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Donner le tableau des variations de f
- 3) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$ Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer
- 4) Déterminer : $g^{-1}(y)$; $\forall y \in J$
- 5) Construire dans un même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (C_f) et ($C_{g^{-1}}$).
- 6) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

8) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}^n}$

9) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice N° 85 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer le terme u_1 .
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$
- 3) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
- 4) En déduire que (u_n) est convergente
- 5) Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice N° 86 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2} ; \forall x \in [0,2]$$

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = a \in [0,1] \end{cases}$$

- 1) Calculer : $f'(x) ; \forall x \in]0,2[$
- 2) Dresser le tableau des variations de f
- 3) Déduire que : $\forall x \in [0,2] ; 0 \leq f(x) \leq 1$
- 4) Montrer : $u_n = \text{constante} \Leftrightarrow a \in \{0,1\}$
- 5) Mq : $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall a \in [0,1]) ; 0 \leq u_n \leq 1$
- 6) Étudier la monotonie de $(u_n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 0 < a < 1}}$ et

En déduire qu'elle est convergente

7) Calculer $\lim(u_n)$

Exercice N° 87 :

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$$

- 1) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1,4[$
- 2) Soit : $g(x) = \sqrt[3]{6x^2 - 12x + 11} ; \forall x \in \mathbb{R}$
Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $g(x) = x$
- 3) Calculer : $g'(x) ; \forall x \in \mathbb{R}$
- 4) En déduire : $g([1, +\infty[)$
- 5) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \alpha$

- 6) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est \nearrow
- 7) En déduire que (u_n) est convergente et calculer ensuite $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice N° 88 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}} ; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{soit : } \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

- 1) Mq: $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ; f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}}$
- 2) Montrer ue : $\exists ! \lambda \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; f(\lambda) = \lambda$
- 3) Mq : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ; |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

- 4) Vérifier que : $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$
 6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \lambda|$$

- 7) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice N° 89 :

- 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; -x \leq \sin x \leq x$
 2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} telles que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; f'(x) \leq g'(x)$
 Montrer que : $f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$
 3) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

- 4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

Exercice N° 90 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)} ; \quad \forall x \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right]$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.
 2) On pose : $g \equiv f^{-1}$ et $K = [1, 2]$
 Montrer que : $\exists ! \alpha \in K ; g(\alpha) = \alpha$
 3) Montrer que : $g(K) \subseteq K$
 4) On admet que f' est \nearrow sur $\left] \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2} \right]$
 Montrer que pour tout $(x, t) \in K^2$ on a :

$$|g(x) - g(t)| \leq \frac{1}{2} |x - t|$$

- 5) Soit (u_n) la suite définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in K$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

- 6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

- 7) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

Exercice N° 91 :

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{x} - 2 \operatorname{Arctan} x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

- 1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0, +\infty[$ et que

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$$

- 2) Étudier le signe de $h(x)$ sur $]0, +\infty[$

- 3) On pose : $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{1 + x^2} ; \quad \forall x \geq 0$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R}^+

- 4) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha^2)}$

- 5) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$0 \leq f(x) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

- 6) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, Montrer que pour tout $(x \geq x_0) \in \mathbb{R}_+^2$

$$(\operatorname{Arctan} x)^2 - (\operatorname{Arctan} x_0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} (x - x_0)$$

- 7) Soit $u_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\operatorname{Arctan} \frac{x}{2^k} \right)^2 ; \quad \forall x \geq 0$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n(x))$ est majorée par $\frac{3\sqrt{3}}{2} x$

- 8) Soit : $C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) ; \quad \forall x \geq 0$

Montrer que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$ on a :

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} |x - x_0| \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k}$$

- 9) En déduire que la fonction C est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice N° 92 :

Calculer les limites suivantes en utilisant

La règle de l'Hôpital :

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x + \sin x} \right)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \sqrt{1 + \sin x}}{x} \right)$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} \right)$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} \right)$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \right)$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x^3} \right)$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \right)$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x} \right)$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right)$$

Exercice N° 93 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x \quad ; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser.

2) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est continue sur J et dérivable sur $J \setminus \{0\}$

3) Montrer qu'il existe un $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\frac{\cos c}{\sqrt{\sin c}} = \frac{4}{\pi}$$

Exercice N° 94 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} + x \right) \quad ; \quad \forall x \in [\sqrt{3}, +\infty[= I$$

1) Montrer que f est strictement \nearrow sur I

2) En déduire que : $\forall x \in I ; f(x) \geq \sqrt{3}$

3) Montrer que : $\forall x \in I ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

4) En déduire que pour tout $x \in I$ on a :

$$|f(x) - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} |x - \sqrt{3}|$$

5) On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq \sqrt{3}$

6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{3}|$$

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{3}|$$

8) Dédire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice N° 95 :

Soit h la fonction définie sur $] -\infty, 0[$ par :

$$h(x) = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right)$$

- 1) Donner le tableau de variations de h
- 2) Déterminer le signe de $h(x)$ sur \mathbb{R}^*
- 3) à l'aide du TAF Montrer que :

$$\forall t < 0 \quad ; \quad t < \operatorname{Arctan} t < \frac{t}{1+t^2}$$

4) En déduire que : $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t - t}{t} \right) = 0$

Exercice N° 96 :

Étudier puis représenter graphiquement la Fonction f dans chacun des cas suivants

1) ■ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - 1}$

2) ■ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$

3) ■ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

Exercice N° 97 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{x} \right) & ; \quad x \in]0, 1[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\exists c_n \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\quad ; \quad f'(c_n) = 0$$

2) En déduire que l'équation $\tan t = t$ admet une infinité de solutions dans \mathbb{R}

Exercice N° 98 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \cos(2x) \quad ; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

- 1) Montrer que f est une bijection de I Sur l'intervalle $J = [-1, 1]$.
- 2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$ puis déterminer $(f^{-1})'(0)$
- 3) Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$ on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice N° 99 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{2-x} - x \quad ; \quad \forall x \in] -\infty, 2] = I$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer
- 2) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $] -2, +\infty[$.
- 3) Calculer le nombre $(f^{-1})'(0)$.
- 4) Calculer : $f^{-1}(x) \quad ; \quad \forall x \in] -2, +\infty[$

Exercice N° 100 :

Pour chacune des fonctions suivantes, Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations sur I :

1) ■ $f(x) = x^4 - 4x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

2) ■ $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) ■ $f(x) = \text{Arctan}(x - 2\sqrt{x})$; $I = \mathbb{R}^+$

4) ■ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice N° 101 :

Étudier puis représenter graphiquement
La fonction f dans chacun des cas :

1) ■ $f(x) = \text{Arctan}\sqrt{x+1}$

2) ■ $f(x) = \sqrt[3]{1-x} - 1$

3) ■ $f(x) = \text{Arctan}(2x) - x$

5 : Corrigés des Exercices

Solution N° 1 :

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2} = f(0)
 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est continue en zéro.

$$\begin{aligned}
 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} - \frac{1}{2}}{x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - \sqrt{x+1} - 1}{2x(\sqrt{x+1} + 1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{x+1}}{2x(\sqrt{x+1} + 1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{2x(\sqrt{x+1} + 1)(1 + \sqrt{x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\sqrt{x+1})^2}{2x(\sqrt{x+1} + 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(\sqrt{x+1} + 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(\sqrt{x+1} + 1)^2} \\
 &= \frac{-1}{2(\sqrt{0+1} + 1)^2} = \frac{-1}{8} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 0

$$Et \quad f'(0) = \frac{-1}{8}$$

Géométriquement on dira que la courbe (\mathcal{C}_f) admet une tangente en zéro de Coefficient directeur égale à $-1/8$.

Solution N° 2 :

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - \text{Arctan}\sqrt{x+1} + \frac{\pi}{4}}{x} \right)
 \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
&= 2 - \lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ y = \sqrt{x+1}}} \left(\frac{\text{Arctan } y - \frac{\pi}{4}}{y^2 - 1} \right) \\
&= 2 - \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Arctan } y - \frac{\pi}{4}}{y - 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{y + 1} \right) \\
&= 2 - (\text{Arctan } y)'_{/y=1} \times \left(\frac{1}{1 + 1} \right) \\
&= 2 - \left(\frac{1}{1 + y^2} \right)_{/y=1} \times \left(\frac{1}{1 + 1} \right) = \frac{7}{4} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en zéro

$$\text{Et : } f'(0) = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned}
2) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x^2 + 4x - 5 - 34}{x - 3} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3) \left(x + \frac{13}{3} \right)}{(x - 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} 3 \left(x + \frac{13}{3} \right) \\
&= 3 \left(3 + \frac{13}{3} \right) = 22 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc la fonction g est dérivable en 3

$$\text{Et : } g'(3) = 22$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) h est une fonction définie par morceaux

Sur $]-\infty, 0[$ on a : $h(x) = x^2 - 1$

Donc h est dérivable sur $]-\infty, 0[$ car c'est un polynôme.

Sur $]0, +\infty[$, h est dérivable aussi car c'est un polynôme. Étudions maintenant la dérivabilité de h en zéro :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x - 1 + 1}{x} \right) = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{x^2 - 1 + 1}{x} \right) = 0 \in \mathbb{R}$$

On remarque que : $h'_d(0) \neq h'_g(0)$

Donc h n'est pas dérivable en zéro.

h est juste dérivable à droite et à gauche en zéro mais pas du tout en 0.

La conclusion : h est dérivable sur \mathbb{R}^*

Solution N° 3 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{Car } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\text{Et comme : } \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

D'où f est prolongeable par continuité en zéro et son prolongement \tilde{f} est :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

$$2) \text{ On a : } \begin{cases} \tilde{f}(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

Sur \mathbb{R}^* on remarque que \tilde{f} est dérivable car c'est le produit de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R}^* .

Examinons la dérivabilité en zéro :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{et ceci car : } -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$

Donc la fonction \tilde{f} est dérivable en 0

La conclusion : \tilde{f} est dérivable sur \mathbb{R} .

$$3) \text{ On a : } \forall x \neq 0 ; \quad f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)'$$

$$\begin{aligned} &= 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \left(\frac{1}{x} \right)' \cos \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \left(\frac{-1}{x^2} \right) \cos \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Donc la dérivée de \tilde{f} est définie par :

$$\begin{cases} \tilde{f}'(x) = 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) & ; \quad x \neq 0 \\ \tilde{f}'(0) = 0 \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Examinons la continuité de \tilde{f}' en 0 :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{2x \sin \left(\frac{1}{x} \right)}_0 - \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\cos \left(\frac{1}{x} \right)}_{\text{n'existe pas}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) \neq \tilde{f}'(0)$$

C'est à dire que \tilde{f}' n'est pas continue en 0

Solution N° 4 :

1) Sur \mathbb{R}^* on remarque que f est le produit de deux fonctions bien définies et toutes les deux dérivables sur \mathbb{R}^* :

$$x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

La composition $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* car c'est une composition bien définie ($\forall x \neq 0 ; \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$) de deux fonctions dérivable sur \mathbb{R}^* .

Examinons la dérivabilité de f en zéro :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } -x \leq x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \leq x \quad ; \quad \forall x \neq 0$$

$$\text{Comme : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0 \in \mathbb{R}$$

Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Sur \mathbb{R}^* on remarque que g est dérivable car c'est le produit de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R}^*

$$x \mapsto \sin x \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

Examinons la dérivabilité de g en 0 :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)}_{\text{n'existe pas}} \end{aligned}$$

Donc g n'est pas dérivable en zéro.

La conclusion : g est dérivable sur \mathbb{R}^* .

$$3) \text{ Si } \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \text{ Alors } h(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$$

Donc h est dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et étant dérivables.

$$\text{Si } x < 0 \text{ Alors } h(x) = \frac{-x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$$

Donc h est dérivable sur $] -\infty, 0[$ car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et dérivables sur $] -\infty, 0[$.

Examinons la dérivabilité de h en zéro :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x(x - 1)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\sqrt{0 - 0 + 1}}{0 - 1} = 1 = h'_g(0) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x(x - 1)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{0 - 0 + 1}}{0 - 1} = -1 = h'_d(0) \in \mathbb{R}$$

On remarque que $h'_g(0) \neq h'_d(0)$ Donc h n'est pas dérivable en zéro.

Examinons la dérivabilité en 1 :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - 1}{x - 1} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} - 1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x \cdot |x-1|}{x-1} - 1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \left(\frac{\frac{\pm x(x-1)}{x-1} - 1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \left(\frac{\pm x - 1}{x - 1} \right)$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x-1} \right) = 1 = h'_d(1) \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-x-1}{x-1} \right) = +\infty \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc h n'est pas dérivable en 1.

La conclusion : h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Solution N° 5 :

1) On a la fonction $Arctan$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier selon le cours, Donc on peut appliquer le TAF à cette fonction sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit $t > 0$ et on prend l'intervalle $[0, t]$:

$$\blacksquare \begin{cases} Arctan \text{ est continue sur } [0, t] \\ Arctan \text{ est dérivable sur }]0, t[\end{cases}$$

$\Rightarrow \exists c \in]0, t[; \text{ tel que :}$

$$\left(\frac{Arctan t - Arctan 0}{t - 0} \right) = (Arctan)'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < t \quad \text{et} \quad \frac{Arctan t}{t} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\blacksquare 0 < c < t \Rightarrow 0 < c^2 < t^2$$

$$\Rightarrow 1 < c^2 + 1 < t^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2 + 1} < \frac{1}{c^2 + 1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2 + 1} < \frac{1}{c^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2 + 1} < \frac{Arctan t}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t^2 + 1} < Arctan t ; \quad \forall t > 0$$

2) On a $\varphi : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$ Donc on peut appliquer le TAF à cette fonction φ sur n'importe quel intervalle inclus dans $]-1, +\infty[$ soit $x > 0$ et on prend l'intervalle $[0, x] \subset]-1, +\infty[$

$$\blacksquare \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < x \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{c+1}}$$

$$\blacksquare 0 < c < x \Rightarrow 1 < c+1 < x+1$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{c+1} < \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow 2 < 2\sqrt{c+1} < 2\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c+1}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c+1}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \frac{1}{2} < 0$$

3) On a la fonction \cos est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier donc on peut appliquer le TAF à \cos sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} soit $x > 0$ et on prend l'intervalle $[0, x] \subset \mathbb{R}$ On trouve :

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

- $\begin{cases} \cos \text{ est continue sur } [0, x] \\ \cos \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \forall c \in]0, x[; \left(\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \right) = (\cos)'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < x ; \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin c$$

- $-1 < \sin c < 1 \Rightarrow -1 < -\sin c < 1$

$$\Rightarrow -1 < \frac{\cos x - 1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow -x < \cos x - 1 < x ; x > 0$$

$$\Rightarrow 1 - x < \cos x < x + 1 ; \forall x > 0$$

Solution N° 6 :

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x^3 - x^2 - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - x) = 0 = f'_d(0) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors on déduit que f n'est pas dérivable en zéro.

2) géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à droite en 0 avec $(\Delta) : y = f(0) = 0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses est une demi-tangente à la courbe (C_f) à droite en 0. C'est l'interprétation de la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Et on a la 2^{ème} limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{1}{2} = f'_g(0)$$

Et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (D) à gauche en 0 : $(D) : y = f'_g(0)x + f(0)$

C'est à dire $(D) : y = \frac{1}{2}x$ est une demi-tangente à (C_f) à gauche en 0.

3) Sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ on a $f(x) = x^3 - x^2$. Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

Sur $]-\infty, 0[$ on a : $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$. Alors f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ comme étant quotient bien définie de deux fonctions dérivables sur $]-\infty, 0[$.

4) Si $x \in]0, +\infty[$ Alors : $f(x) = x^3 - x^2$. D'où $f'(x) = 3x^2 - 2x ; \forall x > 0$

Si $x \in]-\infty, 0[$ Alors $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ d'où :

$$f'(x) = \frac{(1 - \cos x)'x - 1(1 - \cos x)}{x^2}$$

$$= \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}$$

Si $x = 0$ Alors f n'est pas dérivable en 0 car c'est déjà vu. La fonction dérivée est donc définie ainsi :

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 2x ; x > 0 \\ f'(x) = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} ; x < 0 \end{cases}$$

Solution N° 7 :

$$1) g'(x) = \frac{-(x^2 + x + 1)'(-3)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{3(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	0^-	-4	0^-

$$2) g'(x) = 1 + \sin x \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$\frac{3\pi}{2}[2\pi]$	$+\infty$
$g'(x)$		0	0	
$g(x)$	$-\infty$			$+\infty$

$$3) g'(x) = 2 + \cos x > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$4) g'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 3x + 5}\right)'$$

$$= \left((x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 3x + 5)'$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 3)$$

$$= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(-\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$

$$5) g'(x) = \frac{-(1 + \cos^2 x)'}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{2 \cos x \cdot \sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{\sin(2x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$0[2\pi]$	$\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$+\infty$
$g'(x)$		0	0	0	
$g(x)$	π -périodique	1	$1/2$	1	π -périodique

$$6) g'(x) = \frac{3x^2(x^4 + 2) - (4x^3)(x^3)}{(x^4 + 2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - x^6}{(x^4 + 2)^2} = \frac{x^2(6 - x^4)}{(x^4 + 2)^2}$$

$$= \frac{x^2(\sqrt{6} - x^2)(\sqrt{6} + x^2)}{(x^4 + 2)^2}$$

$$= \frac{x^2(6^{1/4} - x)(6^{1/4} + x)(\sqrt{6} + x^2)}{(x^4 + 2)^2} ; x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6^4}$	0	$\frac{1}{6^4}$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$+$	$-$	
$g(x)$	0^-	$-\frac{3}{6^4/8}$	0	$\frac{3}{6^4/8}$	0^+

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 8 :

$$1) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) = 1 \in \mathbb{R}$$

$$2) f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{7}}{x - 4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x-1} - \sqrt{7})(\sqrt{2x-1} + \sqrt{7})}{(x - 4)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{7})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x-1}^2 - \sqrt{7}^2}{(x - 4)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{7})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{7})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{7}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{8-1} + \sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \in \mathbb{R}$$

$$3) f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2x - \frac{\pi}{3}}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \in \mathbb{R}$$

$$4) f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\cos x + 1}{x - \pi} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x - \pi}} \left(\frac{\cos(t + \pi) + 1}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos t + 1}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos t}{t^2} \right) \times \lim_{t \rightarrow 0} t$$

$$= \frac{1}{2} \times 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$5) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$6) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1} - \frac{5}{2}}{x - 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2(x^2 - 1)(x - 1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 - x - 1)}{2(x^2 - 1)(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x - 1) \left(x + \frac{1}{2}\right)}{2(x - 1)(x + 1)(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1} \right) = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + 1} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Solution N° 9 :

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{\sqrt{x - 1} - 0}{x - 1} \right) \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x - 1}} \right) \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{x - 1}} \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0 \\ t = x - 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) = +\infty \notin \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1. D'où f n'est pas dérivable en 1 et ce ne serait pas utile d'étudier la dérivabilité à gauche en 1.

$$2) \text{ On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = +\infty$$

Donc (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale en 1 à gauche avec $(\Delta) : x = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{On a aussi : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x + 1) = f'_g(1) = 2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

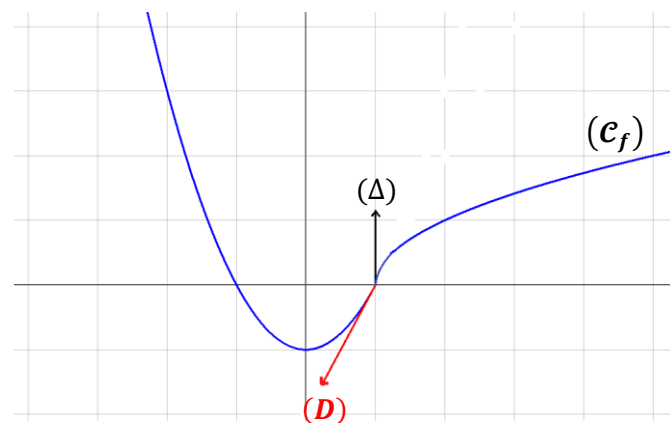
You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Donc (C_f) admet une demi-tangente (D) à gauche en 1.

avec $(D) : y = f'_g(1)(x - 1) + f(1)$

C'est-à-dire : $(D) : y = 2(x - 1)$

3) la représentation graphique de (C_f)

**Solution N° 10 :**

1) d'abord f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Avec : $x + 1 \neq 0$; $\forall x \neq -1$ Soit x un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x - 3)(x + 1) - (x^2 - 3x + 1)}{(x + 1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

2) le coefficient directeur de la tangente à une courbe est lui même le nombre dérivé de la fonction en ce point selon la convention $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Donc pour répondre à cette question il suffit de résoudre l'équation : $f'(x) = -4$ Dans l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2} = -4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = -4(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; -2\} \subset \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Bien évidemment la courbe (C_f) admet deux tangentes (Δ) et (D) de coefficient directeur -4 les voici :

$$\begin{cases} (\Delta) : y = -4x + 1 \\ (D) : y = -4x - 19 \end{cases}$$

3) une tangente horizontale de (C_f) signifie que $f'(x) = 0$:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \quad ; \quad x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\} \text{ avec } \Delta = 20$$

Bien entendu, la courbe (C_f) admet deux tangentes horizontales (Δ') et (D') en deux points $-1 + \sqrt{5}$ et $-1 - \sqrt{5}$:

$$\begin{cases} (\Delta') : y = f(-1 + \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 5 \\ (D') : y = f(-1 - \sqrt{5}) = -2\sqrt{5} - 5 \end{cases}$$

Solution N° 11 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^5 + 3x^4 - 7x^3 + x^2 + x + 1}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \right) = \varphi'(x)_{/x=1}$$

$$\text{Avec : } \varphi(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + x^2 + x + 1$$

La fonction φ est dérivable car polynôme

$$\varphi'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 21x^2 + 2x + 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \varphi'(1) = 5 + 12 - 21 + 2 + 1 = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \right) = -1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(2)}{x - 2} \right)$$

$$= \varphi'(x)_{/x=2} = \left(\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} \right)_{/x=2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Bien entendu $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - x}$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 1, +\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left((x^2 - x)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (x^2 - x)^{-\frac{1}{2}} (2x - 1) \\ &= \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - (x + 1)^3 \cdot \cos x}{x} \right)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) = -\varphi'(x)_{/x=0}$$

La fonction $\varphi(x) = (x + 1)^3 \cos x$ est dérivable comme étant produit de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= ((x + 1)^3 \cos x)' \\ &= 3(x + 1)^2 \cos x - \sin x \cdot (x + 1)^3 \\ &= (x + 1)^2 \cdot (3 \cos x - (x + 1) \sin x) \\ \Rightarrow \varphi'(0) &= (0 + 1)^2 (3 \cos 0 - \sin 0) = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - (x+1)^3 \cos x}{x} \right) = -3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x \sin x}{x - \pi} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(\pi)}{x - \pi} \right)$$

$$= \varphi'(x)_{/x=\pi} = -\pi$$

Bien entendu $\varphi(x) = x \sin x$ est dérivable sur \mathbb{R} tout entier car produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$\Rightarrow \varphi'(\pi) = \sin(\pi) + \pi \cos \pi = -\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x \sin x}{x - \pi} \right) = -\pi$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1 + \cos^3 x}{x - \pi} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(\pi)}{x - \pi} \right)$$

$$\text{Avec : } \varphi(x) = \cos^3 x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} et on pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)$

$$\Rightarrow \varphi'(\pi) = (-3 \cos^2 \pi) \times (\sin \pi) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1 + \cos^3 x}{x - \pi} \right) = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \cos(\pi x) + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(\pi)}{x - \pi} \right)$$

$$\text{Avec : } \varphi(x) = \sqrt{x} \cos(\pi x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R}^+ car produit de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R}^+ et on a pour $x > 0$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\pi x) + \sqrt{x}(-\pi \sin(\pi x))$$

$$\Rightarrow \varphi'(1) = \frac{\cos(\pi)}{2\sqrt{1}} - \pi\sqrt{1} \cdot \sin \pi = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sqrt{x} \cos(\pi x) + 1}{x - 1} \right) = \frac{-1}{2}$$

Solution N° 12 :

1) la fonction f est continue et dérivable sur \mathbb{R} car c'est un polynôme.

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3x^2 - 6x$

Ainsi on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

2) La fonction f est continue et dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] 4, +\infty[$ car composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $] -\infty, -1[\cup] 4, +\infty[$ et on a pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup] 4, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

D'où l'on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	0	$+\infty$

3) la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ car c'est un quotient de deux fonctions continues et dérivables sur

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et on a pour tout $x \neq -3$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+3) - (x^2+x-3)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^2+6x+6}{(x+3)^2} = \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x+3)^2}$$

Avec : $\alpha_1 = -3 - \sqrt{3}$; $\alpha_2 = -3 + \sqrt{3}$

On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	α_1	-3	α_2	$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha_1)$	$+\infty$	$f(\alpha_2)$	$+\infty$

$$f(\alpha_1) = \frac{-(6+5\sqrt{3})}{\sqrt{3}} ; f(\alpha_2) = \frac{6-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

4) La fonction f est continue sur \mathbb{R} tout entier car somme de deux fonctions bien définies continues et dérivables sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{2\sqrt{x^2+2} - 2x}{2\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{\sqrt{x^2+2}}$$

La dérivée première $f'(x)$ ne s'annule jamais sur \mathbb{R} sinon on aurait une contradiction qui est $(2=0)$ donc le signe de la quantité $(\sqrt{x^2+2} - x)$ est constant sur \mathbb{R} il suffit de remplacer x par un nombre de notre choix dans \mathbb{R} :

On a : $\sqrt{0^2+2} - 0 = \sqrt{2} > 0$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) > 0$

D'où : f est strictement \nearrow sur \mathbb{R}

5) la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ car somme de deux fonctions bien définies continues et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. et on a $\forall x \neq 2$:

$$f'(x) = 3 - \left(\frac{-1}{(x-2)^2} \right) = 3 + \left(\frac{1}{x-2} \right)^2 > 0$$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

6) la fonction f est continue sur l'ensemble $] -\infty, -2[\cup] 1, +\infty[= E$ car somme de deux fonctions bien définies et dérivables sur E , et on a pour tout $x \in E$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} - 2$$

$$= \frac{2x+1 - 4\sqrt{x^2+x-2}}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$

Réolvons l'équation $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+1)^2}{4(x^2+x-2)} = 4$$

$$\Rightarrow 16(x^2+x-2) = (2x+1)^2$$

$$\Rightarrow 12x^2 + 12x - 33 = 0$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \underbrace{\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}}_{\alpha} ; \underbrace{\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}}_{\beta} \right\}$$

Avec le discriminant $\Delta = 1728$

Inversement :

$$\frac{2\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha^2 + \alpha - 2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{4} = 2 \in E$$

$$\frac{2\beta + 1}{2\sqrt{\beta^2 + \beta - 2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} = -2 \notin E$$

Ainsi l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans l'ensemble E c'est :

$$\alpha = \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-			+	-
$f(x)$	$+\infty$			$f(\alpha)$	$-\infty$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha - 2} - 2\alpha \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} - (-1 + 2\sqrt{3}) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Solution N° 13 :

1) a) On a la fonction \sin est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier donc on peut appliquer le TAF à \sin sur n'importe quel intervalle de \mathbb{R} . Soit l'intervalle $[0, x]$ Avec $x > 0$ on trouve :

$$\begin{cases} \sin \text{ est continue sur } [0, x] \\ \sin \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \left(\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \right) = \cos c$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos c \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin x \leq x ; \quad \forall x \geq 0$$

1) b) soit la fonction φ définie sur \mathbb{R} :

$$\varphi(t) = \cos t + \frac{t^2}{2} - 1$$

$$\blacksquare \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 - 0}{x - 0} = -\sin c + c$$

$$\blacksquare \sin x \leq x \Rightarrow \sin c \leq c ; \text{ car } c \geq 0$$

$$\Rightarrow -\sin c + c \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}{x} \geq 0 ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0 ; \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} ; \quad x \geq 0$$

1) c) soit la fonction φ définie sur \mathbb{R} :

$$\varphi(t) = \sin t + \frac{t^3}{6} - t$$

$$\blacksquare \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x + \frac{x^3}{6} - x - 0}{x - 0} = \cos c + \frac{c^2}{2} - 1$$

$$\blacksquare \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cos c \geq 1 - \frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos c + \frac{c^2}{2} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x + \frac{x^3}{6} - x}{x} \geq 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{x^3}{6} - x \geq 0 \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad ; \quad x \geq 0$$

1) d) soit la fonction φ définie sur \mathbb{R} :

$$\varphi(t) = \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}$$

$$\blacksquare \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x - 0} = -\sin c + c - \frac{c^3}{6}$$

$$\blacksquare \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \Rightarrow \sin c \geq c - \frac{c^3}{6}$$

$$\Rightarrow -\sin c + c - \frac{c^3}{6} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x} \leq 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 0 \quad ; \quad x \geq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad ; \quad x \geq 0$$

2) on a d'après 1) a) et 1) c) on écrit :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\text{Ainsi : } 0,7 - \frac{0,7^3}{6} \leq \sin 0,7 \leq 0,7$$

$$\Rightarrow 0,64 \leq \sin 0,7 \leq 0,70$$

On prend par choix la moyenne :

$$\sin 0,7 \approx \frac{0,7 + 0,64}{2} = 0,67$$

3) Soit $x \geq 0$ et procède comme suit :

$$\blacksquare x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x - x}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x}{6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$$\blacksquare x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} \rightsquigarrow (1)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \Rightarrow \quad & -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq -\cos x \leq \frac{x^2}{2} - 1 \\ \Rightarrow \quad & 0 < \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow \quad & \frac{2}{x^2} \leq \frac{1}{1 - \cos x} \leq \frac{24}{12x^2 - x^4} \rightsquigarrow (2) \\ (1) \times (2) \Rightarrow \quad & 0 \leq \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \leq \frac{24x^3}{6(12x^2 - x^4)} \\ \Rightarrow \quad & 0 \leq \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \leq \frac{24x}{6(12 - x^2)} \\ \Rightarrow \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \right) = 0 \\ \text{Car : } \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{24x}{6(12 - x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0) = 0 \end{aligned}$$

Solution N° 14 :

$$1) f(x) = \frac{1}{1+x^2} ; \quad n \text{ fois dérivable}$$

$$\blacksquare \quad f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\blacksquare \quad f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$\blacksquare \quad f^{(3)}(x) = \frac{8x^3 - 20x^2 + 8x + 4}{(1+x^2)^4}$$

2) Soit $Q(n)$ la proposition définie par :

$$Q(n) : f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} ; \quad d^{\circ}P_n = n$$

L'initialisation : pour $n = 0$ on a :

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{0+1}} ; \quad d^{\circ}1 = 0$$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose
Que l'instance $Q(n)$ soit vraie.

\blacksquare $Q(n)$ est vraie

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} ; \quad d^{\circ}P_n = n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' = \left(\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \right)' \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - (n+1)(1+x^2)^n(2x)P_n(x)}{(1+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{(1+x^2)^n \cdot (P_n'(x)(1+x^2) - (n+1)(2x)P_n(x))}{(1+x^2)^n \cdot (1+x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2) - (n+1)(2x)P_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{H_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} ; \quad d^{\circ}H_n = (n+1) \end{aligned}$$

$$\text{Car : } d^{\circ}H_n(x) = d^{\circ}(P_n'(x) \cdot (1+x^2))$$

$$= d^{\circ}(P_n'(x)) + d^{\circ}(1+x^2)$$

$$= (n-1) + 2 = n+1$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} ; \quad d^{\circ}P_n = n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 15 :

1) d'abord on remarque que :

$$g(x) \neq g(0) \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

Sinon on aurait les choses suivantes ;

$$\begin{cases} g \text{ est continue sur } [0, x] \\ g \text{ est dérivable sur }]0, x[\\ g(x) = g(0) \end{cases}$$

Alors d'après le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]0, x[\quad ; \quad g'(c) = 0$$

Ceci est une contradiction claire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad g'(x) \neq 0$$

On considère maintenant la fonction :

$$\varphi(t) = f(t) - \left(\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \right) \cdot g(t)$$

t est la variable et x est un paramètre

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \varphi(x) &= f(x) - g(x) \left(\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \right) \\ &= \frac{f(x) \cdot (g(x) - g(0)) - g(x) \cdot (f(x) - f(0))}{g(x) - g(0)} \\ &= \frac{g(x) \cdot f(0) - f(x) \cdot g(0)}{g(x) - g(0)} \rightsquigarrow (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \varphi(0) &= f(0) - g(0) \left(\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \right) \\ &= \frac{f(0) \cdot (g(x) - g(0)) - g(0) \cdot (f(x) - f(0))}{g(x) - g(0)} \end{aligned}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f(0) - f(x) \cdot g(0)}{g(x) - g(0)} \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on déduit que : $\varphi(x) = \varphi(0)$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\\ \varphi(x) = \varphi(0) \end{cases}$$

Donc selon le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]0, x[\quad ; \quad \varphi'(c) = 0$$

$$\varphi'(t) = f'(t) - \left(\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \right) g'(t)$$

Donc : $\exists c \in]0, x[$ tel que :

$$f'(c) - \left(\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \right) g'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2) 1^{ère} Méthode :

Si $g'(x) = 0$ Alors $f'(x) = 0$ Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad f(x) - f(0) = g(x) - g(0) = 0$$

On suppose que : $g'(x) \neq 0$

$$\text{On a : } \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^+ \\ g \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^+ \\ g'(x) \neq 0 \end{cases}$$

Alors d'après la 1^{ère} question on déduit :

$$\exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\blacksquare \quad 0 \leq f'(x) \leq g'(x) \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f'(c) \leq g'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)} \rightsquigarrow (3)$$

■ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \text{ car } x \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - f(0) \geq 0} \rightsquigarrow (4)$$

De (3) et (4) on en déduit que :

$$0 \leq f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$$

2^{ème} Méthode : soit la fonction φ :

$$\varphi(t) = g(t) - g(0) - f(t) + f(0)$$

■ $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{g(x) - g(0) - f(x) + f(0)}{x - 0} = g'(c) - f'(c)$$

■ $g'(x) \geq f'(x) ; \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow g'(c) \geq f'(c) \text{ car } c > 0$$

$$\Rightarrow g'(c) - f'(c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{g(x) - g(0) - f(x) + f(0)}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x) - g(0) - f(x) + f(0) \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x) - g(0) \geq f(x) - f(0)$$

L'idée de l'exercice : Si vous avez une inégalité de type $g'(x) \geq f'(x)$ à démontrer, vous pouvez passer à l'inégalité : $g(x) - g(0) \geq f(x) - f(0)$ en posant $\varphi(t) = g(t) - g(0) - f(t) + f(0)$ et ensuite appliquer le TAF comme indiqué clairement dans cet exercice.

Essayez avec cet exemple :

Sachant que : $\forall x \geq 0 ; \sin x \leq x$

Montrer que : $\forall x \geq 0 ; \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Poser : $\varphi(t) = \cos t - 1 + \frac{t^2}{2}$

Ensuite applique le TAF à φ sur $[0, x]$

Solution N° 16 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - 1^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right) = \frac{0}{\sqrt{0 + 1} + 1} = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - \sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t = \sqrt[3]{x}}} \left(\frac{2t^3 - t - 1}{t^3 - 1} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(2t^2 + 2t + 1)(t - 1)}{(t^2 + t + 1)(t - 1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{2t^2 + 2t + 1}{t^2 + t + 1} \right)$$

$$= \frac{2 + 2 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{5}{3} \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{5}{3}$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{6}}{x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{6 - x^2 - 2}{6(x^2 + 2)(x + 2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4 - x^2}{6(x^2 + 2)(x + 2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{6(x^2 + 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2 - x}{6(x^2 + 2)} \right) = \frac{2 - x}{6(x^2 + 2)} = \frac{1}{9} \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = \frac{1}{9}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - \text{Arctan}\sqrt{x+1} + \frac{\pi}{4}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4}}{x} \right)$$

$$= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4}}{x} \right)$$

■ Soit $\alpha = \text{Arctan}\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \tan \left(\text{Arctan}\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\tan(\text{Arctan}\sqrt{x+1}) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan(\text{Arctan}\sqrt{x+1}) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{1 + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{(x+1) - 1}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} = \frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{Arctan} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} \right)$$

$$\text{Arctan}\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4} = \text{Arctan} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4}}{x} \right) \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} \right) \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} \right)}{\frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)^2}} \right) \\ &\quad \times \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)^2} \\ &= 2 - \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} \\ &= 2 - 1 \times \left(\frac{1}{(\sqrt{0+1} + 1)^2} \right) = \frac{7}{4} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - \sqrt{x+1} - 1}{2x(\sqrt{x+1} + 1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{2x(1 + \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \sqrt{x+1}^2}{2x(1 + \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1 + \sqrt{x+1})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1 + \sqrt{x+1})^2} \\ &= \frac{-1}{2(1 + \sqrt{0+1})^2} = \frac{-1}{8} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{-1}{8}$

Solution N° 17 :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2} - 0}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{(1+x) \cdot \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{(1+x) \cdot \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(1+x) \cdot \sqrt{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ &= -(1+1) \cdot \sqrt{1+1} \cdot (+\infty) = -\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en 1 avec : $(\Delta) : x = 1$.

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 - x} - 0}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt[3]{x - 1} \cdot \sqrt[3]{(x - 1)^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[3]{\frac{x^3 - x}{x - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[3]{\frac{x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[3]{x(x + 1)} \cdot \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt[3]{(x - 1)^2}}} \left(\frac{1}{t} \right) \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1

Géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 avec : $(\Delta) : x = 1$.

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{1 - x}} - 0}{x - 0} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1 - x}} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{-x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0}} = -1 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à gauche en zéro
Et on a : $f'_g(0) = -1$

Géométriquement on dira que la courbe (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à gauche en 0.

avec $(\Delta) : y = f'_g(0)(x - 0) + f(0)$

c-à-d : $(\Delta) : y = -x$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\frac{\tan x}{\sqrt{x}} - 0}{x - 0} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0

Géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 avec : $(\Delta) : x = 0$
c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

$$\begin{aligned} 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - 1}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x - 2} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^{\frac{2}{3}} \cdot (x-2)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} \right)$$

$$= (\sqrt[3]{4}) \cdot \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = (x-2)^{\frac{2}{3}}}} \frac{1}{t} \right) = \sqrt[3]{4} \cdot (+\infty) = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2

Géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 2 avec : $(\Delta) : x = 2$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} \right) - 1}{x - 2} \right)$$

$$= \frac{-2}{\pi} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} \right)}{x - 2} \right)$$

$$= \frac{-2}{\pi} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{2-x}}{x - 2} \right)$$

$$= \frac{-2}{\pi} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} \right) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2-x}} \right)$$

$$= \frac{-2}{\pi} \cdot 1 \cdot (-\infty) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2

Géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 2 avec : $(\Delta) : x = 2$.

Solution N° 18 :

1) Soit $\alpha = \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} a$

$$\blacksquare \tan \alpha = \tan(\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} a)$$

$$= \frac{\tan(\operatorname{Arctan} x) - \tan(\operatorname{Arctan} a)}{1 - \tan(\operatorname{Arctan} x) \cdot \tan(\operatorname{Arctan} a)}$$

$$= \frac{x - a}{1 + ax}$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x - a}{1 + ax} \right)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} a}{x - a} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{x - a}{1 + ax} \right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{x - a}{1 + ax} \right)}{\left(\frac{x - a}{1 + ax} \right)} \cdot \left(\frac{1}{x - a} \right) \cdot \left(\frac{x - a}{1 + ax} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = \frac{x-a}{1+ax}}} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \times \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{1 + xa} \right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{1 + a^2} = \frac{1}{1 + a^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 1}{x - 1} \right) = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left(\frac{\text{Arctan } x - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\text{Arctan } x - \text{Arctan } \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}^2} = \frac{1}{4}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{\text{Arctan } x + \frac{\pi}{6}}{3x + \sqrt{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{\text{Arctan } x + \frac{\pi}{6}}{3 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{\text{Arctan } x - \text{Arctan} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)}{x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{4 \text{Arctan } x + \pi}{x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} 4 \left(\frac{\text{Arctan } x + \frac{\pi}{4}}{x + 1} \right)$$





$$= 4 \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\text{Arctan } x - \text{Arctan}(-1)}{x - (-1)} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{1 + (-1)^2} \right) = 2$$

Solution N° 19 :

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	+
\mathcal{C}_f	<i>concave</i> 	<i>convexe</i> 	<i>concave</i> 	<i>convexe</i> 	

2) On a : $f(x) = 3x + (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\blacksquare f'(x) = 3 - \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$\blacksquare f''(x) = \frac{-1}{2} \left(2(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + 2x \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} (2x) \right)$$

$$= -(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1 + 3(x^2 + 1)^{-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} \left(\frac{1}{3(x^2 + 1)} - 1 \right) < 0$$

Car : $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$

$$\Rightarrow 3(x^2 + 1) \geq 3 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(x^2 + 1)} < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3(x^2 + 1)} - 1 \right) < 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} ; f''(x) < 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Donc la courbe (C_f) est toujours concave et par la suite n'admet aucun point d'inflexion.

$$3) \text{ On a : } f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^2} ; \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^2 - 2(x-1)x^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x-1) - 2x^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^3} ; \text{ réduction} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^3} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Ainsi, on calcule de la même manière la dérivée seconde on trouve :

$$\begin{aligned} \blacksquare f''(x) &= \frac{\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{(x-1)^4} \\ &= \frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}(15x^2 + 10x - 1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{15\left(x + \frac{5 + 2\sqrt{10}}{15}\right)\left(x - \frac{2\sqrt{10} - 5}{15}\right)}{4 \cdot \sqrt[2]{x^3} \cdot (x-1)^4} \end{aligned}$$

On remarque que la quantité suivante est strictement positive pour $x \neq 1$ et $x \geq 0$

$$\frac{15\left(x + \frac{5 + 2\sqrt{10}}{15}\right)}{4 \cdot \sqrt[2]{x^3} \cdot (x-1)^4}$$

$$\Rightarrow \text{signe}(f''(x)) \equiv \text{signe}\left(x - \frac{2\sqrt{10} - 5}{15}\right)$$

On en déduit ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{10}-5}{15}$	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	+
C_f		Concave	convexe	convexe

$$4) \text{ On a : } f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos(2x)}$$

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x) + 2 \sin(2x) \sin^2 x}{\cos^2(2x)}$$

$$= \frac{\sin(2x) \cdot \cos(2x) + 2 \sin(2x) \sin^2 x}{\cos^2(2x)}$$

$$= \frac{\sin(2x) \cdot (\cos(2x) + 2 \sin^2 x)}{\cos^2(2x)}$$

$$= \frac{\sin(2x) \cdot (2 \cos^2 x - 1 - 2 \cos^2 x + 2)}{\cos^2(2x)}$$

$$= \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \frac{1}{\cos(2x)}$$

$$= \frac{\tan(2x)}{\cos(2x)} ; \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \\ x \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$= \frac{\tan(2x)}{\cos(2x)} ; \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right] \\ x \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$f''(x) = \frac{2(1 + \tan^2(2x)) \cos(2x) + 2 \sin(2x) \tan 2x}{\cos^2(2x)}$$

$$= \frac{2}{\cos^2(2x)} ((1 + \tan^2 2x) \cos 2x + \sin 2x \tan 2x)$$


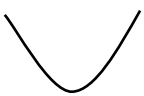

$$= \frac{2}{\cos^2(2x)} \left(\frac{\cos^2 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{\cos^2 2x} \right) \left(\frac{1}{\cos 2x} \right) (\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x))$$

On remarque que la quantité :

$$\frac{2(\cos^2 2x + 2\sin^2 2x)}{\cos^2 2x} \geq 0 \quad ; \quad \forall x \notin \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$



$$\Rightarrow \text{Signe}(f''(x)) \equiv \text{signe} \left(\frac{1}{\cos 2x} \right)$$

x	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{1}{\cos 2x}$	-	+	-	
$f''(x)$	-	+	-	
\mathcal{C}_f	concave 	convexe 	concave 	

5) $f(x) = x - \text{Arctan } x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

■ $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

■ $f''(x) = -\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
\mathcal{C}_f	Concave 	Convexe 	

6) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad \forall x \geq 1$

■ $f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} \quad ; \quad \forall x > 1$

■ $f''(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{3} \right) (x-1)^{-\frac{4}{3}} \quad ; \quad \forall x > 1$

Comme $f''(x) = \frac{-2}{9 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^4}} < 0$

Alors (\mathcal{C}_f) est toujours concave $[1; +\infty[$

Solution N° 20 :

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+x^2} - 2x - 1)$

$$= \sqrt{1+0^2} = 0 = f(0)$$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \text{Arctan } x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$$

Car : $\forall x \leq 0 \quad ; \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{-\pi}{2}$

Comme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

Alors f est continue en zéro.

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x - 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^2) - (2x+1)^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3x^2 - 4x}{x(\sqrt{1+x^2} + 2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3x - 4}{\sqrt{1+x^2} + 2x + 1}$$

$$= \frac{-0 - 4}{\sqrt{1+0} + 0 + 1} = -2 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à droite en zéro et on a $f'_d(0) = -2$.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{\text{Arctan } x}{x} \right) = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à gauche en zéro et on a : $f'_g(0) = 0$.

Remarque : Vous devriez connaître les identités que j'ai utilisé dans mes calculs :

$$\blacksquare \forall x \leq 0 ; \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{-\pi}{2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x} \right) = 1$$

4) comme $f'_d(0) = -2$ et $f'_g(0) = 0$

Alors : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Alors f n'est pas dérivable en zéro.

$$\text{comme : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = -2$$

Alors on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à droite en zéro avec :

$$\begin{aligned} (\Delta) : y &= f'_d(0)(x - 0) + f(0) \\ \Rightarrow (\Delta) : y &= -2x \end{aligned}$$

$$\text{comme : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

Alors géométriquement on dira que (C_f)

Admet une demi-tangente à gauche en 0

Avec : $(D) : y = f'_g(0)(x - 0) + f(0)$

$$\Rightarrow (D) : y = 0$$

C'est-à-dire l'axe des abscisses.

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +} (\sqrt{1+x^2} - 2x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1+x^2) - (2x+1)^2}{\sqrt{1+x^2} + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 - 4x}{\sqrt{1+x^2} + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 - 4x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 - 4x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 - 4x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-3x - 4)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x - 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{-\infty}{\sqrt{1} + 2} = -\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{-3x - 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 2 + \frac{1}{x}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 2 + \frac{1}{x}}} \right) \\ &= \left(\frac{-3 - 0}{\sqrt{1 + 0 + 2 + 0}} \right) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + x^2} - x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + x^2) - (x + 1)^2}{\sqrt{1 + x^2} + x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{1 + x^2} + x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1 + 0} + 1 + 0} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = -1 \end{cases}$$

Donc la droite (Δ): $y = -x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \text{Arctan } x) = -\infty - \left(\frac{-\pi}{2} \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\text{Arctan } x}{x} \right) = 1 - 0^+ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\text{Arctan } x) = - \left(\frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 1x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc la droite (D): $y = x + \frac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $-\infty$

$$6) f(x) = x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) ; \quad \forall x < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + 1} > 0$$

Donc f est strictement \nearrow sur $] -\infty, 0[$

$$\blacksquare f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x - 1 \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 2 = \frac{x - 2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{(x - 2\sqrt{1+x^2})(x + 2\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + 2\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{x^2 - 4 - 4x^2}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + 2\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{-(3x^2 + 4)}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + 2\sqrt{1+x^2})} < 0$$

Donc f est strictement \searrow sur $[0, +\infty[$

7) Comme f est continue et étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $I = [0, +\infty[$ sur son image $f([0, +\infty[)$:

$$f([0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(0) \right[=] -\infty, 0] = J$$

8) On a : $f : I \mapsto J$ est une bijection
Ainsi que : $f^{-1} : J \mapsto I$ encore.

Soit $x \in I$ Alors $\exists ! y \in J$ tel que :

$$\sqrt{1+x^2} - 2x - 1 = y$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 1 = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (y + 2x + 1)^2 = (1 + x^2)$$

$$\Rightarrow y^2 + 4x^2 + 1 + 4xy + 4x + 2y = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + (4y + 4)x + (y^2 + 2y) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned} \Delta &= (4y + 4)^2 - 12(y^2 + 2y) \\ &= 16(y^2 + 2y + 1) - 12(y^2 + 2y) \\ &= 16y^2 + 32y + 16 - 12y^2 - 24y \\ &= 4y^2 + 8y + 16 \\ &= 4(y^2 + 2y + 4) \\ &= (2(y + 2))^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(4y + 4) \pm 2(y + 2)}{6}$$

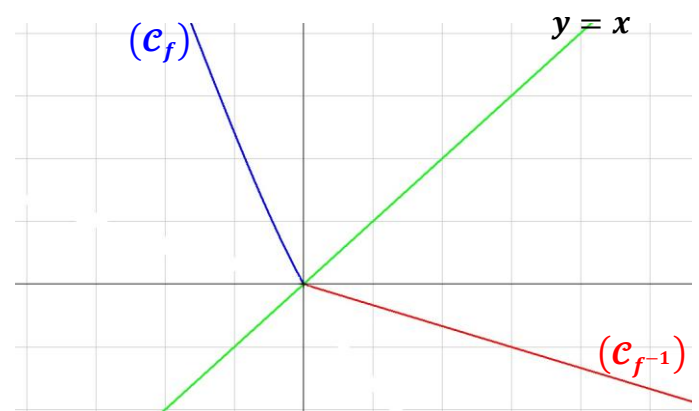
$$\Rightarrow x \in \left\{ -y - 1 ; \frac{-1}{3}y \right\}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{3}y \quad \text{car} \quad x \geq 0$$

$$\text{Donc : } \forall y \in J \quad ; \quad f^{-1}(y) = \frac{-1}{3}y$$

$$\Rightarrow \forall x \in J \quad ; \quad f^{-1}(x) = \frac{-1}{3}x$$

9) la représentation graphique :



Solution N° 21 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - 8}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - 8}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - 8 \right) \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right)}{x \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2}{x \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 4^3}{x \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} - 4 \right) \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^2 + 4 \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right) + 4^2 \right)}{x \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x^{\frac{2}{3}}}{x^1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^2 + 4 \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right) + 4^2}{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x^{\frac{2}{3}-1} \right) \cdot \frac{(4-0)^2 + 4(4-0) + 4^2}{(4-0)^{\frac{3}{2}} + 8} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x^{\frac{-1}{3}} \right) \cdot \left(\frac{16 + 16 + 16}{8 + 8} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right) \times 3 = (-\infty)(3) = -\infty
 \end{aligned}$$

Comme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - 8}{x} \right) = -\infty \notin \mathbb{R}$

c - à - d : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = -\infty \notin \mathbb{R}$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale

à droite en zéro avec (Δ) : $x = 0$ c'est l'axe des ordonnées.

2) Soit $x \in I = [0,8]$ et on procède ainsi :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right)' \\
 &= \frac{3}{2} \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}-1} \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)' \\
 &= \frac{3}{2} \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) \\
 &= - \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \\
 &= -\sqrt{4 - x^{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[3]{x}
 \end{aligned}$$

On remarque que : $\forall x \in I ; -\sqrt{4 - x^{\frac{2}{3}}} < 0$

Et encore que : $\forall x \in I ; \sqrt[3]{x} > 0$

Donc : $\forall x \in I ; f'(x) < 0$

c-à-d : f est strictement \searrow sur I .

3) la fonction f , bien entendu, réalise une bijection de I vers I car continue et étant strictement décroissante sur I et en plus : $f(I) = f([0,8]) = [0,8]$

4) Soit $x \in [0,8]$ Alors $\exists ! y \in [0,8]$ tel que $y = \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$ car f est bijective

$$\Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = 4 - x^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow 4 - y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x \in [0,8]$$

Donc la bijection inverse f^{-1} est définie ainsi :

$$f^{-1} : [0,8] \mapsto [0,8]$$

$$y \mapsto \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = f(y)$$

C'est à dire que $f^{-1} \equiv f$

Donc (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice $y = x$

Et comme $(C_f) \equiv (C_{f^{-1}})$ alors (C_f) est symétrique par rapport à $(\Delta) : y = x$

$$5) f^{-1}(x) = f(x) = \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \left(\frac{f(x)}{x-8}\right) = - \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{8-x}$$

$$= - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = 8-x}} \frac{\left(4 - (8-t)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{t}$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{4 - (8-t)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Calculons : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{4 - (8-t)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}}\right) = l'$$

$$l' = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(4 - (8-t)^{\frac{2}{3}}\right)\left(4^2 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}\right)}{t^{\frac{2}{3}}\left(4^2 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4^3 - \left((8-t)^{\frac{2}{3}}\right)^3}{t^{\frac{2}{3}}\left(4^2 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{64 - (8-t)^2}{t^{\frac{2}{3}}\left(16 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(8 - (8-t))(8 + (8-t))}{t^{\frac{2}{3}}\left(16 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t}{t^{\frac{2}{3}}} \times \frac{16-t}{16 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t^{\frac{1}{3}}\right) \left(\frac{16-t}{16 + 4(8-t)^{\frac{2}{3}} + (8-t)^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$= (0) \left(\frac{16-0}{16 + 4(8-0)^{\frac{2}{3}} + (8-0)^{\frac{4}{3}}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 8^-} \left(\frac{f(x)}{x-8}\right) = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{4 - (8-t)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -0^{\frac{3}{2}} = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 8 et on a aussi $f'_g(8) = 0$.

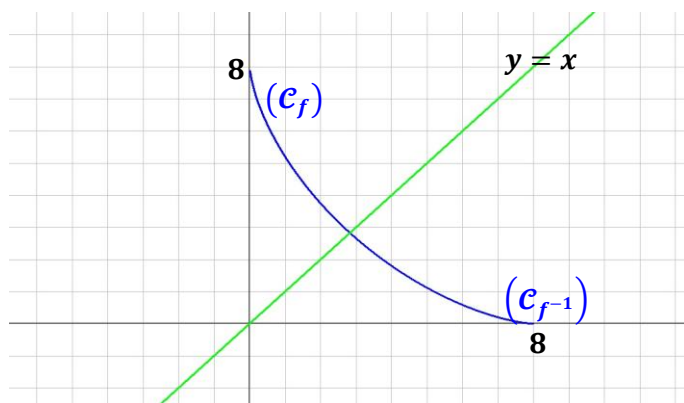
c-à-d que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à gauche en 8 avec :

$$(\Delta) : y = f'_g(8)(x-8) + f(8)$$

$$\Rightarrow (\Delta) : y = 0$$

C'est l'axe des abscisses

6) la représentation graphique :

**Solution N° 22 :**

1) Soit $t > 0$ on a g est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier car somme de deux fonctions bien définies continues et dérivables sur \mathbb{R} . Donc On peut appliquer le TAF sur n'importe quel intervalle de \mathbb{R} on choisit l'intervalle $[0, t^3]$ on trouve alors :

$$\blacksquare \begin{cases} g \text{ est continue sur } [0, t^3] \\ g \text{ est dérivable sur }]0, t^3[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, t^3[; \left(\frac{g(t^3) - g(0)}{t^3 - 0} \right) = g'(c)$$

$$\blacksquare g'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - \sin\left(x^{\frac{1}{3}}\right) \right)'$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cos\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \cos\left(x^{\frac{1}{3}}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{g(t^3) - g(0)}{t^3 - 0} = g'(c)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t - \sin t - 0}{t^3 - 0} \right) = \frac{1}{3} c^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \cos\left(c^{\frac{1}{3}}\right) \right)$$

$$\Rightarrow (t - \sin t) = \frac{1}{3} t^3 \left(\frac{1 - \cos\left(c^{\frac{1}{3}}\right)}{c^{\frac{2}{3}}} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow (t - \sin t) = \frac{1}{3} t^3 \left(\frac{1 - \cos\left(\sqrt[3]{c}\right)}{\sqrt[3]{c^2}} \right)$$

$$3) \text{ On a : } \left(\frac{t - \sin t}{t^3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \cos\left(c^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^2} \right)$$

Si $t \mapsto 0^+$ Alors $t^3 \mapsto 0^+$ d'où $c \mapsto 0^+$
Car on a tout simplement $0 < c < t^3$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t - \sin t}{t^3} \right) = \frac{1}{3} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos\left(c^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Solution N° 23 :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right) = \left(\frac{1 + 0}{\sqrt{2 + 0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2+\frac{2}{x^2}}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{|x| \cdot \sqrt{2+\frac{2}{x^2}}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \cdot \sqrt{2+\frac{2}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}} \right) = \left(\frac{1+0}{-\sqrt{2+0}} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

2) D'abord g est dérivable sur \mathbb{R} comme étant quotient bien définie de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R} et on a $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{2x^2+2} - (\sqrt{2x^2+2})' \cdot (x+1)}{(\sqrt{2x^2+2})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2x^2+2} - \left(\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+2}} \right) (x+1)}{(2x^2+2)} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2x^2+2})^2 - 4x(x+1)}{(2x^2+2) \cdot 2 \cdot \sqrt{2x^2+2}} \\
 &= \frac{2(2x^2+2) - 4x(x+1)}{2 \cdot (2x^2+2) \cdot \sqrt{2x^2+2}} \\
 &= \frac{4-4x}{4 \cdot (x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+2}} \\
 &= \frac{1-x}{(x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ On a : } x \in]0,1[&\Rightarrow 0 < x < 1 \\
 &\Rightarrow 0 < 1-x < 1 \text{ et } x^2+1 > 1 \\
 &\Rightarrow 0 < 1-x < 1 \text{ et } 0 < \frac{1}{x^2+1} < 1 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{x^2+1} < 1 \\ 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x^2+1} \right) < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 < 1-x < 1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow 0 < \frac{(1-x)}{(x^2+1)(\sqrt{2x^2+2})} < \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow 0 < g'(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

4) tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$ $	$-$
$g(x)$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Soit la proposition $P(n) : 0 \leq u_n < 1$

L'initialisation : $0 \leq 0 < 1$

c-à-d $0 \leq u_0 < 1$ Donc $P(0)$ est vraie.

l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

$\blacksquare P(n)$ est vraie $\Rightarrow 0 \leq u_n < 1$

$$\Rightarrow g(0) \leq g(u_n) < g(1) ; g \nearrow [0,1]$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n < 1$

6) la fonction g est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier donc on peut appliquer le TAF sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} On choisit l'intervalle $[u_n ; 1]$ et on trouve alors :

$$\blacksquare \begin{cases} g \text{ est continue sur } [u_n ; 1] \\ g \text{ est dérivable sur }]u_n ; 1[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]u_n ; 1[; \frac{g(1) - g(u_n)}{1 - u_n} = g'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in]u_n ; 1[; \frac{g(u_n) - g(1)}{u_n - 1} = g'(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(u_n) - g(1)}{u_n - 1} \right| = |g'(c)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|g(u_n) - g(1)|}{|u_n - 1|} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |g(u_n) - g(1)| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

$$\blacksquare \text{ On a : } |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} |u_{n-1} - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} |u_{n-2} - 1|$$

⋮

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |u_{n-n+1} - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |u_1 - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - 1|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$\text{Et comme : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

$$\text{Car : } -1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Donc d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - 1| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$$

Solution N° 24 :

1) calcul de quelques quantités :

$f(0)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(1)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
-1	$\frac{25}{8}$	10	$+\infty$

2) la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ car c'est un polynôme. Et on a $\forall x \geq 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 6 > 0 \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	$+\infty$

3) comme f est continue et strictement \nearrow sur $[0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $f([0, +\infty[)$

Avec $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$

Donc $f : [0, +\infty[\mapsto [-1, +\infty[$ est bijective

$$\Rightarrow (\forall y \in [-1, +\infty[)(\exists! x \in [0, +\infty[) : f(x) = y$$

$$\Rightarrow (0 \in [-1, +\infty[)(\exists! \alpha \in [0, +\infty[) : f(\alpha) = 0$$

c-à-d f s'annule une fois et une seule sur $[0, +\infty[$ en un point $\alpha > 0$ car $f(0) \neq 0$

$$\text{On a : } \frac{25}{8} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(\alpha)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) > f^{-1}(f(\alpha)) \quad ; \quad f^{-1} \nearrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} > \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} > \alpha > 0$$

4) On a : $x \in [0, \alpha[\Rightarrow 0 \leq x < \alpha$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(x) < f(\alpha) \quad ; \quad f \nearrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, \alpha[\quad ; \quad f(x) < 0$$

$$\blacksquare x \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow x > \alpha$$

$$\Rightarrow f(x) > f(\alpha) \quad ; \quad f \nearrow$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

Ainsi : $\forall x \in]\alpha, +\infty[\quad ; \quad f(x) > 0$

$$5) \text{ On a : } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 < \frac{1}{4} \\ 0 \leq 4x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 + 4x \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 6 \leq x^2 + 4x + 6 \leq \frac{33}{4} \rightsquigarrow (1)$$

$$6) \text{ On a (1) } \Rightarrow \frac{4}{33} \leq \frac{1}{x^2 + 4x + 6} \leq \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{4}{33} \leq g(x) \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < g(x) < \frac{1}{2}$$

$$7) \text{ On a : } g'(x) = \frac{-2x - 4}{(x^2 + 4x + 6)^2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare (1) \Rightarrow \frac{4}{33} \leq \frac{1}{x^2 + 4x + 6} \leq \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + 4x + 6} \leq \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{(x^2 + 4x + 6)^2} \leq \frac{1}{36} \rightsquigarrow (2)$$

$$\blacksquare x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq -2x \leq 0$$

$$\Rightarrow -5 \leq -2x - 4 \leq -4 < 5$$

$$\Rightarrow |-2x - 4| \leq 5 \rightsquigarrow (3)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare |g'(x)| = \left| \frac{-2x - 4}{(x^2 + 4x + 6)^2} \right| \leq 5 \cdot \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] ; |g'(x)| \leq \frac{5}{36}$$

8) Soit la proposition $P(n) : u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

L'initialisation :

$$0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow P(0) \text{ est vraie}$$

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 0 < g(u_n) < \frac{1}{2} \text{ selon Quest 6)}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\subset \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$9) f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + 4\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + 4\alpha^2 + 6\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 + 4\alpha + 6) = 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{1}{\alpha^2 + 4\alpha + 6} \right)$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

Remarque : $\alpha^2 + 4\alpha + 6 \neq 0$

$$\text{car : } 6 < \alpha^2 + 4\alpha + 6 < \frac{33}{4} \rightsquigarrow (1)$$

On a g est une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} Donc On peut appliquer le TAF à g sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} on choisit l'intervalle $[\alpha, u_n]$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} g \text{ est continue sur } [\alpha, u_n] \\ g \text{ est dérivable sur }]\alpha, u_n[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} = g'(c)$$

Comme $c \in]\alpha, u_n[\subset \left]0; \frac{1}{2}\right[$ Alors selon Q7

$$\left| \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{5}{36} \Rightarrow \frac{|g(u_n) - g(\alpha)|}{|u_n - \alpha|} \leq \frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{5}{36} |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{36} |u_n - \alpha| \rightsquigarrow (4)$$

10) soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit

$$(4) \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{36} |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{36} \frac{5}{36} |u_{n-1} - \alpha|$$

\vdots

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{5}{36} \right)^n |u_{n-n+1} - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{5}{36}\right)^{n+1} |u_0 - 1|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{36}\right)^n \rightsquigarrow (5)$$

$$\blacksquare -1 < \frac{5}{36} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{36}\right)^n = 0$$

Donc d'après le critère de comparaison des suites et selon l'encadrement (5) on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

Solution N° 25 :

Pour cet exercice, quand On aurait besoin de déterminer le nombre dérivé $f'(x_0)$ on peut : ou bien appliquer directement les règles de dérivation sur des fonctions usuelles si c'est possible ou encore d'utiliser la définition dans le cas échéant.

$$1) \blacksquare f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi (Δ) la tangente à (C_f) en -1 est donnée par l'équation suivante :

$$(\Delta) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$\Rightarrow (\Delta) : y = \frac{-\sqrt{2}}{2}(x-1)$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0^- \\ t = x+1}} \sqrt{\frac{t-2}{t}}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \sqrt{1 - \frac{2}{t}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale en x_0 avec $(\Delta) : x = -1$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \right) = n' \text{ existe pas}$$

Car f n'est pas définie à droite en -1 c'est-à-dire que f n'existe pas sur $] -1, 1[$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{|x^2-4| - 0}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{|x-2| \cdot |x+2|}{(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x+2) = 2+2 = 4 = f'_d(2) \in \mathbb{R}$$

Ainsi (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à droite en 2 avec :

$$(\Delta) : y = f'_d(2)(x-2) + f(2)$$

$$\Rightarrow (\Delta) : y = 4x - 8$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{|x^2-4| - 0}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{|x-2| \cdot |x+2|}{(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} -(x + 2) = -4 = f'_g(2) \in \mathbb{R}$$

Ainsi (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente (Δ') à gauche en 2 avec :

$$\begin{aligned} (\Delta') : y &= f'_g(2)(x - 2) + f(2) \\ \Rightarrow (\Delta') : y &= -4x + 8 \end{aligned}$$

$$4) \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0 + 1} + 1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc (\mathcal{C}_f) admet une tangente (Δ) en 0 avec $(\Delta) : f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\Rightarrow (\Delta) : y = \frac{1}{2}x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|} \cdot \sin(x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{|x|} \cdot \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{|x|} \right) \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x^2}} \frac{\sin t}{t} \right)$$

$$= 0 \times 1 = 0 = f'(0) \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en 0 et (\mathcal{C}_f) admet par la suite une tangente (Δ) en 0 avec : $(\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
C'est-à-dire : $(\Delta) : y = 0$ axe des absci

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(t - 2)^2 + (t - 2) - 2}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{t^2 - 3t}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{t}}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t| \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{t}}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{t}}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} -\sqrt{1 - \frac{3}{t}} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -2 D'où (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en -2

Avec : $(\Delta) : x = -2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \right) = n' \text{ existe pas}$$

Car f n'est pas définie à droite en -2

Car si $-2 < x < 1$ alors $x^2 + x - 2 < 0$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\sqrt{(t+1)^2 + (t+1) - 2}}{t}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\sqrt{t^2 + 3t}}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{t}}}{t}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{|t| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{t}}}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{t \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{t}}}{t}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \sqrt{1 + \frac{3}{t}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 et $(\Delta) : x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = n' \text{ existe pas}$$

Car f n'est pas définie à gauche en 1

Car si $-2 < x < 1$ alors $x^2 + x - 2 < 0$

Solution N° 26 :

La règle de dérivation qu'on va adopter le plus souvent est la suivante :

$$(f(g(x)))' = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$1) f(x) = \text{Arctan} \sqrt{x}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{-1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \right) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{x}(x+1)} \quad ; \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} ; x > 0 \text{ et } x \neq -1\} =]0, +\infty[$$

$$2) f(x) = \text{Arctan} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' \times \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 + 1})^2} \right)$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{1}{1 + x^2 + 1}$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Et on a : $D_{f'} = \mathbb{R}$

$$3) f(x) = \sqrt{\text{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{(\text{Arctan} x)'}{2\sqrt{\text{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{\text{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\text{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R} ; \text{Arctan} x - \frac{\pi}{4} > 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} ; \text{Arctan} x > \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; \text{Arctan } x > \text{Arctan } 1 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x > 1 \} =]1, +\infty[$$

$$4) f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' \times \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2} \right) ; \forall x \neq 1$$

$$= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 2x + 2} \right)$$

$$= \frac{-3}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 2x + 2} \right)$$

$$= \frac{-3}{5x^2 + 2x + 2} ; \forall x \neq 1$$

On remarque que $5x^2 + 2x + 2 \neq 0$

Car $\Delta = -36 < 0$

Étudions maintenant la dérivabilité en 1 :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Arctan} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \frac{2x+1}{x-1}}} \text{Arctan } t = \frac{\pi}{2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arctan} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t = \frac{2x+1}{x-1}}} \text{Arctan } t = \frac{-\pi}{2}$$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Alors f n'est pas continue en 1 c'est à dire que f n'est pas dérivable en 1.

$$\forall x \neq 1 ; f'(x) = \frac{-3}{5x^2 + 2x + 2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) Rappel :

$$\forall x \geq 0 ; \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\blacksquare f(x) = \text{Arctan} \sqrt{x} + \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x}} ; \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\pi}{2} \right)' = 0 ; \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ \text{ et } D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$6) f(x) = \sqrt{\text{Arctan } x}$$

$$f'(x) = \frac{(\text{Arctan } x)'}{2\sqrt{\text{Arctan } x}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{Arctan } x} \sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\text{Arctan } x}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{ x \in \mathbb{R} ; \text{Arctan } x > 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x > 0 \} =]0, +\infty[$$

Solution N° 27 :

1) On a f est continue et dérivable sur $]-\infty, 2]$ car somme de deux fonctions continues et dérivables sur $]-\infty, 2]$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - 1 = - \left(\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + 1 \right) < 0$$

Donc f est strictement \searrow sur $]-\infty, 2]$.

Ainsi f réalise une bijection de I vers son image $f(I)$ car continue et strictement monotone.

$$f(I) = f(]-\infty, 2]) = [f(2); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2-x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2-x} - x)(\sqrt{2-x} + x)}{(\sqrt{2-x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - x^2}{\left(\sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right)} + x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 - x - x^2}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 - x - x^2}{|x| \cdot \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 - x - x^2}{-x \cdot \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{2}{x} - 1 - x\right)}{x \left(1 - \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{2}{x} - 1 - x}{1 - \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}} \right) \\ &= \left(\frac{0 - 1 + \infty}{1 - \sqrt{0 - 0}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(I) = [-2, +\infty[= J$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) On a la fonction f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et on encore :

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + 1\right)$$

Je réclame que $f'(x) \neq 0$; $\forall x < 2$

$$\text{Sinon on aurait : } \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = -1 < 0$$

c'est une contradiction car $\frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]-\infty, 2[\\ f' \neq 0 ; \forall x \in]-\infty, 2[\\ f \text{ est bijective} \end{cases}$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]-2, +\infty[$

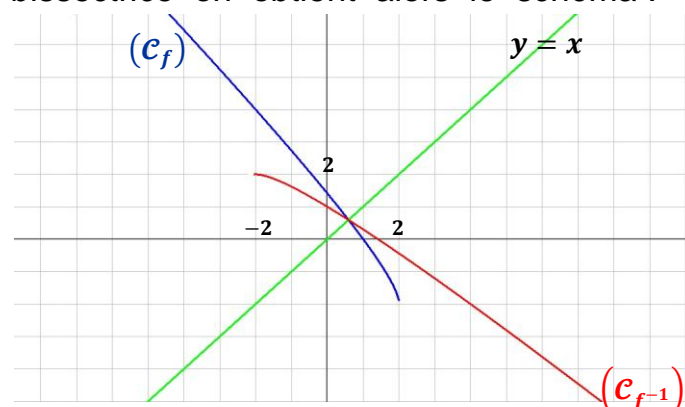
$$\text{Et encore que } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\text{Ainsi : } (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)}$$

$$\text{On a : } f'(1) = -\left(\frac{1}{2\sqrt{2-1}} + 1\right) = \frac{-3}{2}$$

$$D'où : (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{-2}{3}$$

3) Pour la construction géométrique on commence par tracer la courbe (C_f) selon l'étude précédente puis on trace son symétrique par rapport à la 1^{ère} bissectrice on obtient alors le schéma :



You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) comme $f :]-\infty, 2] \mapsto [-2, +\infty[$ est une application bijective Alors :

$$(\forall y \in [-2, +\infty[) (\exists ! x \in]-\infty, 2]) : f(x) = y$$

$$\blacksquare f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2-x} - x = y$$

$$\Leftrightarrow y + x = \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (y+x)^2 = 2-x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 + 2xy = 2-x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2y+1)x + (y^2-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(2y+1) \pm \sqrt{4y+9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -y - \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = -y - \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{9}{4}}$$

Car $f(1) = 0$ Donc $f^{-1}(0) = 1$

Il suffit de remplacer y par 0 et de voir l'expression qui donnerait $x = 1$.

La conclusion :

$$f :]-\infty, 2] \mapsto [-2, +\infty[\\ x \mapsto \sqrt{2-x} - x$$

$$f^{-1} : [-2, +\infty[\mapsto]-\infty, 2]$$

$$y \mapsto -y - \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{9}{4}}$$

Solution N° 28 :

$$1) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} ; \forall x \geq 0$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{x \in D_f ; x > 0\} =]0, +\infty[$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{(1-\cos x)} = (1-\cos x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; (1-\cos x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1}{3}(1-\cos x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (\sin x) \\ = \frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{x \in D_f ; 1-\cos x > 0\}$$

$$= \{x \in D_f ; \cos x < 1\}$$

$$= \{x \in D_f ; \cos x \neq 1\}$$

$$= \{x \in D_f ; x \neq 0[2\pi]\}$$

$$3) f(x) = (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} ; \forall x \notin [0,1]$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x - 1) = \frac{2(2x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - x}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{x \in D_f ; x^2 - x \neq 0\}$$

$$= \{x \in D_f ; x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus [0,1]$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{13}{6}} ; \forall x \geq 0$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{13}{6} x^{\frac{7}{6}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{x \in D_f ; x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$5) f(x) = \text{Arctan}(\sqrt[4]{x+1}) ; \forall x \in [-1, +\infty[\\ = \text{Arctan}\left((x+1)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{4}}}{1 + \left((x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^2} \\ = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(x+1)^3} \cdot (1 + \sqrt{x+1})}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{x \in D_f ; x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$$

$$6) f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \\ = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} ; \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{x \in D_f ; x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\} \\ = \{x \in D_f ; x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\} =]1, +\infty[$$

Solution N° 29 :

On a pour tout $n \geq 2$ on a :

$$F(x) = \sqrt[n]{1+nx} - 1 = (1+nx)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$1) D_F = \left\{ x \in \mathbb{R} ; \begin{cases} (1+nx) \in \mathbb{R} \text{ si } n \text{ impair} \\ (1+nx) \geq 0 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ si } n \text{ impair} \\ x \geq \frac{-1}{n} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases} \right\}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R} ; \text{ si } n \text{ impair} \\ \left[\frac{-1}{n} ; +\infty[; \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1}{n} \\ x > \frac{-1}{n}}} \left(\frac{F(x) - F\left(\frac{-1}{n}\right)}{x + \frac{1}{n}} \right) \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1}{n} \\ x > \frac{-1}{n}}} \left(\frac{(1+nx)^{\frac{1}{n}} - 1 - 0}{x + \frac{1}{n}} \right) \\ = \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x + \frac{1}{n}}} \left(\frac{(nt)^{\frac{1}{n}} - 1}{t} \right) \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left((nt)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \sum_0^{n-1} \left((nt)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-k-1}}{t \cdot \sum_0^{n-1} \left((nt)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-k-1}} \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left((nt)^{\frac{1}{n}} \right)^n - 1^n}{t \cdot \sum_0^{n-1} \left((nt)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-k-1}} \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{nt - 1}{t \cdot \sum_0^{n-1} \left((nt)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-k-1}} \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \right) \left(\frac{nt - 1}{\sum_0^{n-1} \left((nt)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-k-1}} \right) \\ = \left(\frac{1}{0^+} \right) \left(\frac{0 - 1}{0 + 0 + \dots + 0 + 1} \right) \\ = (+\infty)(-1) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc F n'est pas dérivable à droite en $\frac{-1}{n}$ et ainsi (\mathcal{C}_F) admet une demi-tangente (Δ) à droite en $\frac{-1}{n}$ et $(\Delta) : x = \frac{-1}{n}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) sur $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$ la fonction F est dérivable comme étant somme de deux fonctions dérivables. La fonction $\sqrt[n]{1+nx}$ est dérivable toujours $\forall n \geq 2$ sur $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions dérivables sur $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$

$$\begin{aligned} 4) \quad F'(x) &= \left((1+nx)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)' \\ &= \frac{1}{n} (1+nx)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (n) \\ &= (1+nx)^{\frac{1}{n}} \cdot (1+nx)^{-1} \\ &= \frac{\sqrt[n]{1+nx}}{1+nx} \end{aligned}$$

On remarque que $x > \frac{-1}{n}$ Alors on tire :

$$\frac{\sqrt[n]{1+nx}}{1+nx} > 0$$

C'est-à-dire que F est strictement \nearrow sur $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$ Donc F réalise une bijection de $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$ sur son image $F\left(\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[\right)$

$$\begin{aligned} F\left(\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[\right) &= \left] F\left(\frac{-1}{n}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right[\\ &=]-1, +\infty[= I \end{aligned}$$

5) On a déjà vu que F est continue sur $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$ et F est dérivable sur $\left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$ et $F'(x) = \frac{\sqrt[n]{1+nx}}{1+nx} > 0$; $\forall x > \frac{-1}{n}$

$$c - \grave{a} - d : \quad F' \neq 0 \quad \text{sur} \quad \left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

D'où F^{-1} est dérivable sur $] -1, +\infty[$

6) soit $x \in] -1, +\infty[$ on a :

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}$$

Soit : $\alpha = F^{-1}(x) \Leftrightarrow F(\alpha) = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{1+\alpha n} - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{1+\alpha n} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha n = (x + 1)^n$$

$$\Leftrightarrow \alpha n = (x + 1)^n - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n} ((x + 1)^n - 1) \in \left] \frac{-1}{n}, +\infty \right[$$

$$\Leftrightarrow F^{-1}(x) = \frac{1}{n} ((x + 1)^n - 1) ; \quad \forall x > -1$$

$$\Leftrightarrow (F^{-1}(x))' = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+nF^{-1}(x))^{\frac{1}{n}}}{(1+nF^{-1}(x))}} = \frac{1+n \cdot F^{-1}(x)}{(1+nF^{-1}(x))^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1+(x+1)^n-1}{(1+(x+1)^n-1)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{(x+1)^n}{x+1} = (x+1)^{n-1} ; \quad \forall x > -1$$

Remarque : On peut facilement calculer la quantité $(F^{-1}(x))'$ en utilisant l'expression de $F'(x)$ et les règles de dérivation :

$$\forall x > -1 ; F^{-1}(x) = \frac{1}{n}((x+1)^n - 1)$$

$$(F^{-1}(x))' = \frac{1}{n}(n(x+1)^{n-1}) = (x+1)^{n-1}$$

7) On raisonne par récurrence que la proposition $P(n) : (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$

L'initialisation : pour $n = 0$, On a :

$$(1+\alpha)^0 \geq 1+0\alpha ; \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$$

$$\Rightarrow (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+\alpha+n\alpha+\alpha^2n}$$

$$\blacksquare (1+\alpha+n\alpha+\alpha^2n) - (1+\alpha+n\alpha) = \alpha^2n \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+\alpha+n\alpha+\alpha^2n \geq 1+\alpha+n\alpha$$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha ; \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(n) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ ; (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha \rightsquigarrow (*)$$

8) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, et on procède ainsi :

$$\blacksquare (1+x)^n \geq 1+nx \quad ; \text{ selon } (*)$$

$$\Rightarrow (1+x)^n - 1 \geq 1+nx - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}((1+x)^n - 1) \geq \frac{1+nx-1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\Rightarrow F^{-1}(x) \geq x ; \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\Rightarrow F(F^{-1}(x)) \geq F(x) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq F(x) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$$

Solution N° 30 :

$$1) f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} ; \forall x \geq 1$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} - 1}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x - 1} \right) - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x - 1} \right)$$

$$= \left(x^{\frac{2}{3}} \right)'_{/x=1} - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1)^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right)'_{/x=1} - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=x-1}} t^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} - (+\infty) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 et $(\Delta) : x = 1$.

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = n' \text{ existe pas}$$

Car f n'est pas définie à gauche en 1

Car si $x < 1$ alors $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ n'existe pas

La conclusion : f n'est pas dérivable en 1

2) D'abord f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car c'est une somme bien définie de deux fonctions définies et dérivables sur $]1, +\infty[$ soit $x > 1$ et on procède ainsi :

$$\blacksquare f'(x) = \frac{2}{3}x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\blacksquare x \in]1, +\infty[\Rightarrow x > 1$$

$$\Rightarrow x > x-1$$

$$\Rightarrow 0 < x^{-1} < (x-1)^{-1} ; x \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 < (x^{-1})^{\frac{1}{3}} < ((x-1)^{-1})^{\frac{1}{3}} ; x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} < (x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(x^{-\frac{1}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}}\right) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 ; \forall x > 1$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \searrow \text{ sur }]1, +\infty[$$

3) On a f est continue et strictement \searrow sur $]1, +\infty[$ Donc f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur son image $f(]1, +\infty[)$.

$$f(]1, +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right[$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right) \left(x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}} \right)}{\left(x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - \left((x-1)^{\frac{2}{3}} \right)^3}{\left(x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - (x-1)^2}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x - (x-1)) \cdot (x + (x-1))}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2 - x)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1 - x^{-1})^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1 - x^{-1})^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x^{\frac{4}{3}} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{4}{3}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty} \right) \left(\frac{2 - 0}{1 + (1 - 0)^{\frac{2}{3}} + (1 - 0)^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= (0) \left(\frac{2 - 0}{1 + 1 + 1} \right) = 0$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \frac{2}{1^{\frac{2}{3}}} - (1-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{1^{\frac{2}{3}}} - 0^{\frac{2}{3}} = 1$$

La conclusion :

$f :]1, +\infty[\mapsto]0,1[$ est une bijection

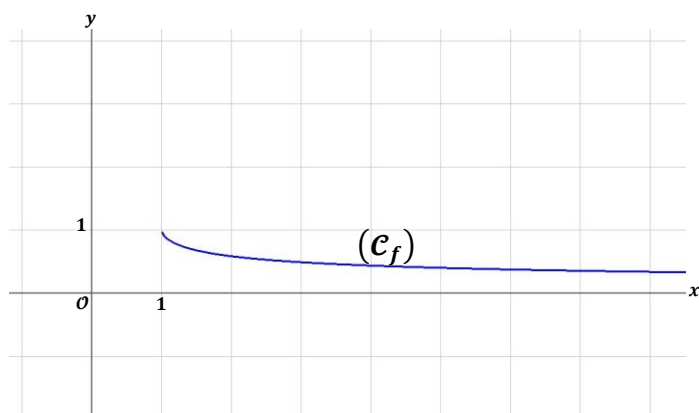
4) comme $f :]1, +\infty[\mapsto]0,1[$ est bijective
Alors d'après la définition d'une application bijective on écrit :

$$(\forall y \in]0,1[) (\exists ! x \in]1, +\infty[) : f(x) = y$$

$$\left(\text{pour } \frac{1}{2} \in]0,1[\right) (\exists ! \alpha > 1) : f(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right) = 0$$

Donc l'axe des abscisses (Δ) : $y = 0$
est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6) la représentation graphique :**Solution N° 31 :**

$$1) g(x) = x \cos x - \sin x$$

La fonction g est dérivable sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$
Car c'est une somme bien définie de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R} . Et on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare g'(x) &= \cos x - x \sin x - \cos x ; x \in \mathbb{R} \\ &= -x \cdot \sin x ; x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare x \in [0, \pi] &\Rightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } x \geq 0 \\ &\Rightarrow -x \cdot \sin x \leq 0 \\ &\Rightarrow g'(x) \leq 0 ; x \in [0, \pi] \\ &\Rightarrow g \text{ est } \searrow \text{ sur } [0, \pi] \end{aligned}$$

x	0	π
$f'(x)$	-	
$f(x)$	0	$-\pi$

$$\begin{aligned} 2) x \in [0, \pi] &\Rightarrow 0 \leq x \leq \pi \\ &\Rightarrow g(\pi) \leq g(x) \leq g(0) ; f \text{ est } \searrow \\ &\Rightarrow -\pi \leq g(x) \leq 0 \\ &\Rightarrow g(x) \leq 0 ; \forall x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

3) la fonction f est dérivable sur $]0, \pi[$
car quotient de deux fonctions bien définies et dérivables sur $]0, \pi[$.

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0$$

Donc f est décroissante sur $]0, \pi[$.

4) Soit $\varphi(t) = t - \sin t ; \forall t \in \mathbb{R}^+$
Soit $x \geq 0$ on a φ est une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} car c'est la somme de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R} . Donc on peut appliquer le TAF à $f(x)$ sur n'importe quel intervalle de \mathbb{R} .

$$\blacksquare \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x - \sin x - 0}{x - 0} \right) = 1 - \cos c$$

$$\Rightarrow \frac{x - \sin x}{x} = 1 - \cos c > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x - \sin x}{x} > 0$$

$$\Rightarrow x - \sin x > 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x - \sin x \geq 0} \quad ; \quad \text{car } 0 - \sin 0 = 0$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; x - \sin x \geq 0$

$$5) \psi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\psi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\psi''(x) = -\sin x + x \quad ; \quad x \geq 0$$

$$6) x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \psi''(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \psi' \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \psi'(x) \geq \psi'(0)$$

$$\Rightarrow \psi'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \psi \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \psi(x) \geq \psi(0) \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0}$$

7) On peut démontrer facilement que :

$$\left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{\sin x - x}{x^2}$$

Ce sont juste des calculs à maintenir.

$$\blacksquare \psi(x) \geq 0 \Rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \sin x - x \geq \frac{-x^3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{x^2} \geq \frac{\sin x - x}{x^2} \geq \frac{-x}{6}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \geq \frac{-x}{6}$$

$$\text{Comme : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{-x}{6} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 0 = 0$$

Alors d'après le critère de comparaison on écrit :

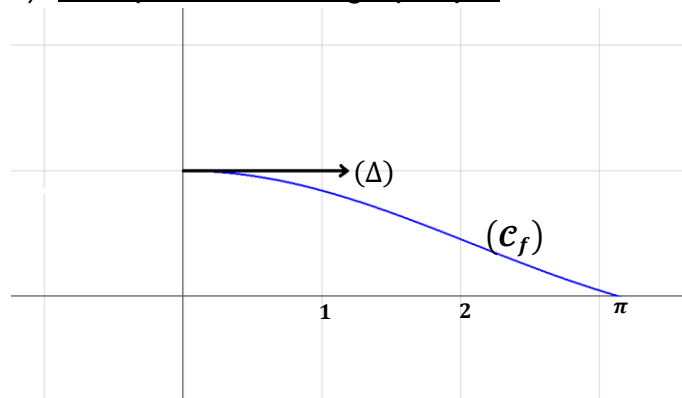
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = 0$. Géométriquement on dira que (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente horizontale (Δ) à droite en 0 avec :

$$(\Delta) : y = f'_d(0)(x - 0) + f(0)$$

$$c - \text{à} - d : (\Delta) : y = 1$$

8) la représentation graphique :



Solution N° 32 :

1) Les premiers termes de la suite :

u_0	u_1	u_2	u_3
0	1	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2}}$

2) Soit la proposition $P(n)$ définie par :

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$$

L'initialisation : On a : $0 \leq 0 \leq 2$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ on a la chose suivante :

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \left((x+1)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0 \end{aligned}$$

Donc f est strictement \nearrow sur $[0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow 0 \leq u_n \leq 2 \\ \Rightarrow f(0) &\leq f(u_n) \leq f(2) \quad ; \quad f \nearrow \\ \Rightarrow 1 &\leq f(u_n) \leq \sqrt[3]{3} \\ \Rightarrow 0 < 1 &\leq f(u_n) \leq \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8} \\ \Rightarrow 0 &\leq f(u_n) \leq 2 \\ \Rightarrow 0 &\leq u_{n+1} \leq 2 \\ \Rightarrow P(n+1) &\text{ est vraie} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 2$

3) Soit la proposition définie ainsi :

$$Q(n) : u_{n+1} > u_n$$

L'initialisation : On a : $1 > 0 \Rightarrow u_1 > u_0$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} \blacksquare Q(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_{n+1} > u_n \\ \Rightarrow u_{n+1} + 1 &> u_n + 1 \\ \Rightarrow \sqrt[3]{u_{n+1} + 1} &> \sqrt[3]{u_n + 1} \\ \Rightarrow u_{n+2} &> u_{n+1} \\ \Rightarrow Q(n+1) &\text{ est vraie} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$

c-à-d : que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement \nearrow

4) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente car croissante et étant majorée par 2.

$$\text{Soit : } \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$$

5) On a g est dérivable sur \mathbb{R} car somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \blacksquare g'(x) &= 1 - \frac{1}{3} (1+x)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 1 - \frac{1}{3(1+x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3(1+x)^{\frac{2}{3}} - 1}{3(1+x)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}} - 1\right)\left(9(1+x)^{\frac{4}{3}} + 3(1+x)^{\frac{2}{3}} + 1\right)}{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}}\right)\left(9(1+x)^{\frac{4}{3}} + 3(1+x)^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \\
&= \frac{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 1^3}{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}}\right)\left(9(1+x)^{\frac{4}{3}} + 3(1+x)^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \\
&= \frac{27(1+x)^2 - 1}{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}}\right)\left(9(1+x)^{\frac{4}{3}} + 3(1+x)^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{27}(1+x)\right)^2 - 1^2}{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}}\right)\left(9(1+x)^{\frac{4}{3}} + 3(1+x)^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \\
&= \frac{(\sqrt{27}(1+x) - 1)(\sqrt{27}(1+x) + 1)}{\left(3(1+x)^{\frac{2}{3}}\right)\left(9(1+x)^{\frac{4}{3}} + 3(1+x)^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \\
\Rightarrow \text{Signe}(g'(x)) &\equiv \text{Signe}(\sqrt{27}(1+x) - 1)
\end{aligned}$$

x	-1	$\beta = \frac{1-\sqrt{27}}{\sqrt{27}}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	$\alpha = g(\beta) = \frac{-2-\sqrt{27}}{\sqrt{27}}$	$+\infty$

D'après ce tableau on remarque que g est continue et strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$. Donc g réalise une bijection de $[\beta, +\infty[$ vers $g([\beta, +\infty[) = [\alpha, +\infty[$.

Ainsi $g : [\beta, +\infty[\mapsto [\alpha, +\infty[$ est une application bijective. D'où l'on tire alors :

$$(\forall y \in [\alpha, +\infty[) (\exists ! x \in [\beta, +\infty[) : g(x) = y$$

$$(0 \in [\alpha, +\infty[) (\exists ! x \in [\beta, +\infty[) : g(x) = 0$$

C'est à dire que l'équation $g(x) = 0$

admet une solution dans $[\beta, +\infty[$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue sur \mathbb{R} et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α alors ce nombre α vérifie l'équation suivante :

$$\blacksquare f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - f(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) = 0$$

D'où la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est ce même nombre α .

Solution N° 33 :

1) la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 1}$ est continue sur l'intervalle I car c'est une composition bien définie de deux fonctions continues sur I . Donc f est continue sur I comme étant produit de deux fonctions continue sur I .

2) D'abord f est dérivable sur I car produit bien défini de deux fonctions dérivables sur I . soit $x \in I$ et on a :

$$\begin{aligned}
\blacksquare f'(x) &= \left(x(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}\right)' \\
&= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2) \\
&= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + x^3(x^3 + 1)^{-1}) \\
&= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{x^3}{x^3 + 1}\right) \\
&= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{x^3 + 1 - 1}{x^3 + 1}\right) \\
&= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + 1 - \frac{1}{x^3 + 1}\right)
\end{aligned}$$

$$= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2 - \frac{1}{x^3 + 1}\right)$$

$$= (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(x) \quad ; \quad \varphi(x) = 2 - \frac{1}{x^3 + 1}$$

La fonction φ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I : \varphi'(x) = (2 - (x^3 + 1)^{-1})'$$

$$= -(-(x^3 + 1)^{-2} \cdot (3x^2))$$

$$= \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2} \geq 0$$

Donc la fonction φ garde un même sens de variations qui est la croissance sur l'intervalle I .

$$\Rightarrow \forall x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \varphi(x) \geq \varphi\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in I \quad ; \quad \varphi(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in I \quad ; \quad (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in I \quad ; \quad f'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } I$$

3) comme f est continue et étant strictement monotone (croissante) sur I alors f réalise une bijection de I vers son image $f(I)$.

$$\blacksquare f(I) = f\left(\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; +\infty\right)\right)$$

$$= \left[f\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$= \left[-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} ; +\infty \right[$$

Ainsi l'application suivante est bijective :

$$f : \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; +\infty\right[\mapsto \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; +\infty\right[$$

Alors d'après la définition d'une application bijective on écrit :

$$\left(\forall y \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; +\infty\right)\right) \left(\exists! x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; +\infty\right)\right) \\ : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y = x(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow y^3 = x^3(x^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow y^3 = t(t + 1) \quad ; \quad t = x^3 \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y^3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y^3}}{2} \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y^3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4y^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Ainsi f^{-1} est définie comme suit :

$$f^{-1} : \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{4}} ; +\infty \right[\mapsto \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} ; +\infty \right[$$

$$y \mapsto \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4y^3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

On peut travailler avec la variable x au lieu de y car toutes les deux sont des variables muettes peu importe laquelle est mise comme variable.

5) Soit $x \in I$ et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) - x &= x(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - x \\ &= x \left((x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \\ &= \frac{x \left((x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \left((x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)}{\left((x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \frac{x \left(\left((x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - 1^3 \right)}{\left((x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \frac{x(x^3 + 1 - 1)}{\left((x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \frac{x^4}{\left((x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in I ; f(x) - x \geq 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\forall x \in I ; f(x) \geq x} \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) Soit la proposition suivante :

$$Q(n) : -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq u_n \leq 0$$

L'initialisation : On a d'après l'énoncé de l'exercice : $u_0 \leq 0$ et $u_0 \in I$.

Donc : $-\sqrt[3]{1/2} \leq u_0 \leq 0$.

c-à-d que l'instance $Q(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ est vraie.

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow f \left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) \leq f(u_n) \leq f(0) ; f \nearrow I$$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \leq f(u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \leq f(u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq u_{n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi} : \begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq u_n \leq 0}$$

7) Dans le cas où $u_0 \leq 0$ on a déjà vu que : $-\sqrt[3]{1/2} \leq u_n \leq 0$

On a de plus : $\forall x \in I ; x \leq f(x)$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq f(u_n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_{n+1}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow \boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$$

Car croissante et étant majorée par 0.

8) On suppose maintenant que $u_0 > 0$

Soit : $\psi(x) = f(x) - x ; \forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\blacksquare \psi'(x) = f'(x) - 1 = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(x) - 1$$

$$\blacksquare \forall x \in \mathbb{R}^+ ; \begin{cases} \varphi(x) \geq 1 \\ (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(x) \geq 1 ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(x) - 1 \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \psi'(x) \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

\blacksquare Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 > 0$

$$\Rightarrow u_n \geq u_0 \text{ car } (u_n)_n \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow \psi(u_n) \geq \psi(u_0) \text{ car } \psi \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow f(u_n) - u_n \geq f(u_0) - u_0 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq u_0 \left(\sqrt[3]{u_0^3 + 1} - 1 \right)$$

9) On a : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq a$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} u_n - u_{n-1} \geq a \\ u_{n-1} - u_{n-2} \geq a \\ \vdots \\ u_1 - u_0 \geq a \end{cases}$$

On additionne ces inégalités côte à côte on obtient, en prenant en considération les termes qui vont disparaître dans le côté de gauche, on obtient :

$$u_n - u_0 \geq na ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall u_0 > 0 \end{matrix} ; u_n \geq u_0 + na}$$

10) Comme $u_0 > 0$ Alors $a > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_0 + na) = +\infty$$

Et comme $u_n \geq (u_0 + na)$ Alors selon le critère de comparaison on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty ; u_0 > 0$$

La conclusion :

$$\begin{cases} u_0 \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R}^- \\ u_0 > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty \end{cases}$$

Solution N° 34 :

1) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ on a :

$$f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

C'est clair que f est continue car quotient de deux fonctions continues et bien définies sur \mathbb{R}^* .

Examinons pour le moment la continuité de la fonction f en zéro :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right) &= 0 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en zéro ainsi sur \mathbb{R} tout entier.

2) D'abord la fonction f est impaire car son domaine de définition est symétrique C'est-à-dire que $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} ; -x \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} \text{Et encore : } f(-x) &= \frac{-1 + \sqrt{1 + (-1)^2}}{-x} \\ &= - \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) = -f(x) \end{aligned}$$

Donc f est bien évidemment impaire et par la suite sa courbe représentative (\mathcal{C}_f) est symétrique par rapport à $\mathcal{O}(0,0)$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1+0+0}} \right) = 1$$

3) Sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ la fonction f est dérivable car quotient bien défini ($x \neq 0$) de deux fonctions bien définies et dérivables sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$

Examinons la dérivabilité en zéro :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} \right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} = f'(0)
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et on procède ainsi :

$$\begin{aligned}
\blacksquare f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)' \\
&= \frac{x \cdot \left((1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' - (\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2} \\
&= \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) \right) - \sqrt{1+x^2} + 1}{x^2} \\
&= \frac{x^2 \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - (\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \right)
\end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare \text{ Soit } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \right) > 0$$

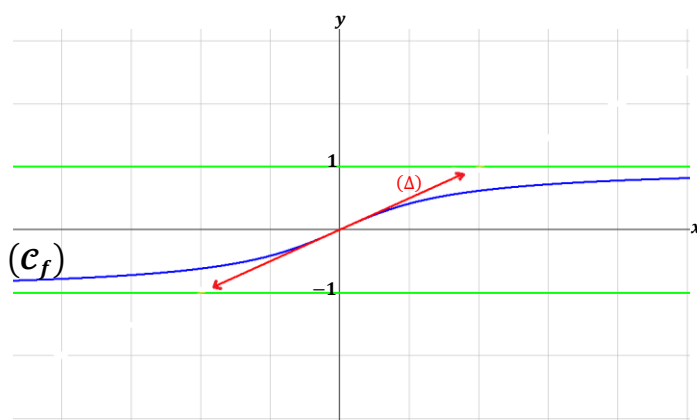
$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ est strictement \nearrow sur \mathbb{R}

$$6) (\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Rightarrow (\Delta) : y = \frac{1}{2}x$$

Voici pour l'instant la représentation graphique de la courbe (C_f) :



7) Comme f est continue et étant strictement croissante sur \mathbb{R} alors f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R})$:

$$\blacksquare f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[)$$

$$=]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad \text{déjà vu}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{|x| \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{-\sqrt{0+1}+0} \right) = -1$$

D'où l'application suivante est bijective

$$f : \mathbb{R} \mapsto]-1,1[\\ x \mapsto f(x)$$

Alors d'après la définition d'une application bijective on écrit :

$$(\forall y \in]-1,1[) (\exists ! x \in \mathbb{R}) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = y$$

$$\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1+x^2} = xy$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = xy + 1$$

$$\Rightarrow 1 + x^2 = (xy + 1)^2$$

$$\Rightarrow 1 + x^2 = x^2 y^2 + 1 + 2xy$$

$$\Rightarrow (y^2 - 1)x^2 + (2y)x = 0$$

$$\Rightarrow ((y^2 - 1)x + 2y)x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 0 \\ \text{ou bien } x = \frac{-2y}{y^2 - 1} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où f^{-1} est définie ainsi :

$$f^{-1} :]-1;1[\mapsto \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{-2y}{y^2 - 1}$$

Solution N° 35 :

1) Soient $x > 0$ et $x \leq t \leq x + 1$

$$\text{On a : } f(t) = \sqrt{t} \quad ; \quad \forall t \geq 0.$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_*^+

Et on a pour tout $t \geq 0$:

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$x \leq t \leq x + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{t} \leq 2\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) On a $f(t) = \sqrt{t}$ est continue et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ . Donc On peut appliquer le TAF à f sur n'importe quel intervalle de \mathbb{R}_*^+ . On prend $]x; x+1[$:

Ainsi : $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]x; x+1[\\ f \text{ est dérivable sur }]x; x+1[\end{cases}$

$$\exists c \in]x; x+1[; \left(\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \right) = f'(c)$$

$$\Rightarrow x < c < x+1 \text{ et } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = f'(c)$$

Comme $\forall t \in]x; x+1[, \forall x > 0$ On a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Alors pour tout $c \in]x; x+1[$ on ait :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(c) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) \blacksquare \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} ; x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} ; \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$$\blacksquare \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots \\ + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= -\sqrt{1} + \sqrt{n} = \sqrt{n} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{n} - 1 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{n} - 1) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{n} - 1) \leq u_n$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n} - 1) = 2(+\infty - 1) = +\infty$$

Alors d'après le critère de comparaison dans les suites on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$$

Autrement-dit : la suite (u_n) diverge.

Solution N° 36 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et on procède comme suit

$$\text{Soit : } \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2} + t^2 - 1 ; \forall t \in \mathbb{R}$$

Il est clair que la fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier. Donc On peut appliquer le TAF à f sur n'importe quel intervalle de \mathbb{R} on considère l'intervalle $[0, x]$ avec $x > 0$:

Ainsi : $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < x ; \frac{\varphi(x) - 0}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{1}{1+x^2} + x^2 - 1}{x} \right) = \frac{-2c}{(1+c^2)^2} + 2c$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} = 2c \left(1 - \frac{1}{(1+c^2)^2} \right)$$

$$\blacksquare c^2 > 0 \Rightarrow 1 + c^2 > 1$$

$$\Rightarrow (1 + c^2)^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + c^2)^2} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(1 + c^2)^2} > 0$$

$$\Rightarrow 2c \left(1 - \frac{1}{(1 + c^2)^2} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} > 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + x^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0 ; \boxed{\frac{1}{1+x^2} \geq 1 - x^2} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare \text{ Si } x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(-x)^2} \geq 1 - (-x)^2$$

$$\Rightarrow \forall x \leq 0 ; \boxed{\frac{1}{1+x^2} \geq 1 - x^2} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{\frac{1}{1+x^2} \geq 1 - x^2} \rightsquigarrow (3)$$

De la même manière on prend la fonction :

$$\psi(t) = 1 - t^2 + t^4 - \frac{1}{1+t^2}$$

Et soit encore $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\blacksquare \begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \psi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} = 4c^3 + 2c \left(\frac{1}{(1+c^2)^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} = 2c \left(2c^2 + \frac{1}{(1+c^2)^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{2c}{(1+c^2)^2} (2c^2(1+c^2)^2 + 1 - (1+c^2)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} = \frac{2c}{(1+c^2)^2} (2c^6 + 3c^4) > 0$$

Car on a l'encadrement : $0 < c < x$

$$\Rightarrow \forall x > 0 ; \frac{\psi(x)}{x} > 0$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 ; \psi(x) > 0$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 ; \frac{1}{1+x^2} < 1 - x^2 + x^4$$

Pour $x = 0$ on a : $\frac{1}{1+0^2} = 1 - 0^2 + 0^4$

Donc On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 0 ; \boxed{\frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4} \rightsquigarrow (4)$$

Si $x \leq 0$ Alors $-x \geq 0$ Donc selon (4):

$$\frac{1}{1+(-x)^2} \leq 1 - (-x)^2 + (-x)^4$$

$$\forall x \leq 0 ; \boxed{\frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4} \rightsquigarrow (5)$$

D'après les résultats (3) et (4) on tire :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{\frac{1}{1+x^2} \leq 1-x^2+x^4} \rightsquigarrow (6)$$

De (3) et (6) on obtient que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{1-x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1-x^2+x^4}$$

$$2) \text{ On a : } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2$$

On a d'après la question 1) :

$$1-x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1-x^2+x^4$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 \leq x^4$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 \right| \leq x^4$$

$$\Rightarrow \boxed{|f'(x)| \leq x^4}$$

3) D'abord f est une fonction impaire car son domaine de définition est symétrique c-à-d : $\forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R}$

$$\text{Et que : } f(-x) = \text{Arctan}(-x) + x - \frac{x^3}{3}$$

$$= -\text{Arctan } x + x - \frac{x^3}{3}$$

$$= -\left(\text{Arctan } x - x + \frac{x^3}{3}\right) = -f(x)$$

$$\blacksquare \text{ Soient } u(t) = f(t) - \frac{t^5}{5} \text{ et } x > 0$$

$$\text{On a : } \begin{cases} u \text{ est continue sur } [0, x] \\ u \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < x \text{ et } \frac{u(x)}{x} = f'(c) - c^4$$

$$\blacksquare \text{ On a : } \forall x \in \mathbb{R} ; 0 \leq f'(x) \leq x^4$$

$$\Rightarrow \text{pour } c \in \mathbb{R} \text{ on a : } f'(c) \leq c^4$$

$$\Rightarrow f'(c) - c^4 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{u(x)}{x} \leq 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow u(x) \leq 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{x^5}{5} \leq 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{x^5}{5} < x^5 ; x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq x^5} \rightsquigarrow (*)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq x^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x > 0 ; |f(x)| \leq |x^5|} \rightsquigarrow (7)$$

Soit maintenant $x < 0$ alors $-x > 0$:

$$\Rightarrow f(-x) \leq (-x)^5 ; \text{ d'après } (*)$$

$$\Rightarrow -f(x) \leq -x^5$$

$$\Rightarrow f(x) \geq x^5$$

$$\Rightarrow 0 \geq f(x) \geq x^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x < 0 ; |f(x)| \leq |x^5|} \rightsquigarrow (8)$$

$$(7) \text{ et } (8) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* ; |f(x)| \leq |x^5|$$

En plus pour $x = 0$ on a : $|f(0)| = 0^5$

Alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq |x^5|}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ et on procède comme suit :

$$\blacksquare -|x^5| \leq f(x) \leq |x^5| \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -|x^5| \leq \text{Arctan } x - x + \frac{x^3}{3} \leq |x^5|$$

$$\Rightarrow -|x^5| - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arctan } x - x \leq |x^5| - \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-|x^5|}{x^2} - \frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arctan } x - x}{x^2} \leq \frac{|x^5|}{x^2} - \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-|x^3| - \frac{x}{3}}_0 \leq \frac{\text{Arctan } x - x}{x^2} \leq \underbrace{|x^3| - \frac{x}{3}}_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x - x}{x^2} \right) = 0$$

Solution N° 37 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et on procède comme suit :

$$f(x) = \frac{\sin x + 4}{2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cos x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |\cos x| \leq 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} \cos x \right| \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) On a : $g(x) = f(x) - x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) \leq \frac{1}{2} < 1 \quad ; \quad \text{selon la question 1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) - 1 < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow g$ est strictement \searrow sur \mathbb{R}

3) $\blacksquare x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

$$\Rightarrow 3 \leq \sin x + 4 \leq 5$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{\sin x + 4}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - x \leq f(x) - x \leq \frac{5}{2} - x$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{3}{2} - x \right) \leq g(x) \leq \left(\frac{5}{2} - x \right)}$$

4) comme $g(x) \leq \left(\frac{5}{2} - x \right)$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} - x \right) = -\infty$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

\blacksquare comme $g(x) \geq \left(\frac{3}{2} - x \right)$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} - x \right) = +\infty$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

■ $g(\mathbb{R}) = g(]-\infty, +\infty[)$; g est \searrow sur \mathbb{R}

$$=]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[$$

$$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

5) On a g est une fonction continue et strictement monotone sur \mathbb{R} (décroissante) Alors g réalise une bijection de \mathbb{R} vers son image $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}) (\exists ! x \in \mathbb{R}) : g(x) = y$$

$$\Rightarrow (\text{pour } 0 \in \mathbb{R}) (\exists ! x_0 \in \mathbb{R}) : g(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow (\exists ! x_0 \in \mathbb{R}) : f(x_0) = x_0$$

6) On a : $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4}{2} - \frac{2\pi}{3}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 4}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 - \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 24 - 8\pi}{12}$$

■ On a : $\begin{cases} 1,5 < \sqrt{3} < 2 \\ 3 < \pi < 3,5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 28,5 < 3\sqrt{3} + 24 < 30 \\ -28 < -8\pi < -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0,5 < 3\sqrt{3} + 24 - 8\pi < 6$$

$$\Rightarrow \boxed{g\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0} \rightsquigarrow (1)$$

■ On a encore : $g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2} + 4}{2} - \frac{5\pi}{6}$

$$= \frac{9}{4} - \frac{5\pi}{6} = \frac{27 - 10\pi}{13}$$

■ On a : $\pi > 2,7 \Rightarrow 10\pi > 27$

$$\Rightarrow \frac{27 - 10\pi}{13} < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{g\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0} \rightsquigarrow (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow g\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow g\left(\frac{5\pi}{6}\right) < g(x_0) < g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow g^{-1}\left(g\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) < g^{-1}(g(x_0)) < g^{-1}\left(g\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Car g et g^{-1} sont \searrow

$$\Rightarrow \boxed{\frac{5\pi}{6} < x_0 < \frac{2\pi}{3}}$$

7) On a f est une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier Donc on peut appliquer le TAF à f sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit a priori l'intervalle $[x_0, u_n]$ éventuellement $[u_n, x_0]$

Ainsi : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [x_0, u_n] \\ f \text{ est dérivable sur }]x_0, u_n[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]x_0, u_n[; \frac{f(u_n) - f(x_0)}{u_n - x_0} = f'(c)$$

$$\Rightarrow x_0 < c < u_n \text{ et } \frac{u_{n+1} - x_0}{u_n - x_0} = f'(c)$$

On a d'après la question 1) :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Alors pour $c \in]x_0, u_n[\subset \mathbb{R}$ on ait :

$$|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\blacksquare |f'(c)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|u_{n+1} - x_0|}{|u_n - x_0|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - x_0|}$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$\blacksquare |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - x_0|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |u_{n-1} - x_0|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-2} - x_0|$$

: : :

$$\Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n+1} - x_0|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - x_0|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0| = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - x_0| = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = x_0$$

Solution N° 38 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; S_{n+1} - S_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; S_{n+1} > S_n$$

$$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement } \nearrow$$

2) On a : $f(t) = \frac{1}{t^2} ; \forall t \in \mathbb{R}^*$

La fonction f est continue et dérivable sur \mathbb{R}^* Alors on peut appliquer le TAF à f sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R}^* . Soit $p \in \mathbb{N} ; p \geq 2$ et on considère l'intervalle $[p, p+1]$.

Ainsi : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [p, p+1] \\ f \text{ est dérivable sur }]p, p+1[\end{cases}$

$$\exists c \in]p, p+1[; \frac{f(p+1) - f(p)}{p+1 - p} = f'(c)$$

$$\Rightarrow p < c < p+1 \text{ et } f(p+1) - f(p) = \frac{-2}{c^3}$$

$$\Rightarrow p < c < p+1 \text{ et } f(p) - f(p+1) = \frac{2}{c^3}$$

$$\blacksquare p < c < p+1 \Rightarrow p^3 < c^3 < (p+1)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(p+1)^3} < \frac{1}{c^3} < \frac{1}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(p+1)^3} < \frac{2}{c^3} < \frac{2}{p^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{(p+1)^3} < f(p) - f(p+1) < \frac{2}{p^3}}$$

3) On a : $f(k) - f(k+1) < \frac{2}{k^3}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) < \frac{2}{k^3}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) < \frac{2}{1^3}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) < \frac{2}{2^3}$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) < \frac{2}{n^2}$$

On additionne ces inégalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui s'en vont dans le côté de gauche On obtient :

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} < \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k^3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 2 \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 2 \cdot S_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < S_n} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare \frac{2}{(k+1)^3} < f(k) - f(k+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(k+1)^3} < \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{2}{(k+1)^3} < \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^3}\right) < 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^3}\right) + 2 < 1 - \frac{1}{n^2} + 2$$

$$\Rightarrow 2 \left(\left(\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^3} \right) + 1 \right) < 3 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} \right) < 3 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot S_n < 3 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n < \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)} \rightsquigarrow (2)$$

La conclusion :

d'après (1) et (2) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) < S_n < \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$4) \text{ On a : } S_n < \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) < \frac{3}{2}$$

Donc (S_n) est une suite majorée par $\frac{3}{2}$ et comme (S_n) est croissante Alors elle converge vers une limite réelle S .

Je rajoute que :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)}_{\downarrow \frac{1}{2}} < S_n < \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)}_{\downarrow \frac{3}{2}}$$

Alors par passage aux limites on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{3}{2}$$

Remarque : plus tard vous verrez que :

$$S \approx 1,202056903$$

Solution N° 39 :

1) D'abord f est dérivable sur \mathbb{R}^+ car somme de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \geq 0 ; f'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1$$

$$\text{On pose : } \varphi(t) = \frac{1}{1+t} + t - 1 - t^2$$

La fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R}^+ Donc On peut appliquer le TAF à φ sur l'intervalle $[0, x]$; $x > 0$.

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x) - 0}{x - 0} = \frac{-1}{(1+c)^2} + 1 - 2c$$

$$\blacksquare \text{ On a : } \varphi'(c) = \frac{-1}{(1+c)^2} + 1 - 2c$$

$$= \frac{-1 + (1-2c)(1+c)^2}{(1+c)^2}$$

$$= \frac{-1 + (1-2c)(1+2c+c^2)}{(1+c)^2}$$

$$= \frac{-2c^3 - 3c^2}{(1+c)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} < 0 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) < 0 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + x - 1 - x^2 < 0 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + x - 1 < x^2 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+x} + x - 1 \leq x^2 ; \forall x \geq 0}$$

$$\text{Car On a : } \frac{1}{1+0} + 0 - 1 = 0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) < x^2 ; \forall x \in \mathbb{R}^+} \rightsquigarrow (1)$$

Soit maintenant la fonction $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t} + t - 1 ; \forall t \geq 0$$

Soit $x > 0$ et on procède comme suit :

$$\blacksquare \begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \psi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x) - 0}{x - 0} = \frac{-1}{(1+c)^2} + 1$$

$$\blacksquare c > 0 \Rightarrow c + 1 > 1$$

$$\Rightarrow (c + 1)^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(c + 1)^2} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(c + 1)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} > 0 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \psi(x) > 0 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + x - 1 > 0 ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + x - 1 \geq 0 \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{Car on a : } \frac{1}{1+0} + 0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \geq 0} \rightsquigarrow (2)$$

D'après (1) et (2) on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad 0 \leq f'(x) \leq x^2}$$

$$2) \text{ Soit } x > 0 \text{ et } u(t) = f(t) - \frac{t^3}{3}$$

$$\blacksquare \begin{cases} u \text{ est continue sur } [0, x] \\ u \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < x \quad ; \quad \frac{u(x)}{x} = f'(c) - c^2$$

$$\blacksquare \text{ Comme } f'(x) \leq x^2 \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(c) \leq c^2 \quad ; \quad \text{car } c > 0$$

$$\Rightarrow f'(c) - c^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{u(x)}{x} \leq 0 \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow u(x) \leq 0 \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{x^3}{3} \leq 0 \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{x^3}{3} \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq \frac{x^3}{3} \quad ; \quad \forall x \geq 0} \rightsquigarrow (3)$$

$$\text{Car : } f(0) = \frac{0^3}{3}$$

On applique de nouveau le TAF à la fonction $f(t)$ sur $[0, x]$; $x > 0$:

$$\blacksquare \begin{cases} f \text{ est continue sur } [0, x] \\ f \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

$$\Rightarrow 0 < c < x \quad ; \quad \frac{f(x)}{x} = f'(c) \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 < c < x \quad ; \quad \frac{f(x)}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \quad ; \quad f(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \geq 0 \quad ; \quad f(x) \geq 0} \rightsquigarrow (4)$$

$$\text{Car on a : } f(0) = 0$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \boxed{\forall x \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{3}}$$

3) On a d'après le résultat 3) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}}$$

$$4) \text{ On a : } \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}}{\frac{1}{2}} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Solution N° 40 :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \right) \\
 &= (\sin x)'_{/x=0} = (\cos x)_{/x=0} = \cos 0 = 1 \\
 \\
 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \right) \\
 &= (\cos x)'_{/x=0} = (-\sin x)_{/x=0} = -\sin 0 = 0 \\
 \\
 3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = (\cos x)'_{/x=\frac{\pi}{2}} \\
 &= (-\sin x)_{/x=\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\
 \\
 4) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \right) \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= (\sin x)'_{/x=\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{(\cos x)'_{/x=\frac{\pi}{2}}} \\
 &= (\cos x)_{/x=\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{(-\sin x)_{/x=\frac{\pi}{2}}} \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0 \times \frac{1}{-1} = 0
 \end{aligned}$$

Solution N° 41 :

$$\begin{aligned}
 1) \quad f(x) &= \frac{1}{x^2 + x - 2} \\
 \blacksquare \quad \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} ; x^2 + x - 2 \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 1 \text{ et } x \neq -2\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\} \\
 \blacksquare \quad f'(x) &= \frac{-(x^2 + x - 2)'}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 2)^2} \\
 \blacksquare \quad \mathcal{D}_{f'} &= \{x \in \mathcal{D}_f ; (x^2 + x - 2)^2 \neq 0\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\} \\
 \\
 2) \quad f(x) &= \frac{1}{\sin x} \\
 \blacksquare \quad \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} ; \sin x \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 0[\pi]\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \\
 \blacksquare \quad f'(1) &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \\
 \blacksquare \quad \mathcal{D}_{f'} &= \{x \in \mathcal{D}_f ; \sin^2 x \neq 0\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \\
 \\
 3) \quad f(x) &= \frac{-1}{\tan x} \\
 \blacksquare \quad \mathcal{D}_f &= \left\{x \in \mathbb{R} ; \tan x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]\right\} \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R} ; x \neq 0[\pi] \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]\right\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \left(\{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{-(\tan x)'(-1)}{\tan^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}$$

$$\mathcal{D}_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R} ; \tan x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} ; x \neq 0[\pi] \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \right\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Remarque : Pour la continuité de f on a f est continue en chaque point $\frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} f(x) = 0 \in \mathbb{R} \text{ (pronlongeable)}$$

Pour la continuité de f' , on a f' est continue en chaque point $\frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} f'(x) = 1 \in \mathbb{R} \text{ (pronlongeable)}$$

$$4) f(x) = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3x+4}$$

$$\mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} ; 2x - 1 \neq 0 \text{ et } 3x + 4 \neq 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} ; x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq \frac{-4}{3} \right\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{-4}{3} \right\}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} + \frac{3}{(3x+4)^2}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_{f'} = \{ x \in \mathcal{D}_f ; 2x - 1 \neq 0 ; 3x + 4 \neq 0 \}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{-4}{3} \right\}$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x^2 - x^3}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} ; x^2 - x^3 \neq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x^2(1-x) \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$6) f(x) = \frac{-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{-3}{x^2 + x - 2}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} ; (x-1)(x+2) \neq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x \neq 1 \text{ et } x \neq -2 \}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{1 ; -2\}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{-(2x+1)(-3)}{x^2 + x - 2} = \frac{3(2x+1)}{x^2 + x - 2}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; -2\}$$

Solution N° 42 :

$$1) f(x) = \sqrt{3x+2}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} ; 3x + 2 \geq 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} ; x \geq \frac{-2}{3} \right\} = \left[\frac{-2}{3} ; +\infty \right[$$

$$\blacksquare f'(x) = \left((3x+2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (3x+2)^{\frac{1}{2}-1} (3)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_{f'} = \{ x \in \mathcal{D}_f ; 3x + 2 \neq 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{D}_f ; x \neq \frac{-2}{3} \right\} = \left] \frac{-2}{3} ; +\infty \right[$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} ; x^2 - x \geq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x \notin]0, 1[\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

$$f'(x) = \left((x^2 - x)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (x^2 - x)^{\frac{1}{2}-1} (2x - 1)$$

$$= \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_{f'} &= \{x \in \mathcal{D}_f ; x^2 - x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{D}_f ; x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\} \\ &=]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$3) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} ; \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\} \\ &=]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \left(\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1-x-1}{(x+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_{f'} &= \{x \in \mathcal{D}_f ; x-1 > 0 ; x+1 > 0\} \\ &=]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$4) f(x) = \sqrt{2x-1}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} ; 2x-1 \geq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} ; x \geq \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2} ; +\infty[\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \left((2x-1)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (2x-1)^{-\frac{1}{2}} (2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathcal{D}_f ; 2x-1 > 0\} = \left] \frac{1}{2}, +\infty[\right]$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} ; x^2+x-2 \geq 0\} \\ &=]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \left((x^2+x-2)^{\frac{1}{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{2} (x^2+x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_{f'} &= \{x \in \mathcal{D}_f ; x^2+x-2 > 0\} \\ &=]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$6) f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x}-1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 1\} = [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \left((\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{x}-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_{f'} &= \{x \in \mathcal{D}_f ; x > 0 \text{ et } \sqrt{x}-1 > 0\} \\ &=]1, +\infty[\end{aligned}$$

Solution N° 43 :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)}{3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)} \\
 &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{2}{3} (\cos x)'_{/x=\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{2}{3} (-\sin x)_{/x=\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{-2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x + \cos x - 1}{x} \right) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x - \sin 0}{2x - 0} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \right) \\
 &= 2 \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t=2x}} \left(\frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \right) \\
 &= 2 (\sin t)'_{/t=0} + (\cos x)'_{/x=0} \\
 &= 2 (\cos t)_{/t=0} + (-\sin x)_{/x=0} \\
 &= 2 \cos 0 - \sin 0 = 2 \times 1 - 0 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \\
 &\text{Avec ; } \varphi(x) = \sin x - \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \varphi'(x)_{/x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} (\cos x + \sin x)_{/x=\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\cos x + \sin x)^3 - 1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \text{ avec } \varphi(x) = (\cos x + \sin x)^3 \\
 &= \varphi'(x)_{/x=0} \\
 &= 3(\cos x + \sin x)^2 (\cos x - \sin x)_{/x=0} \\
 &= 3(1 + 0)^2 (1 - 0) = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin(2x) \cdot \cos x}{x - \pi} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(\pi)}{x - \pi} \right) \\
 &\text{Avec : } \varphi(x) = \sin 2x \cdot \cos x \\
 &= \varphi'(x)_{/x=\pi} \\
 &= (2 \cos 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin 2x)_{/x=\pi} \\
 &= (2 \cos 2\pi \cdot \cos \pi - \sin \pi \cdot \sin 2\pi) \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin x} + x^2 + x - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) \\
 &\text{avec : } \varphi(x) = \sqrt{1 - \sin x} + x^2 + x - 1 \\
 &= \varphi'(x)_{/x=0}
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}} + 2x + 1 \right)_{/x=0}$$

$$= \frac{-\cos 0}{2\sqrt{1-\sin 0}} + 2 \cdot 0 + 1$$

$$= \frac{-1}{2} + 0 + 1 = \frac{1}{2}$$

Solution N° 44 :

1) soit x l'abscisse du point de (C_f) où la courbe (C_f) admet une tangente horizontale. c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses (Ox) : $y = 0$.

$$\text{Alors : } f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 0 ; \frac{10}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Points ciblés} = \left\{ (0, 2) ; \left(\frac{10}{3}, \frac{-446}{27} \right) \right\}$$

2) Soit x l'abscisse du point de (C_f) où la courbe (C_f) admet une tangente (T) parallèle à la droite (Δ) : $y = -3x + 1$

Alors : $\text{pente}(T) = \text{pente}(\Delta)$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x = -3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 3 ; \frac{1}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \text{points ciblés} = \left\{ (3, -16) ; \left(\frac{1}{3}, \frac{40}{27} \right) \right\}$$

3) Soit x l'abscisse du point de (C_f) où la courbe (C_f) admet une tangente (T) perpendiculaire à la droite (D) : $y = \frac{1}{7}x - 4$

$$\text{Alors : } \text{pente}(T) \times \text{pente}(D) = -1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot \frac{1}{7} = -1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -7$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{7}{3}\right)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{7}{3} ; 1 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \text{points ciblés} = \left\{ \left(\frac{7}{3}, \frac{-338}{27} \right) ; (1, -2) \right\}$$

Solution N° 45 :

$$1) \mathcal{D}_h = \{ x \in \mathbb{R} ; (x-1)^2 \neq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x \neq 1 \} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \frac{2 - 0}{1 - 0 + 0} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

3) D'abord h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ car quotient bien défini de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on a $\forall x \neq 1$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(4x-3)(x-1)^2 - (2x-2)(2x^2-3x)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(4x-3)(x-1) - 2(2x^2-3x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{3-x}{(x-1)^3} = \left(\frac{1}{x-1} \right)^2 \left(\frac{3-x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

4) voici le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$3-x$	+		+	-
$x-1$	-		+	+
$h'(x)$	-		+	-
$h(x)$	2		$\frac{9}{4}$	2

5) On a h est continue et strictement monotone (croissante) sur $]1,3]$ Donc h réalise une bijection de $]1,3]$ vers son image $h(]1,3])$:

$$\blacksquare h(]1,3]) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) ; h(3) \right] = \left] -\infty, \frac{9}{4} \right]$$

Ainsi $h :]1,3] \mapsto \left] -\infty, \frac{9}{4} \right]$ est bijective

Et d'après la définition d'une application bijective on peut écrire :

$$\left(\forall y \in \left] -\infty ; \frac{9}{4} \right] \right) (\exists ! x \in]1,3]) : h(x) = y$$

$$\left(\text{pour } 0 \in \left] -\infty ; \frac{9}{4} \right] \right) (\exists ! \alpha \in]1,3]) : h(\alpha) = 0$$

C'est-à-dire que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution dans $]1,3]$

Solution N° 46 :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{x + \sqrt[3]{1-x} - 1}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{x - 1 + \sqrt[3]{1-x}}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{x - 1}{x - 1} - \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{1-x} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(1 - \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} \right) \\ &= 1 - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = (1-x)^{2/3}}} \frac{1}{t} \\ &= 1 - \frac{1}{0^+} = 1 - \infty = -\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et géométriquement on dira que la courbe (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en 1 avec :

$$(\Delta) : x = 1$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4} - 0}{x - 1} \right)$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{1 - x}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{(x-4)(x-1)}{(1-x)(1-x)}}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{4-x}{1-x}}$$

$$= \left(- \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{4-x} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$= -\sqrt{3} \times \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{1-x}}} \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$= -\sqrt{3} \times \frac{1}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en 1 avec $(\Delta) : x = 1$.

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-1}{-x} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{|x|} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = - \sqrt{\frac{0}{0-2}} = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et on a : $f'_g(0) = 0$. Géométriquement on dira que la courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale (Δ) à gauche en 0 avec $(\Delta) : y = f'_g(0)(x-0) + f(0)$ c-à-d $(\Delta) : y = 0$ (l'axe des abscisses)

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 0}{x + 2} \right)$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{-x - 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= - \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{(-x - 2)^2}} \\
&= - \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \sqrt{\frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 2)}} \\
&= - \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \sqrt{\frac{1 - x}{-x - 2}} \\
&= - \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \sqrt{1 - x} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{\sqrt{-x - 2}} \right) \\
&= -\sqrt{3} \times \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{-x - 2}}} \frac{1}{t} \\
&= -\sqrt{3} \times \frac{1}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -2 et géométriquement on dira que la courbe (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en -2

Avec : $(\Delta) : x = -2$.

$$\begin{aligned}
5) \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3} \\ x < \sqrt{3}}} \left(\frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3} \\ x < \sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{\pi - 3 \operatorname{Arctan} x} - 0}{x - \sqrt{3}} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3} \\ x < \sqrt{3}}} \sqrt{\frac{\pi - 3 \operatorname{Arctan} x}{(\sqrt{3} - x)^2}} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3} \\ x < \sqrt{3}}} \frac{3 \left(\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} \frac{\pi}{3} \right)}{x - \sqrt{3}} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3} \\ x < \sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3} - x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{3} \cdot \sqrt{(\operatorname{Arctan} x)'_{/x=\sqrt{3}}} \times \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{\sqrt{3} - x}}} \left(\frac{1}{t} \right) \\
&= -\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{3})^2} \right) \times \frac{1}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $\sqrt{3}$ et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en $\sqrt{3}$ avec $(\Delta) : x = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
6) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{\sqrt{1 - x^3} - 0}{x - 1} \right) \\
&= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{1 - x^3}{(1 - x)^2}} \\
&= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{1 + x + x^2}{1 - x}} \\
&= - \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{1 + x + x^2} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \right) \\
&= -\sqrt{3} \times \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{1 - x}}} \left(\frac{1}{t} \right) \\
&= -\sqrt{3} \times (+\infty) = -\infty \notin \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à gauche en 1 avec $(\Delta) : x = 1$.

Solution N° 47 :

$$\begin{aligned}
1) f(x) &= \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
\blacksquare f'(x) &= \frac{3}{2} \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)'
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{2 x^{\frac{2}{3}} - 4 x^{\frac{1}{3}}}$$

$$2) \quad g(x) = \sqrt[3]{x^4} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\blacksquare \quad g'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}} \right)' + \left((x-1)^{\frac{1}{3}} \right)'$$

$$= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$3) \quad h(x) = |4x-2|^{\frac{5}{3}}$$

$$= \begin{cases} (4x-2)^{\frac{5}{3}} & ; \quad \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ (2-4x)^{\frac{5}{3}} & ; \quad \text{si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad \text{si } x \geq \frac{1}{2} ; \quad h'(x) = \frac{5}{3} (4x-2)^{\frac{5}{3}-1} \cdot (4)$$

$$= \frac{20}{3} (4x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$\blacksquare \quad \text{si } x \leq \frac{1}{2} ; \quad h'(x) = \frac{5}{3} (2-4x)^{\frac{5}{3}-1} \cdot (-4)$$

$$= \frac{-20}{3} (2-4x)^{\frac{2}{3}}$$

h est encore dérivable en $\frac{1}{2}$ car :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} \left(\frac{h(x) - h\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} \left(\frac{h(x) - h\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \right) = 0$$

Dérivable à gauche et à droite en 0.

$$4) \quad k(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^3 + 1)^{\frac{1}{4}}$$

$$\blacksquare \quad k'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{1}{4} (x^3 + 1)^{\frac{1}{4}-1} \cdot (3x^2)$$

$$= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{4} x^2 (x^3 + 1)^{-\frac{3}{4}}$$

Solution N° 48 :

$$\text{Soit : } f(x) = \sin(x\sqrt{x}) = \varphi \circ \psi(x)$$

$$\text{Avec : } \varphi(x) = \sin x \quad \text{et} \quad \psi(x) = x\sqrt{x}$$

On a ψ est dérivable sur \mathbb{R}^+ car produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ et la fonction φ est dérivable sur $\psi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et on a encore $\psi(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}$ alors la composition $\varphi \circ \psi = f$ est dérivable sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et on procède ainsi :

$$\blacksquare \quad f'(x) = (x\sqrt{x})' \cdot \cos(x\sqrt{x})$$

$$= \left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \cos(x\sqrt{x})$$

$$= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) \cdot \cos(x\sqrt{x})$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \cos(x\sqrt{x})}$$

$$2) \quad \text{Soit } g(x) = \cos(\sqrt{x^2 - x}) = \varphi \circ \psi(x)$$

La fonction $\psi :]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}^+$
Est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 1, +\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions dérivables.

On aussi $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^+ et on a de plus $\psi(]-\infty, 0[\cup] 1, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ Donc la composition $\varphi \circ \psi$ est dérivable et on a :

pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare g'(x) &= (\sqrt{x^2 - x})' \cdot (-\sin \sqrt{x^2 - x}) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 1) \cdot (-\sin \sqrt{x^2 - x}) \\ &= \frac{-(2x - 1) \cdot \sin \sqrt{x^2 - x}}{2\sqrt{x^2 - x}} \end{aligned}$$

Solution N° 49 :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x - 3 + \sqrt{x^2 - x} + 2}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x - 1}{x - 1} + \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 1}}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x - 1}} \right) \\ &= 1 + \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \right) \\ &= 1 + \sqrt{1} \times \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{x - 1}}} \left(\frac{1}{t} \right) \\ &= 1 + (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc g n'est pas dérivable à droite en 1

$$2) \text{ Comme : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \right) = +\infty$$

Alors géométriquement on dira que (\mathcal{C}_g)

Admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 avec : $(\Delta) : x = 1$

3) D'abord On a le domaine de définition

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{D}_g &= \{x \in \mathbb{R} ; x^2 - x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\} \\ &=]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ car c'est une somme bien définie de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \left((x^2 - x)^{\frac{1}{2}} \right)' \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 1) \\ &= 1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} \end{aligned}$$

On remarque que si $x \in [1, +\infty[$ Alors :

$$\blacksquare 2x - 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} > 0$$

$$\Rightarrow g'(x) > 0 ; \forall x \geq 1$$

$\Rightarrow g$ est strictement \nearrow sur $[1, +\infty[$

Si maintenant $x \in]-\infty, 0[$ Alors on aurait :

$$\begin{aligned} \blacksquare \left(2\sqrt{x^2 - x} \right)^2 - (1 - 2x)^2 \\ &= 4x^2 - 4x - (1 - 4x + 4x^2) = -1 < 0 \\ &\Rightarrow \left(2\sqrt{x^2 - x} \right)^2 - (1 - 2x)^2 < 0 \\ &\Rightarrow \left(2\sqrt{x^2 - x} \right)^2 < (1 - 2x)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2\sqrt{x^2-x})^2} < \sqrt{(1-2x)^2}$$

$$\Rightarrow |2\sqrt{x^2-x}| < |1-2x|$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-x} < 1-2x \quad ; \quad \text{car } x \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x^2-x}}{2\sqrt{x^2-x}} < \frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} < 0$$

$$\Rightarrow g'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]-\infty, 0]$$

$$\Rightarrow g \text{ est strictement } \searrow \text{ sur }]-\infty, 0]$$

4) comme g est continue et étant strictement monotone (croissante) sur $[1, +\infty[$ alors g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image $g([1, +\infty[)$ avec :

$$\blacksquare g([1, +\infty[) = \left[g(1) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[\\ = [-2, +\infty[$$

Donc $g : [1, +\infty[\mapsto [-2, +\infty[$ est une application bijective d'où l'on déduit que :

$$(\forall y \in]-2, +\infty[) (\exists ! x \in [1, +\infty[) : g(x) = y$$

$$(0 \in]-2, +\infty[) (\exists ! \alpha \in [1, +\infty[) : g(\alpha) = 0$$

5) Soit $y = g^{-1}(x) ; x \in [-2, +\infty[$

$$\Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow y - 3 + \sqrt{y^2 - y} = x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{y^2 - y})^2 = (x - y + 3)^2$$

$$\Rightarrow y^2 - y = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y$$

$$\Rightarrow y(2x + 6 - 1) = x^2 + 9 + 6x$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 + 9 + 6x}{2x + 5} = \frac{(x + 3)^2}{(2x + 5)} \geq 1$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x + 5} \quad ; \quad x \in [-2, +\infty[$$

$$6) \text{ On a : } g^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x + 5}$$

Donc $g^{-1}(x)$ est dérivable sur $[-2, +\infty[$
Car c'est un quotient bien définie de deux fonctions dérivable sur $[-2, +\infty[$.

$$(g^{-1})'(x) = \frac{(2x + 6)(2x + 5) - 2(x^2 + 6x + 9)}{(2x + 5)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 10x + 12}{(2x + 5)^2}$$

$$(g^{-1})'(\sqrt{2} - 1) = \frac{2(\sqrt{2} - 1)^2 + 10(\sqrt{2} - 1) + 12}{(2(\sqrt{2} - 1) + 5)^2}$$

$$= \frac{8 + 6\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}$$

Solution N° 50 :

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\frac{-2x}{\sqrt[3]{1-x}} - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{-2}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$= \frac{-2}{(1-0)^{\frac{1}{3}}} = -2 = g'_g(0) \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{4x \cdot \sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (4 \cdot \sqrt[3]{x}) = 4 \cdot \sqrt[3]{0} = 0 = g'_d(0) \in \mathbb{R}$$

Comme $g'_g(0) \neq g'_d(0)$ alors g n'est pas dérivable en 0 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à gauche en 0 avec :

$$(\Delta) : y = g'_g(0)(x - 0) + g(0)$$

C'est à dire : $(\Delta) : y = -2x$

Et encore que (C_f) admet une demi-tangente (D) à droite en 0 avec :

$$(D) : y = g'_d(0)(x - 0) + g(0)$$

$$\Rightarrow (D) : y = 0 \quad (\text{l'axe des abscisses})$$

2) Si $x > 0$ on a : $g(x) = 4x \cdot \sqrt[3]{x} = 4x^{\frac{4}{3}}$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{16}{3} x^{\frac{1}{3}} > 0$$

Donc f est strictement \nearrow sur $]0, +\infty[$

$$\text{Si } x \leq 0 ; \text{ On a : } g(x) = \frac{-2x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$g'(x) = \frac{-2(1-x)^{\frac{1}{3}} + 2x \left(\frac{1}{3}\right) (1-x)^{\frac{-2}{3}} (-x)}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-2(1-x)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{x^2}{3} (1-x)^{-2}\right)}{(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{-2}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right) < 0$$

Car si $x \leq 0$ alors $(1-x)^{\frac{1}{3}} > 0$

Donc g est strictement \searrow sur $]-\infty, 0]$.

3) On a g est continue et étant strictement monotone (décroissante) sur \mathbb{R}^- Donc g réalise une bijection on l'appelle h définie de $]-\infty, 0]$ à valeurs dans $g(]-\infty, 0])$ avec :

$$\blacksquare g(]-\infty, 0]) = \left[g(0) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right[$$

$$= [0, +\infty[$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x}{(-x)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{-1}{x} + 1\right)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \left(\frac{-x}{(-x)^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(-x)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$= 2(+\infty) \cdot \frac{1}{(1-0)^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Ainsi $h :]-\infty, 0] \mapsto [0, +\infty[$ est une application bijective.

4) On a $h :]-\infty, 0] \mapsto [0, +\infty[$
 $x \mapsto g(x)$

On a h est continue sur $]-\infty, 0]$ car c'est un quotient de deux fonctions dérivables et on a de plus pour tout $x \in]-\infty, 0]$:

$$h'(x) = \frac{-2}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \right) \neq 0$$

$$\text{Car } \frac{-2}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 > 0$$

Récapitulation :

$$\blacksquare \begin{cases} h \text{ est dérivable sur }]-\infty, 0] \\ h' \neq 0 \text{ sur }]-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow h' \text{ est dérivable sur } I = h(]-\infty, 0])$$

$$\text{Et : } (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} ; \forall x \in I$$

$$\text{En particulier } (h^{-1})'(7) = \frac{1}{h'(h^{-1}(7))}$$

$$\blacksquare \text{ soit } \alpha = h^{-1}(7) \Leftrightarrow g(\alpha) = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\alpha}{(1-\alpha)^{\frac{1}{3}}} = 7 ; \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha = 7(1-\alpha)^{\frac{1}{3}} ; \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2\alpha)^3 = 7^3(1-\alpha) ; \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -8\alpha^3 = 343(1-\alpha) ; \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha^3 - 343\alpha + 323 = 0 ; \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -7 \in]-\infty, 0]$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(7) = -7$$

$$D'où : (h^{-1})'(7) = \frac{1}{h'(h^{-1}(7))} = \frac{1}{h'(-7)}$$

$$c'est \text{ à dire que } : (h^{-1})'(7) = \frac{-192}{241}$$

Solution N° 51 :

$$1) \text{ On a : } f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} ; \forall t > 0$$

$$\blacksquare \begin{cases} t \in [x; x+1] \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq t \leq x+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{t} \leq 2\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) On a f est continue et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ Donc on peut appliquer le TAF à la fonction f sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R}_*^+ . Soit l'intervalle $[x; x+1]$ avec $x > 0$ On a alors :

$$\blacksquare \begin{cases} f \text{ est continue sur } [x; x+1] \\ f \text{ est dérivable sur }]x; x+1[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]x; x+1[; \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f'(c)$$

$$\Rightarrow x < c < x+1 \text{ et } \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1 - x} = f'(c)$$

$$\Rightarrow x < c < x+1 \text{ et } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = f'(c)$$

On a d'après la question 1) :

$$\forall t \in [x; x+1] ; \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc pour $c \in]x ; x + 1[$ on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(c) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) On a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$ on ait :

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{2} - \sqrt{1} \leq \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{4}} \leq \sqrt{4} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

: : :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

On additionne ces inégalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui vont disparaître On obtient :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

On s'intéresse seulement à l'inégalité :

$$\sqrt{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} u_n$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq u_n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$ Alors :
D'après le critère de comparaison dans les suites on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$$

$\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente

Solution N° 52 :

Rappel : une courbe symétrique par rapport à une droite :

■ (C_f) est symétrique par rapport à la courbe : $(\Delta) : x = a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$

■ Si $x \in \mathbb{R}$ Alors $(4 - x) \in \mathbb{R}$

■ $f(4 - x) = ((4 - x)^2 - 4(4 - x) + 1)^{\frac{1}{3}}$

$$= (16 + x^2 - 8x - 16 + 4x + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x^2 - 4x + 1)^{\frac{1}{3}} = f(x)$$

Donc la droite $(\Delta) : x = 2$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f) .

2) $f(x) = \sin^4 x - 5 \cos^2 x + 7$; $D_f = \mathbb{R}$

■ Si $x \in \mathbb{R}$ Alors $(\pi - x) \in \mathbb{R}$

$$\blacksquare f(\pi - x) = \sin^4(\pi - x) - 5 \cos^2(\pi - x) + 7$$

$$= \sin^4 x - 5(-\cos x)^2 + 7$$

$$= \sin^4 x - 5 \cos^2 x + 7 = f(x)$$

Donc la droite (Δ) : $x = \pi/2$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f) .

$$3) f(x) = \text{Arctan} \sqrt{x^2 + 4x}$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x^2 + 4x \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x(x + 4) \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x \leq -4 \text{ ou } x \geq 0\}$$

$$=]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$$

$$\blacksquare \text{Si } x \in D_f \text{ Alors } x \leq -4 \text{ ou } x \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 - x \geq 0 \text{ ou } -4 - x \leq -4$$

$$\Rightarrow (-4 - x) \in D_f$$

$$\blacksquare f(-4 - x) = \text{Arctan} \sqrt{(-4 - x)^2 + 4(-4 - x)}$$

$$= \text{Arctan} \sqrt{x^2 + 8x + 16 - 16 - 4x}$$

$$= \text{Arctan} \sqrt{x^2 + 4x} = f(x)$$

Donc la droite (Δ) : $x = -2$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f) .

$$4) f(x) = \frac{2 - \sin^4 x}{\cos x + 3}$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; \cos x + 3 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; \cos x \neq -3 \text{ toujours vraie}\}$$

$$= \mathbb{R} ; \text{ car } |\cos x| < 1 \text{ toujours}$$

$$\blacksquare \text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ Alors } -x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f(-x) = \frac{2 - \sin^4(-x)}{\cos(-x) + 3} = \frac{2 - (-\sin x)^4}{\cos x + 3}$$

$$= \frac{2 - \sin^4 x}{\cos x + 3} = f(x)$$

Donc la droite (Δ) : $x = 0$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f) .

Solution N° 53 :

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\text{Arctan } x - \frac{1}{\text{Arctan } x} \right)$$

$$= 0^+ - \frac{1}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\sqrt[3]{1 - 6x} + x - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right)$$

$$\text{Avec : } \varphi(x) = \sqrt[3]{1 - 6x} + x$$

$$= \varphi'(x)_{/x=0} = \left(\frac{1}{3}(1 - 6x)^{-\frac{2}{3}}(-6) + 1 \right)_{/x=0}$$

$$= \frac{1}{3}(1 - 0)^{-\frac{2}{3}}(-6) + 1 = -1 = f(0)$$

$$\text{comme : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$$

Alors : f n'est pas continue en zéro.

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\frac{\sqrt[3]{1 - 6x} + x - 1}{x} + 1}{x - 0} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\sqrt[3]{1-6x} + 2x - 1}{x^2} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{(1-6x)^{\frac{1}{3}} - (1-2x)}{x^2} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{(1-6x)^{\frac{1}{3}} - (1-2x)}{x^2} \right) \\
&\quad \times \frac{\left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2 \right)}{\left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2 \right)} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\left((1-6x)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - (1-2x)^3}{x^2 \left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2 \right)} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(1-6x) - (1-8x^3 + 12x^2 - 6x)}{x^2 \left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2 \right)} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{8x^3 - 12x^2}{x^2 \left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2 \right)} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2(8x - 12)}{x^2 \left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2 \right)} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{8x - 12}{(1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-2x)(1-6x)^{\frac{1}{3}} + (1-2x)^2} \\
&= \frac{0 - 12}{(1-0)^{\frac{2}{3}} + (1-0)(1-0)^{\frac{1}{3}} + (1-0)^2} \\
&= \frac{-12}{3} = -4 = f'_g(0) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc f est évidemment dérivable à gauche en 0. Et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à gauche en 0 avec :

$$(\Delta) : y = -4x - 1$$

$$\begin{aligned}
3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{\operatorname{Arctan} x} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{2\pi}
\end{aligned}$$

Donc $(\Delta) : y = \frac{\pi^2 - 4}{2\pi}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de plus l'infini.

$$\begin{aligned}
\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{1-6x} + x - 1}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(1-6x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} + 1 \right) \\
&= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(1-6x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} + 1 \right) \\
&\quad \times \frac{(1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-6x) + 1}{(1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-6x) + 1} \\
&= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left((1-6x)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - 1^3}{x \left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-6x) + 1 \right)} \\
&= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 6x - 1}{x \left((1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-6x) + 1 \right)} \\
&= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{(1-6x)^{\frac{2}{3}} + (1-6x) + 1} \\
&= 1 + \frac{-6}{(1 - (-\infty))^{\frac{2}{3}} + (1 - (-\infty)) + 1} \\
&= 1 + \frac{-6}{+\infty} = 1 + 0^- = 1
\end{aligned}$$

Donc la droite $(D) : y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de moins l'infini.

4) On cherche éventuellement des solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

■ Sur $]0, +\infty[$ On a : $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{\operatorname{Arctan} x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan} x = \frac{1}{\operatorname{Arctan} x}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{Arctan} x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{Arctan} x)^2 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{Arctan} x - 1)(\operatorname{Arctan} x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Oubien } \operatorname{Arctan} x - 1 = 0 \\ \text{Oubien } \operatorname{Arctan} x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Oubien } \operatorname{Arctan} x = 1 \\ \text{Oubien } \operatorname{Arctan} x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Oubien } x = \tan 1 > 0 \\ \text{Oubien } x = \tan(-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \tan 1 \in]0, +\infty[$$

■ Sur $]-\infty, 0[$ On a :

$$\blacksquare f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{1-6x} + x - 1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-6x)^{\frac{1}{3}} + x - 1 = 0 \quad \text{car : } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-6x)^{\frac{1}{3}} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \left((1-6x)^{\frac{1}{3}} \right)^3 = (1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 6x = 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 3 = 0 \quad ; \quad \text{car } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{21}}{2} ; \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right\} \quad ; \quad \Delta = 21$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \in]-\infty, 0[$$

La conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} : $\tan 1$ et $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$

5) Sur $]0, +\infty[$ la fonction f est dérivable car c'est une somme de deux fonctions bien définies et dérivables et on a :

$$\forall x > 0 ; f'(x) = (\operatorname{Arctan} x)' - \left(\frac{1}{\operatorname{Arctan} x} \right)'$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{(\operatorname{Arctan} x)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1}{(\operatorname{Arctan} x)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \left(1 + \frac{1}{(\operatorname{Arctan} x)^2} \right) > 0$$

Donc f est strictement \nearrow sur $]0, +\infty[$

■ Sur $]-\infty, 0[$ f est dérivable

Car c'est un quotient bien défini ($x \neq 0$) de deux fonctions dérivables et on a :

$$\forall x < 0 ; f'(x) = \left(\frac{(1-6x)^{\frac{1}{3}} + x - 1}{x} \right)'$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x \left(\frac{1}{3}(1-6x)^{-\frac{2}{3}}(-6) + 1 \right) - (1-6x)^{\frac{1}{3}} - x + 1}{x^2} \\
 &= \frac{-2x(1-6x)^{-\frac{2}{3}} + x - (1-6x)^{\frac{1}{3}} - x + 1}{x^2} \\
 &= \frac{-2x(1-6x)^{-\frac{2}{3}} - (1-6x)^{\frac{1}{3}} + 1}{x^2} < 0
 \end{aligned}$$

Soit : $\varphi(x) = 2x(1-6x)^{-\frac{2}{3}} + (1-6x)^{\frac{1}{3}}$

La fonction φ est dérivable sur $] -\infty, \frac{1}{6}[$
et on a encore le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) &= 2(1-6x)^{-\frac{2}{3}} + 2x \left(\frac{-2}{3} \right) (1-6x)^{-\frac{5}{3}}(-6) \\
 &\quad + \frac{1}{3}(1-6x)^{-\frac{2}{3}}(-6) \\
 &= 2(1-6x)^{-\frac{2}{3}} + 8x(1-6x)^{-\frac{5}{3}} - 2(1-6x)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= 8x(1-6x)^{-\frac{5}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad x < 0 &\Rightarrow 8x < 0 \text{ et } (1-6x)^{-\frac{5}{3}} > 0 \\
 &\Rightarrow 8x(1-6x)^{-\frac{5}{3}} < 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x < 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est } \searrow \text{ sur }]-\infty, 0[$$

$$\Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \text{ car } x < 0$$

$$\Rightarrow 2x(1-6x)^{-\frac{2}{3}} + (1-6x)^{\frac{1}{3}} > 1$$

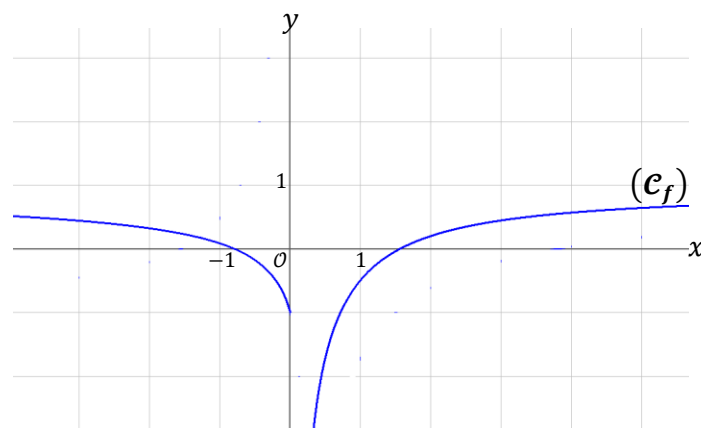
$$\Rightarrow -2x(1-6x)^{-\frac{2}{3}} - (1-6x)^{\frac{1}{3}} + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x(1-6x)^{-\frac{2}{3}} - (1-6x)^{\frac{1}{3}} + 1}{x^2} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x < 0$$

$$\Rightarrow f \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0[$$

6) La représentation graphique :



7) Comme f est continue et étant strictement \nearrow sur $]0, +\infty[= I$ Alors f réalise une bijection g de I sur $g(I)$:

$$\blacksquare \quad g(I) = f(I) = f(]0, +\infty[)$$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$= \left] -\infty ; \frac{\pi^2 - 4}{2\pi} \right[= J$$

Ainsi : g et g^{-1} sont définies ainsi :

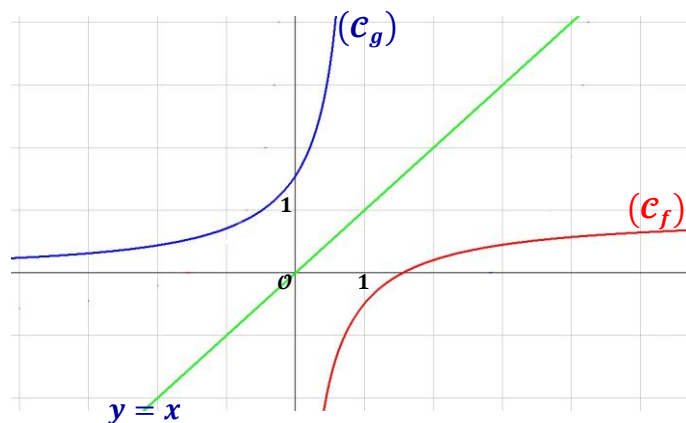
$$\blacksquare \quad g :]0, +\infty[\mapsto \left] -\infty ; \frac{\pi^2 - 4}{2\pi} \right[$$

$$x \mapsto g(x)$$

$$\blacksquare \quad g^{-1} : \left] -\infty ; \frac{\pi^2 - 4}{2\pi} \right[\mapsto]0, +\infty[$$

$$y \mapsto g^{-1}(y)$$

Pour construire $(C_{g^{-1}})$ il suffit de tracer la symétrique de (C_f) dans $]0, +\infty[$ par rapport à $(\Delta) : y = x$, (la 1^{ère} bissectrice)



8) Soit $y = g^{-1}(x) > 0$; $\forall x \in J$

$$\Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan} y - \frac{1}{\operatorname{Arctan} y} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\operatorname{Arctan} y)^2 - 1}{\operatorname{Arctan} y} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} = x \text{ avec } \alpha = \operatorname{Arctan} y$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2} ; \Delta = x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan} y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan(\operatorname{Arctan} y) = \tan\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \tan\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$$

Pour décider entre ces deux valeurs il suffit de prendre un élément trivial à calculer l'image.

$$\text{Si} : g^{-1}(x) = \tan\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$$

$$\text{Alors } g^{-1}(0) = \tan\left(\frac{0 - \sqrt{0 + 4}}{2}\right) = \tan(-1)$$

C'est une contradiction car $g^{-1}(0) = \tan 1$

Donc on peut en déduire que :

$$g^{-1}(x) = \tan\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) ; \forall x \in J$$

$$\text{Ainsi } g^{-1} : \left] -\infty ; \frac{\pi^2 - 4}{2\pi} \right[\mapsto]0 ; +\infty[\\ x \mapsto \tan\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$$

Solution N° 54 :

Rappel : une fonction T-périodique

■ f est T-périodique

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f & ; \begin{cases} (x+T) \in D_f \\ (x-T) \in D_f \end{cases} \\ f(x+T) = f(x-T) = f(x) \end{cases}$$

1) On a : $\varphi(x) = 2 \sin^2 x + 4 \sin x + 2$

On a : $D_\varphi = \mathbb{R}$

$$\text{Donc} : \forall x \in D_\varphi ; \begin{cases} (x+2\pi) \in D_\varphi \\ (x-2\pi) \in D_\varphi \end{cases}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} \varphi(x+2\pi) &= 2 \sin^2(x+2\pi) + 4 \sin(x+2\pi) + 2 \\ &= 2 \sin^2(x) + 4 \sin(x) + 2 = \boxed{\varphi(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x-2\pi) &= 2 \sin^2(x-2\pi) + 4 \sin(x-2\pi) + 2 \\ &= 2 \sin^2(x) + 4 \sin(x) + 2 = \boxed{\varphi(x)} \end{aligned}$$

Donc la fonction φ est 2π -périodique

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ On a :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \varphi'(x) &= 2(\sin^2 x)' + 4(\sin x)' \\ &= 2(2 \sin x \cdot \cos x) + 4(\cos x) \\ &= 4 \cos x \cdot \sin x + 4 \cos x \\ &= 4 \cos x (\sin x + 1) \end{aligned}$$

3) Voici le tableau de variations :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\varphi'(x)$		-	+	-	+	-
$\varphi(x)$	2		8		8	2

4) Soit (T) la tangente à (\mathcal{C}_φ) en 0.

$$(T) : y = \varphi'(0)(x - 0) + \varphi(0)$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = 4(x - 0) + 2$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = 4x + 2$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$ et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \varphi''(x) &= ((4 \cos x)(1 + \sin x))' \\ &= (4 \cos x)'(1 + \sin x) + (4 \cos x)(1 + \sin x)' \\ &= -4 \sin x (1 + \sin x) + 4 \cos x \cdot \cos x \\ &= -4 \sin x - 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x \\ &= -4 \sin x - 4 \sin^2 x + 4(1 - \sin^2 x) \\ &= -4 \sin x - 4 \sin^2 x + 4 - 4 \sin^2 x \\ &= 4(-2 \sin^2 x - \sin x + 1) \end{aligned}$$

Solution N° 55 :

$$1) f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{x+1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x + 1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x \neq -1\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2(x+1)} \right)$$

$$= (+\infty) \left(\frac{1}{2} + 0 - 0 \right) = +\infty$$

$$\blacksquare \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) - 4 \lim_{\substack{t \rightarrow 0^- \\ t = x+1}} \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 2 \right) - 4 \left(\frac{1}{0^-} \right) = \boxed{+\infty}$$

$$\blacksquare \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) - 4 \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x+1}} \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 2 \right) - 4 \left(\frac{1}{0^+} \right) = \boxed{-\infty}$$

$$\blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2(x+1)} \right)$$

$$= (+\infty) \left(\frac{1}{2} + 0 - 0 \right) = \boxed{+\infty}$$

3) Soit $x \in D_f$ et on procède comme suit

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 2x + 2 - 4 \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \\ &= x + 2 + \frac{4}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

4) Soit (T) la tangente à (C_f) en -3

$$(T) : y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = 0(x+3) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = \frac{1}{2}$$

5) Soit $x \in D_f$ et on procède comme suit

$$\begin{aligned} \blacksquare f''(x) &= \left(x + 2 + \frac{4}{(x+1)^2} \right)' \\ &= 1 + 4 \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right)' \\ &= 1 + 4 \left(\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} \right) \\ &= 1 - \frac{8}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+1)^3 - 2^3}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+1-2)((x+1)^2 - 2(x+1) + 4)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 7)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

6) D'abord, On remarque que la quantité $(x^2 + 4x + 7)$ ne s'annule jamais car $\Delta < 0$ et par la suite elle a un signe constant (+) il suffit de remplacer par une valeur triviale pour la vérification.

$$\Leftrightarrow \text{signe}(f''(x)) \equiv \text{signe}(x-1 \text{ et } x+1)$$

Ainsi on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	+		-	+
$f'(x)$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

7) D'abord on doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 + \frac{4}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(x+1)^2} = -(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 4 + (x+2)(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{division} \\ \text{euclidienne} \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ car } x^2 + x + 2 \neq 0 \text{ car } \Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

La conclusion : $f'(-3) = 0$

$$x < -3 \Rightarrow f'(x) < f'(-3) \text{ car } f' \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 ; \forall x \in]-\infty, -3[$$

$$\blacksquare -3 < x < -1 \Rightarrow f'(x) > f'(-3) ; f' \nearrow$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in]-3, -1[$$

$$\blacksquare -1 < x < 1 \Rightarrow x < 1$$

$$\Rightarrow f'(x) > f'(1) ; f' \searrow \text{sur }]-1, 1[$$

$$\Rightarrow f'(x) > 4 > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in]-1, 1[$$

$$\blacksquare x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) ; f' \nearrow]1, +\infty[$$

$$\Rightarrow f'(x) > 4 > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in]1, +\infty[$$

D'où l'on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	-		+

8) Voici le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow	\nearrow
		$1/2$	$-\infty$	$+\infty$

Solution N° 56 :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} \right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 + 0) = \boxed{+\infty}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \cdot \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{1}{-0^+} = \frac{1}{0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x - 1 + \frac{1}{x+1} - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= 1 + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1 - (x+1)}{x(x+1)} \right)$$

$$= 1 + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{-x}{x(x+1)} \right)$$

$$= 1 + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{-1}{x+1} \right) = 1 - \frac{1}{0+1} = \boxed{0}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{2-x}} - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2-0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right)$$

Alors g n'est pas dérivable en zéro, mais on peut dire que g est dérivable à droite en zéro et on écrit : $g'_d(0) = 0$

Et on a encore g est dérivable à gauche en zéro et on écrit : $g'_g(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Géométriquement on dira que (C_g) admet une demi-tangente (Δ) à gauche en 0 avec $(\Delta) : y = g'_g(0)(x - 0) + g(0)$

$$\Leftrightarrow (\Delta) : y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

Et (C_g) admet une demi-tangente (D) à droite en zéro avec :

$$(D) : y = g'_d(0)(x - 0) + g(0)$$

$$\Leftrightarrow (D) : y = 0 \text{ (l'axe des abscisses)}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ (g n'est pas dérivable en 0)

$$\text{Si } x \in]-\infty, 0[\text{ Alors on a : } g(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$$

$$\blacksquare g'(x) = \frac{\sqrt{2-x} - x(\sqrt{2-x})'}{2-x}$$

$$= \frac{\sqrt{2-x} - x \left(\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \right)}{2-x}$$

$$= \frac{\sqrt{2-x}}{2-x} + \frac{x}{2\sqrt{2-x} \cdot (2-x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{x}{2\sqrt{2-x} \cdot (2-x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2-x}} \left(1 + \frac{x}{2(2-x)} \right)$$

Si $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$\blacksquare g'(x) = 1 + \left(\frac{1}{x+1} \right)'$$

$$= 1 + \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$$

4) on étudie pour l'instant le signe de $g'(x)$

$$\text{Si } x \in]-\infty, 0[; g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \left(1 + \frac{x}{2(2-x)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2-x}} \left(\frac{2(2-x)}{2(2-x)} + \frac{x}{2(2-x)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2-x}} \left(\frac{4-x}{2(2-x)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \left(\frac{4-x}{2-x} \right) > 0 ; \forall x < 0$$

$$\text{Car : } \text{signe}(g'(x)) \equiv \text{signe} \left(\frac{4-x}{2-x} \right)$$

Donc g est croissante sur $]-\infty, 0[$

$$\text{Si } x \in]0, +\infty[; g'(x) = \frac{x}{x+1}$$

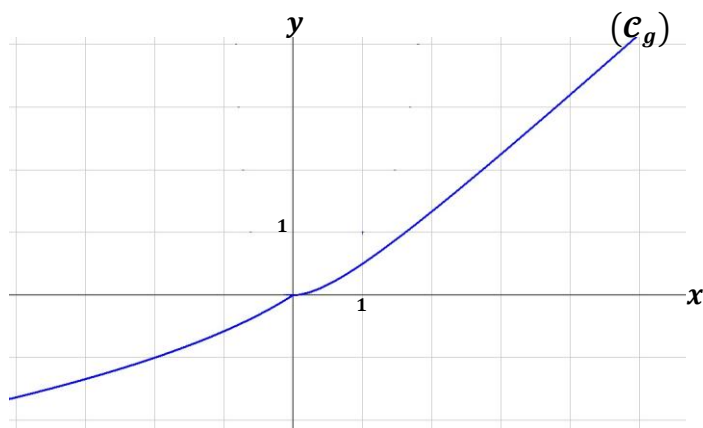
$$\text{Et on a : } \forall x > 0 ; \frac{x}{x+1} > 0$$

Donc g est croissante sur $]0, +\infty[$

5) Voici le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	↗		↘

6) voici la représentation graphique :



Solution N° 57 :

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{\sqrt[4]{x-2} - 0}{x - 2} \right) \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x-2)^{\frac{1}{4}}}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{4}}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 2 avec : $(\Delta) : x = 2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x + 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x}} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \right)$$

$$= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \sqrt{1-x} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{x+1}}} \frac{1}{t} \right) = \sqrt{2} \times \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (D) verticale à droite en -1 avec : $(D) : x = -1$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}$$

$$= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x+2} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$$

$$= \sqrt{3} \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{x-1}}} \frac{1}{t} \right) = \sqrt{3} \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 avec : $(\Delta) : x = 1$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 5} \right)$$

$$= \frac{1}{5} = f'_d(0)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Donc f est dérivable à droite en 0 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à droite en 0 avec : $(\Delta) : y = f'_d(0)(x - 0) + f(0)$

$$\Leftrightarrow (\Delta) : y = \frac{1}{5}x$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\cos(\sqrt[3]{x}) - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1 - \cos(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^2} \right) \left(\frac{-(\sqrt[3]{x})^2}{x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1 - \cos(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^2} \right) \times \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{-1}{x^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{3}}}} \left(\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right) \times \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{3}}}} \left(\frac{-1}{t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{0^+} \right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 0 avec : $(\Delta) : x = 0$

La droite (Δ) est l'axe des ordonnées.

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{(\text{Arctan} \sqrt{x-3})^2 - 0}{x - 3} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{(\text{Arctan} \sqrt{x-3})^2}{x - 3}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{\text{Arctan} \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} \right)^2$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left(\frac{\text{Arctan} t}{t} \right)^2 = 1^2 = 1$$

Donc f est dérivable à droite en 3 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à droite en 3 avec : $(\Delta) : y = f'_d(3)(x - 3) + f(3)$

$$\Leftrightarrow (\Delta) : y = x - 3$$

Solution N° 58 :

$$1) f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 8} - 2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} - 2}{x} \right)$$

$$\times \frac{(x^3 + 8)^{\frac{2}{3}} + 2(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} + 4}{(x^3 + 8)^{\frac{2}{3}} + 2(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} + 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - 2^3}{x \left((x^3 + 8)^{\frac{2}{3}} + 2(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} + 4 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 8 - 8}{x \left((x^3 + 8)^{\frac{2}{3}} + 2(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} + 4 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{(x^3 + 8)^{\frac{2}{3}} + 2(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} + 4} \right)$$

$$= \frac{0^2}{8^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot 8^{\frac{1}{3}} + 4} = \frac{0}{12} = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

2) l'approximation affine de f au voisinage de 0 est donnée ainsi :

$$f(x) \approx f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \approx 2 \text{ au voisinage de } 0$$

3) $\sqrt[3]{8,004} = \sqrt[3]{8 + 0,004}$

$$= \sqrt[3]{8 + (\sqrt[3]{0,004})^3} \approx 2$$

Car $\sqrt[3]{0,004}$ est au voisinage de 0.

Et : $\sqrt[3]{7,9995} = \sqrt[3]{8 - 5 \times 10^{-4}}$

$$= \sqrt[3]{8 - (\sqrt[3]{5 \times 10^{-4}})^3} \approx 2$$

Car $-\sqrt[3]{5 \times 10^{-4}}$ est au voisinage de 0.

Solution N° 59 :

1) $f'(x) = (4x^5 + 8x^2 - 13x + 7)'$

$$= 20x^4 + 16x - 13$$

2) $h'(x) = 7(x^2 + 5x + 4 \cos x)^6 \cdot (x^2 + 5x + 4 \cos x)'$

$$= 7(x^2 + 5x + 4 \cos x)^6 \cdot (2x + 5 - 4 \sin x)$$

3) $u'(x) = (x^4 + x + 2)' \sin 8x + (\sin 8x)'(x^4 + x + 2)$

$$= (4x^3 + 1) \sin 8x + 8 \cos 8x \cdot (x^4 + x + 2)$$

4) $g'(x) = \left(5(x^4 + 1)^{\frac{-1}{2}}\right)'$

$$= 5 \cdot \frac{-1}{2} (x^4 + 1)^{\frac{-3}{2}} \cdot (4x^3) = \frac{-10x^3}{\sqrt{(x^4 + 1)^3}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) $k'(x) = \left(\frac{2x^3 + x + 2}{x^2 + x}\right)'$

$$= \frac{(6x^2 + 1)(x^2 + x) - (2x + 1)(2x^3 + x + 2)}{(x^2 + x)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 2}{(x^2 + x)^2}$$

6) $v'(x) = \left((x^2 + x + 4)^{\frac{1}{3}}\right)'$

$$= \frac{1}{3} (x^2 + x + 4)^{\frac{-2}{3}} \cdot (2x + 1)$$

$$= \frac{2x + 1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + x + 4)^2}}$$

Solution N° 60 :

1) $f(x) = x^4 \cdot \text{Arctan } x$; $D_f = \mathbb{R}$

■ $f'(x) = 4x^3 \cdot \text{Arctan } x + \frac{x^4}{1 + x^2}$

■ $D_{f'} = \{x \in D_f ; x^2 + 1 \neq 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x^2 \neq -1\} = \mathbb{R}$$

2) $f(x) = \sqrt[3]{\text{Arctan } x}$; $D_f = \mathbb{R}$

■ $f'(x) = \left((\text{Arctan } x)^{\frac{1}{3}}\right)'$

$$= \frac{1}{3} (\text{Arctan } x)^{\frac{-2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(\text{Arctan } x)^2 \cdot (1 + x^2)}}$$

■ $D_{f'} = \{x \in D_f ; \text{Arctan } x > 0 \text{ et } 1 + x^2 \neq 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\} =]0, +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{\sqrt{x}} \quad ; \quad D_f =]0, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{(\text{Arctan } x)' \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x})' \cdot \text{Arctan } x}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} - \frac{\text{Arctan } x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \right) - \frac{\text{Arctan } x}{x \cdot 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} - \frac{\text{Arctan } x}{2 \cdot \sqrt{x}^3}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \left\{ x \in D_f \quad ; \quad \begin{array}{l} \text{et } x > 0 \\ \text{et } 1+x^2 \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x > 0 \} =]0, +\infty[$$

$$4) f(x) = x \cdot \text{Arctan} \sqrt{x} \quad ; \quad D_f = [0, +\infty[$$

$$\blacksquare f'(x) = 1 \cdot \text{Arctan} \sqrt{x} + x(\text{Arctan} \sqrt{x})'$$

$$= \text{Arctan} \sqrt{x} + x \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \right)$$

$$= \text{Arctan} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{ x \in D_f \quad ; \quad x \geq 0 \text{ et } 1+x \neq 0 \}$$

$$= \{ x \in D_f \quad ; \quad x \geq 0 \text{ et } x \neq -1 \} = [0, +\infty[$$

$$5) f(x) = \sqrt{x + \text{Arctan } x}$$

$$\blacksquare D_f = \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x + \text{Arctan } x \geq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \varphi(x) \geq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \varphi(x) \geq \varphi(0) \}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad \varphi \nearrow \text{ bijective } \}$$

$$= [0, +\infty[$$

$$\blacksquare f'(x) = \left((x + \text{Arctan } x)^{\frac{1}{2}} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} (x + \text{Arctan } x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x + \text{Arctan } x)'$$

$$= \frac{1}{2} (x + \text{Arctan } x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (x + \text{Arctan } x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{x^2 + 2}{2\sqrt{x + \text{Arctan } x} \cdot (x^2 + 1)}$$

$$\blacksquare D_{f'} = \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x + \text{Arctan } x > 0 \}$$

$$=]0, +\infty[$$

$$6) f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$\blacksquare D_f = \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 1-x^2 \neq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

Solution N° 61 :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^n - a^n}{x - a} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \varphi(x) = x^n}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \right)$$

$$= \varphi'(x)_{/x=a} = (n x^{n-1})_{/x=a} = n \cdot a^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt[n]{x+a} - \sqrt[n]{2a}}{x-a} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \varphi(x) = \sqrt[n]{x+a}}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} \right) \\
&= \varphi'(x)_{/x=a} = \left(\frac{1}{n} (x+a)^{\frac{1}{n}-1} \right)_{/x=a} \\
&= \left(\frac{1}{n} (2a)^{\frac{1}{n}-1} \right) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{(2a)^{n-1}}} \quad ; \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^n - 1}{x} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \varphi(x) = (1+x)^n}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x-0} \right) \\
&= \varphi'(x)_{/x=0} = (n(1+x)^{n-1})_{/x=0} \\
&= n(1+0)^{n-1} = n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^n x - 1}{x} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \varphi(x) = \cos^n x}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x-0} \right) = \varphi'(x)_{/x=0} \\
&= n(\cos x)^{n-1} (-\sin x)_{/x=0} \\
&= -n(\cos 0)^{n-1} \sin 0 = \boxed{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x-a} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \varphi(x) = x\sqrt{x}}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} \right) = \varphi'(x)_{/x=a} \\
&= \left(\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2} \right)_{/x=a} = \left(\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{a}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \varphi(x) = \cos x}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x-0} \right) \\
&= \varphi'(x)_{/x=0} = (-\sin x)_{/x=0} = -\sin 0 = \boxed{0}
\end{aligned}$$

Solution N° 62 :

$$1) \text{ Soit } f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x} \quad ; \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$$

$$\blacksquare \quad f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \quad ; \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$$

$$\blacksquare \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x < \pi$$

$$\Rightarrow \cos \pi < \cos x \leq \cos \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \cos \text{ est } \searrow$$

$$\Rightarrow -1 < \cos x \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$$

$$\Rightarrow f \text{ est } \nearrow \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$$

2) comme f est strictement monotone (croissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$) et continue alors f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$ sur son image $f\left(\left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[\right)$.

$$\blacksquare \quad f\left(\left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right[\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) ; \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) \right) = [2, +\infty[$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Ainsi : $f : \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[\mapsto]2, +\infty[$ est une application bijective et sa bijection réciproque est définie ainsi :

$$f^{-1} :]2, +\infty[\mapsto \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

3) Soit $x \in I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ et on procède :

$$\begin{aligned} & \blacksquare (f(x) - 1) \cdot \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)} \\ &= \left(\frac{1}{\sin x}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)} \\ &= \left(\frac{1}{\sin x}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\sin x} - 2 - \frac{2}{\sin x}} \\ &= \left(\frac{1}{\sin x}\right) \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} = \frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \times \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{(-\cos x)}{(\sin x)} \\ &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = f'(x) \end{aligned}$$

4) On a f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ et :

$$f'(x) \neq 0 ; \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right)$

$$f\left(\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right) =]2, +\infty[$$

$$\text{et que : } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} ; \quad \forall x > 2$$

$$5) \text{ Soit } x \in]2, +\infty[\Rightarrow f^{-1}(x) \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

On a pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[= I$:

$$f'(x) = (f(x) - 1) \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$$

Pour $f^{-1}(x) \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[\subset I$ on ait :

$$\begin{aligned} & f'(f^{-1}(x)) \\ &= (f(f^{-1}(x)) - 1) \sqrt{(f(f^{-1}(x)))^2 - 2f(f^{-1}(x))} \\ &= (x - 1) \sqrt{x^2 - 2x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 2x}} ; \quad \forall x > 2 \end{aligned}$$

Solution N° 63 :

1) On a la fonction \sin est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier Alors on peut appliquer le TAF à \sin sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit pour le moment l'intervalle $[x, y]$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Ainsi : $\begin{cases} \sin \text{ est continue sur } [x, y] \\ \sin \text{ est dérivable sur }]x, y[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]x; y[: \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos c$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\cos c| \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{|\sin x - \sin y|}{|x - y|} \leq 1$$

$$\Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

2) Soit $\varphi(t) = t - \text{Arctan } t$; $\forall x \in \mathbb{R}$
 La fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier car c'est la somme de deux fonctions toutes les deux continues et dérivables. Donc on peut appliquer le TAF à φ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit pour le moment l'intervalle $[0, x]$; $x > 0$:

Ainsi : $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{x - \text{Arctan } x}{x} = 1 - \frac{1}{1 + c^2} \quad ; \quad 0 < c < x$$

$$\blacksquare \quad c > 0 \Rightarrow c^2 + 1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + c^2} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x - \text{Arctan } x}{x} > 0$$

$$\Rightarrow x - \text{Arctan } x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x > \text{Arctan } x} \rightsquigarrow (1)$$

Soit encore $\psi(x) = \text{Arctan } t - \frac{t}{1+t^2}$; $\forall t \in \mathbb{R}$
 La fonction ψ est continue et dérivable sur \mathbb{R} Donc On peut appliquer le TAF à la fonction ψ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit l'intervalle $[0, x]$; $x > 0$:

Ainsi : $\begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \psi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arctan } x - \frac{x}{1+x^2}}{x} = \frac{2c^2}{(1+c^2)^2}$$

$$\blacksquare \quad \frac{2c^2}{(1+c^2)^2} > 0 \Rightarrow \frac{\text{Arctan } x - \frac{x}{1+x^2}}{x} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Arctan } x - \frac{x}{1+x^2} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Arctan } x > \frac{x}{1+x^2}} \rightsquigarrow (2)$$

D'après les résultats (1) et (2) on a :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad \frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan } x < x$$

3) Soit $\varphi(t) = t \cdot \sin t$; $\forall t \in \mathbb{R}$

La fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier car c'est le produit de deux fonctions toutes les deux continues et dérivables. Donc on peut appliquer le TAF à φ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit pour le moment l'intervalle $[x, y]$; $0 \leq x < y$:

Ainsi : $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [x, y] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]x, y[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]x, y[\quad ; \quad \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{y \sin y - x \sin x}{y - x} = \sin c + c \cdot \cos c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et } 0 < c < 10 \\ \text{et } -1 < \cos c < 1 \\ \text{et } -1 < \cos c < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 < \sin c + c \cdot \cos c < 11$$

$$\Rightarrow \boxed{|\sin c + c \cdot \cos c| < 11}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \left| \frac{y \sin y - x \sin x}{y - x} \right| < 11$$

$$\Rightarrow \frac{|y \sin y - x \sin x|}{|y - x|} < 11$$

$$\Rightarrow |y \sin y - x \sin x| < 11|y - x|$$

$$\Rightarrow |x \sin x - y \sin y| < 11|x - y|$$

Quand $x = y$ on aurait $|0| = 11 \cdot |0|$

$$\Rightarrow |x \sin x - y \sin y| \leq 11|x - y| ; \forall (x, y) \in [0; 10]^2$$

4) Soit $\varphi(t) = \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}t$; $\forall t \in \mathbb{R}$

La fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier car c'est la somme de deux fonctions toutes les deux continues et dérivables. Donc on peut appliquer le TAF à φ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit pour le moment l'intervalle $[0, x]$; $\forall x > 0$:

Ainsi : $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}x}{x - 0} = \cos c - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\blacksquare 0 < c < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(4) < \cos c < \cos 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos c < 1$$

$$\Rightarrow \cos c - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}x}{x} > 0$$

$$\Rightarrow \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}x > 0$$

$$\Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}x ; \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

Solution N° 64 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{2}{3}} - 1}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x - 1} \right) - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(x - 1)^{\frac{2}{3}}}{(x - 1)}$$

$$= \left(x^{\frac{2}{3}} \right)'_{/x=1} - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x - 1}} \left(\frac{t^{\frac{2}{3}}}{t} \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 et géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) verticale à droite en 1 avec : $(\Delta) : x = 1$.

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - \left((x - 1)^{\frac{2}{3}} \right)^3}{x^{\frac{4}{3}} + (x(x - 1))^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - (x-1)^2}{x^{\frac{4}{3}} + (x(x-1))^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1) \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(x-1)^{\frac{1}{3}}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{x}}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(x-1)^{\frac{1}{3}}} \right) \\
&= \frac{2-0}{+\infty + \infty + (1-0)(+\infty)} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

3) Soit $x \in [1, +\infty[$ et on procède ainsi :

$$\begin{aligned}
\blacksquare f'(x) &= \left(x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' \\
&= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{2}{3} \left(x^{-\frac{1}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}}\right) \\
\blacksquare x > x-1 \geq 0 &\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} > (x-1)^{\frac{1}{3}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \\
&\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} < (x-1)^{-\frac{1}{3}} \\
&\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}} < 0 \\
&\Rightarrow \frac{2}{3} \left(x^{-\frac{1}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}}\right) < 0 \\
&\Rightarrow f'(x) < 0 ; \forall x \in [1, +\infty[
\end{aligned}$$

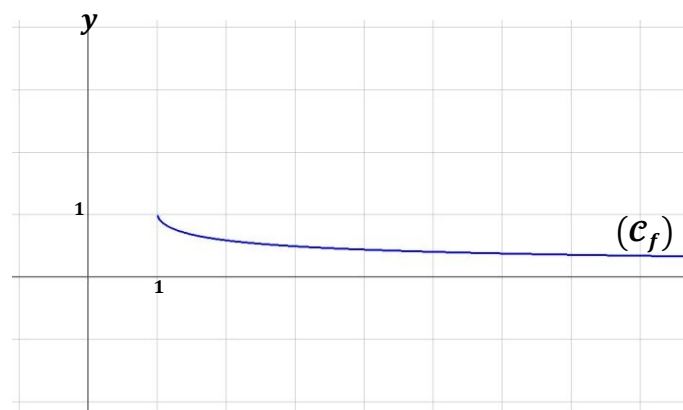
$\Rightarrow f$ est strictement \searrow sur $[1, +\infty[$

4) Soit $x \in [1, +\infty[$ et on procède ainsi :

$$\begin{aligned}
\blacksquare f''(x) &= \frac{2}{3} \left(x^{-\frac{4}{3}} - (x-1)^{-\frac{4}{3}}\right)' \\
&= \frac{2}{3} \left(-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} + \frac{4}{3}(x-1)^{-\frac{7}{3}}\right) \\
&= \frac{2}{9} \left(-x^{-\frac{7}{3}} + (x-1)^{-\frac{7}{3}}\right) \\
\blacksquare x > x-1 \geq 0 &\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} > (x-1)^{\frac{4}{3}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} < \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} \\
&\Rightarrow x^{-\frac{4}{3}} < (x-1)^{-\frac{4}{3}} \\
&\Rightarrow \frac{2}{9} \left(x^{-\frac{4}{3}} - (x-1)^{-\frac{4}{3}}\right) > 0 \\
&\Rightarrow f''(x) > 0 ; \forall x \in [1, +\infty[\\
&\Rightarrow (C_f) \text{ est convexe sur } [1, +\infty[
\end{aligned}$$

5) Voici le tableau de variations de f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0



You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 65 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x+1)^{10} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) ; \varphi(x) = (x+1)^{10}$$

$$= \varphi'(x)_{/x=0} = 10(x+1)^9_{/x=0} = 10$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x + \sin x - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) ; \varphi(x) = \cos x + \sin x$$

$$= \varphi'(x)_{/x=0} = (\cos x - \sin x)_{/x=0} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \right) ; \varphi(x) = \cos x$$

$$= 2\varphi'(x)_{/x=\frac{\pi}{3}} = (-2 \sin x)_{/x=\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\sqrt{3}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\psi(x) - \psi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right)}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \varphi(x) = \sin x - \cos x \\ \psi(x) = \sin x + \cos x \end{cases}$$

$$= \left(\varphi'(x)_{/x=\frac{\pi}{4}} \right) \times \left(\frac{1}{\psi'(x)_{/x=\frac{\pi}{4}}} \right)$$

$$= \left((\sin x + \cos x)_{/x=\frac{\pi}{4}} \right) \times \left(\frac{1}{(\cos x - \sin x)_{/x=\frac{\pi}{4}}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{0^\pm} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < \frac{\pi}{4} \\ -\infty & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Solution N° 66 :

Rappel : (Extrémums)

■ *Extrémum* = $\begin{cases} \text{oubien minimum} \\ \text{oubien maximum} \end{cases}$

■ *f* admet un extrémum en $a \in D_f$
 $\Leftrightarrow f'(a) = 0$

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} ; x \in \mathbb{R}^*$$

$$\blacksquare f'(x) = \left(\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x} \right)'$$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) - (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 + 1} \right) ; x \in \mathbb{R}^*$$

On remarque que $f'(x)$ ne s'annule jamais sur \mathbb{R}^* sinon on aurait :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1=1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \in \mathbb{R}^*$$

Donc f n'admet aucun extrémum sur \mathbb{R}^*

Pour les variations de f on a :

$$\blacksquare \forall x \neq 0 ; x^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2+1 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} \right) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 ; \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-3}{x} ; x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})'x - 1(\sqrt{x+1}-3)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} + 3}{x^2}$$

$$\text{Soit : } \varphi(x) = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} + 3$$

φ est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Et on a pour $\forall x > -1$:

$$\blacksquare \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+1} - x \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)}{x+1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{2\sqrt{x+1} \cdot (x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \frac{-x}{4\sqrt{x+1} \cdot (x+1)}$$

$$\blacksquare \text{ Si } -1 < x \leq 0 \Rightarrow \frac{-x}{4\sqrt{x+1} \cdot (x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est croissante sur }]-1,0]$$

$$\blacksquare \text{ Si } x \geq 0 \Rightarrow \frac{-x}{4\sqrt{x+1} \cdot (x+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[$$

On a φ est continue et strictement \nearrow sur $]-1,0]$ Donc φ réalise une bijection de $]-1,0]$ sur son image $f(]-1,0]) =]-\infty,2]$ d'où selon la définition d'une application bijective on en déduit que :

$$(\forall y \in]-\infty,2]) (\exists ! x \in]-1,0]) : \varphi(x) = y$$

$$(0 \in]-\infty,2]) (\exists ! \alpha \in]-1,0]) : \varphi(\alpha) = 0$$

On a aussi φ est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ Donc φ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers son image $\varphi([0,+\infty[) =]-\infty,2]$ Ainsi selon la définition d'une application bijective on écrit :

$$(\forall y \in]-\infty,2]) (\exists ! x \in [0,+\infty[) : \varphi(x) = y$$

$(0 \in]-\infty, 2]) (\exists! \beta \in [0, +\infty[) : \varphi(\beta) = 0$

■ Si $-1 < x \leq \alpha \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(\alpha) ; \varphi \nearrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) \leq 0 \text{ sur }]-1, \alpha]}$

■ Si $\alpha \leq x \leq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(\alpha) ; \varphi \nearrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) \geq 0 \text{ sur } [\alpha, 0]}$

■ Si $0 \leq x \leq \beta \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(\beta) ; \varphi \searrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) \geq 0 \text{ sur } [0, \beta]}$

■ Si $x \geq \beta \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(\beta) ; \varphi \searrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) \leq 0 \text{ sur } [\beta, +\infty[}$

Voici un tableau récapitulatif :

x	-1	α	0	β	$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3		$f(\alpha)$		0

D'après ce tableau on a $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

Donc f présente des extrémums en α et β . L'extrémum en α est un minimum local car f est \searrow sur $]-1, \alpha]$ et f est \nearrow sur $[\alpha, 0[$.

Donc la valeur minimale de f sur $]-1, 0[$ est : $f(\alpha) \approx f(-0,92) \approx 2,95$

L'extrémum en β est un maximum local car f est \nearrow sur $]0, \beta]$ et encore que f est \searrow sur $[\beta, +\infty[$. Donc la valeur maximale de f sur $]0, +\infty[$ est :

$f(\beta) \approx f(32,98) \approx 0,085$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x ; x \in \mathbb{R}$

■ $f'(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

■ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 2 \\ \text{ou bien } x = -3 \end{cases}$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$f(-3)$		$f(2)$	

La fonction f présente deux extrémums en -3 et 2 lesquels ?

En -3 c'est un maximum locale car f est \nearrow sur $]-\infty, -3]$ et \searrow sur $]-3, 2[$. Donc f présente un maximum locale sur $]-\infty, 2]$ et la valeur maximale de la fonction f sur $]-\infty, 2]$ est $f(-3) = 27/2$

En 2 c'est un minimum locale car f est \searrow sur $]-3, 2]$ et \nearrow sur $[2, +\infty[$. Donc f présente un minimum locale sur $]-3, +\infty[$ et la valeur minimale de la fonction f sur $]-3, +\infty[$ est $f(2) = -22/3$

4) $f(x) = x^4 - 4x ; \forall x \in \mathbb{N}$

■ $f'(x) = 4x^3 - 4 ; \forall x \in \mathbb{R}$

$= 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$

■ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x \in \{1\}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

On a $f'(1) = 0$ Donc f présente un extrémum et c'est un minimum globale car f est \searrow sur $]-\infty, 1]$ et f est \nearrow sur $[1, +\infty[$ et la valeur minimale de f sur \mathbb{R} est sûrement $f(1) = -3$.

$$5) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0 ; \quad x^2 + 1 > x^2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

$\Rightarrow f$ est strictement \searrow sur \mathbb{R}

Comme f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} Alors f n'admet aucun extrémum sur \mathbb{R} .

$$6) f(x) = \sqrt{x} - x^2 ; \quad x \geq 0$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x$$

$$\blacksquare f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = (1/4)^{2/3}$$

x	0	$(\frac{1}{4})^{2/3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$f((\frac{1}{4})^{2/3})$	$-\infty$

On a $f'((\frac{1}{4})^{2/3}) = 0$ Donc f présente un extrémum et c'est un maximum global car f est \nearrow sur $[0, (\frac{1}{4})^{2/3}]$ et \searrow sur $[(\frac{1}{4})^{2/3}, +\infty[$ et ainsi la valeur maximale de f sur \mathbb{R}^+ est $f((\frac{1}{4})^{2/3}) \approx 0,47$

Solution N° 67 :

1) 1^{ère} Méthode : nombre dérivé

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} \right)$$

$$= (\text{Arctan}(3x))'_{/x=0}$$

$$= \left(\frac{3}{1 + 9x^2} \right)_{/x=0} = \frac{3}{1 + 0} = \boxed{3}$$

2^{ème} Méthode : Calcul direct

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(3x)}{(3x)}$$

$$= 3 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } t}{t} \right) = 3 \times 1 = \boxed{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) 1^{ère} Méthode : Calcul direct

$$\begin{aligned} & \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right) = 1 \times \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

2^{ème} Méthode : L'Hôpital (Brouillon)

$$\begin{aligned} & \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x^3} \right) = " \frac{0}{0} " \\ \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{Arctan } x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1) \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)} \cdot \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arctan } t}{t} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= 1 \times (-\infty + 0) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) & \lim_{x \rightarrow +} x \cdot \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \frac{1}{x}}} \frac{\text{Arctan } t}{t} = \boxed{1} \\ 5) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan} \left(\frac{1}{x^2} \right) - \frac{\pi}{2}}{x^2} \right) \\ &= - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x^2}} \frac{\text{Arctan } x^2}{x^2} = - \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } t}{t} \right) = -1 \\ 6) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \text{Arctan } x - \frac{\pi x}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) - \frac{\pi x}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi x}{2} - x \cdot \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{\pi x}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x \cdot \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= - \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \frac{1}{x}}} \left(\frac{\text{Arctan } t}{t} \right) = \boxed{-1} \end{aligned}$$

Solution N° 68 :

1) Soient $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = (1-x)^n$

On a v est dérivable sur \mathbb{R} donc dérivable sur $] -\infty, 1[$ et u est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a encore $v(] -\infty, 1[) \subseteq]0, +\infty[$

Car : $\forall x < 1 ; v(x) = (1-x)^n > 0$

Donc la composition $u \circ v(x) = \sqrt{(1-x)^n}$ est dérivable sur $] -\infty, 1[$ D'où la somme $u \circ v + v$ est dérivable sur $] -\infty, 1[$.

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{\sqrt{(1-x)^n} + (1-x)^n - 0}{x - 1} \right)$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{\sqrt{(1-x)^n}}{\sqrt{(1-x)^2}} + \frac{(1-x)^n}{(1-x)^1} \right)$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sqrt{(1-x)^{n-2}} + (1-x)^{n-1} \right)$$

$$= - \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = (1-x)^{n-2}}} \sqrt{t} \right) - \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x)^{n-1} \right)$$

$$= -0 - 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et on a : $f'_g(1) = 0$

3) Soit $x \in] -\infty, 1[$ et on procède ainsi :

$$f'(x) = \left((1-x)^{\frac{n}{2}} + (1-x)^n \right)'$$

$$= \frac{n}{2} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} + n(1-x)^{n-1}(-1)$$

$$= -n \left(\frac{1}{2} (1-x)^{\frac{n-2}{2}} + (1-x)^{n-1} \right)$$

$$\blacksquare \begin{array}{l} x < 1 \\ n \geq 3 \end{array} \mid \Rightarrow (1-x) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (1-x)^{\frac{n-2}{2}} > 0 \\ (1-x)^{n-1} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (1-x)^{\frac{n-2}{2}} + (1-x)^{n-1} > 0$$

$$\Rightarrow -n \left(\frac{1}{2} (1-x)^{\frac{n-2}{2}} + (1-x)^{n-1} \right) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 ; \forall x \in] -\infty, 1[$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \searrow \text{ sur }] -\infty, 1[$$

$$\Rightarrow f :] -\infty, 1[\mapsto f(] -\infty, 1[) \text{ bijective}$$

$$\Rightarrow f :] -\infty, 1[\mapsto] 0, +\infty[\text{ bijective}$$

4) Comme f est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et comme $f'(x) \neq 0 ; \forall x \in] -\infty, 1[$ sinon on aurait $x = 1$. Alors f^{-1} est dérivable sur $J =] 0, +\infty[$ et on ait :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} ; \forall x \in J$$

5) Soit y un élément de J

$$\text{Alors : } \exists ! x \in I ; f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(1-x)^n} + (1-x)^n$$

$$\Leftrightarrow y = t + t^2 ; t = \sqrt{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - y = 0 ; \Delta = 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^n} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^n} = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^{\frac{n}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-x = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right)^{\frac{2}{n}}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \right)^{\frac{2}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(y) = 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \right)^{\frac{2}{n}}}$$

6) Soit la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - x \quad ; \quad \forall x \in]-\infty, 1]$$

φ est continue sur $]-\infty, 1] \supset [0, 1]$ et on a

- $\varphi(0) = f(0) - 0 = 2 > 0$
- $\varphi(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$

Alors : $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$

Donc d'après le TVI on déduit :

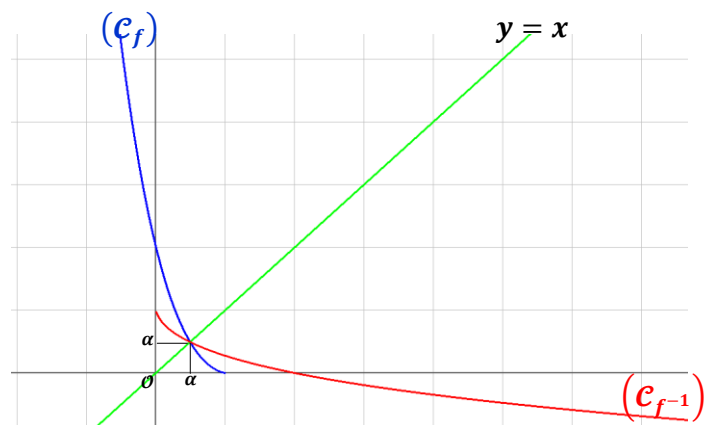
$$\exists \alpha \in]0, 1[\quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in]0, 1[\quad ; \quad f(\alpha) = \alpha$$

Il suffit de montrer que α est unique comme $f :]-\infty, 1[\mapsto]0, +\infty[$ bijective
Alors d'après la définition d'une application bijective on obtient :

$(\forall y \in]0, +\infty[) (\exists ! x \in]-\infty, 1[) : f(x) = y$
 $(\alpha \in]0, +\infty[) (\exists ! x = \alpha \in]-\infty, 1[) : f(\alpha) = \alpha$
 Finalement l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha \in]0, 1[$.

7) voici la représentation graphique :



Solution N° 69 :

1) $f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x \quad ; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

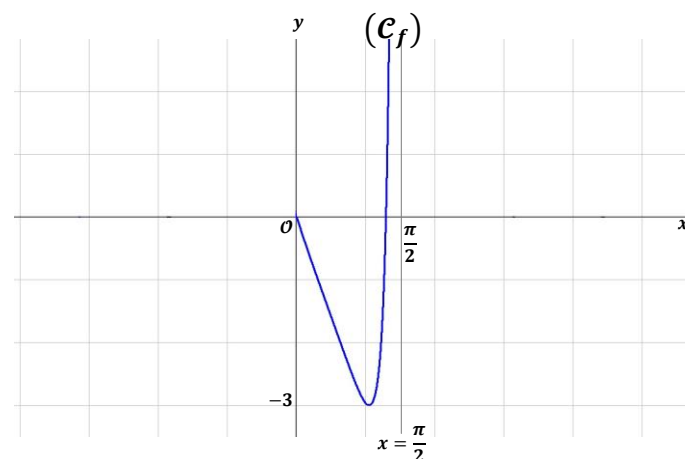
$$f'(x) = 2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x) - 2\sqrt{3}(1 + \tan^2 x)$$

$$= (1 + \tan^2 x)(2 \tan x - 2\sqrt{3})$$

$$= 2(1 + \tan^2 x)(\tan x - \sqrt{3})$$

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-3	$+\infty$

2) Voici la représentation graphique :



3) On a f est continue et strictement monotone (décroissante) sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ Donc f réalise une bijection On la note g définie de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = [-3, 0]$.

Ainsi $g : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \mapsto [-3, 0]$ est bijective

4) Comme $g : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \mapsto [-3, 0]$ bijective
Alors par définition de la bijection :

$$(\forall y \in [-3, 0]) (\exists ! x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]) : g(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x = y$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{3} t - y = 0 \quad ; \quad t = \tan x$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3+y}}{2} \quad ; \quad \Delta = 12 + 4y$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{3} \pm \sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \pm \sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow x = \text{Arctan}(\sqrt{3} \pm \sqrt{y+3})$$

On a $h(0) = 0$ Donc nécessairement on aurait : $x = \text{Arctan}(\sqrt{3} - \sqrt{y+3})$

$$g^{-1}(y) = \text{Arctan}(\sqrt{3} - \sqrt{y+3}) ; \quad \forall y \in [-3, 0]$$

5) On a de même, f est continue et strictement monotone (croissante) sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ alors f réalise une bijection h de $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-3, +\infty[$. Alors :

$$h : \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-3, +\infty[\text{ est bijective}$$

$$6) \text{ comme } h : \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-3, +\infty[\text{ bijective}$$

Alors par définition on conclut que :

$$(\forall y \in [-3, +\infty[) \left(\exists ! x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \right) : h(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \text{Arctan}(\sqrt{3} \pm \sqrt{y+3})$$

On a : $f(\text{Arctan}(2\sqrt{3})) = 0$ alors on a :

$$h(\text{Arctan}(2\sqrt{3})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{Arctan}(2\sqrt{3}) = h^{-1}(0)} \rightsquigarrow (*)$$

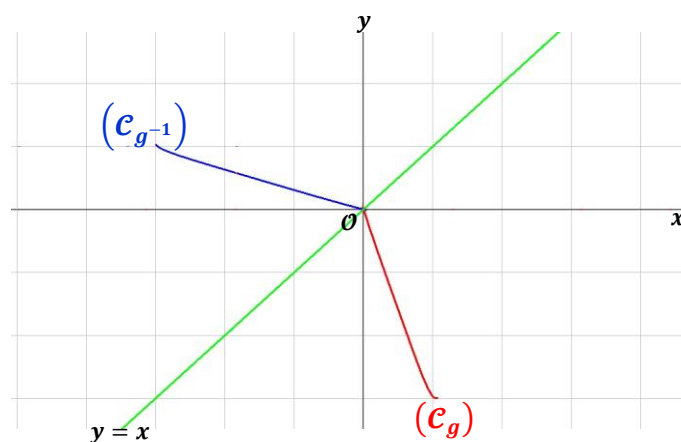
L'expression de $h^{-1}(y)$ qui vérifie (*) est

$$h^{-1}(y) = \text{Arctan}(\sqrt{3} + \sqrt{y+3})$$

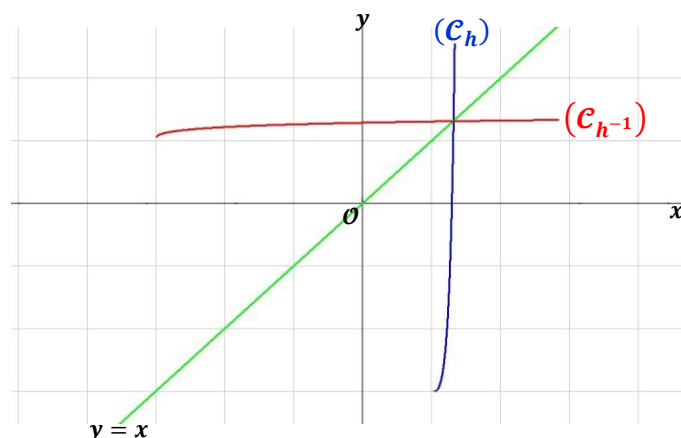
$$\text{Car} : f^{-1}(0) = \text{Arctan}(\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

$$\text{D'où} : \boxed{h^{-1}(y) = \text{Arctan}(\sqrt{3} + \sqrt{y+3})}$$

Voici les graphes (C_g) ; $(C_{g^{-1}})$



Voici les graphes (C_h) ; $(C_{h^{-1}})$



You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 70 :

Soit $x \in [1; 3] = I$ et on procède ainsi :

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) = x &\Leftrightarrow x \cdot (4-x)^{\frac{1}{3}} = x \\ &\Leftrightarrow x(4-x)^{\frac{1}{3}} - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left((4-x)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 0 \\ \text{ou bien } (4-x)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 0 \\ \text{ou bien } (4-x)^{\frac{1}{3}} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 0 \\ \text{ou bien } 4-x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 0 \\ \text{ou bien } x = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \in [1; 3] \text{ car } 0 \notin [1; 3] \end{aligned}$$

2) Pour montrer que $f(I) \subseteq I$ il suffit de prouver l'implication suivante :

$$x \in I \Rightarrow f(x) \in I$$

D'abord f est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= (4-x)^{\frac{1}{3}} + x \left(\frac{1}{3} \right) (4-x)^{\frac{-2}{3}} (-1) \\ &= (4-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3} (4-x)^{\frac{-2}{3}} \\ &= (4-x)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{3(4-x)} \right) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } 1 < x < 3 \Rightarrow 1 < 4-x < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (4-x)^{\frac{1}{3}} > 1 > 0 \\ \text{Et } \frac{1}{3} < \frac{1}{4-x} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (4-x)^{\frac{1}{3}} > 0 \\ \text{Et } \frac{1}{3} < \frac{x}{4-x} < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (4-x)^{\frac{1}{3}} > 0 \\ \text{Et } -1 < \frac{-x}{3(4-x)} < \frac{-1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (4-x)^{\frac{1}{3}} > 0 \\ \text{Et } 0 < 1 - \frac{x}{3(4-x)} < \frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (4-x)^{\frac{1}{3}} > 0 \\ \text{Et } 1 - \frac{x}{3(4-x)} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4-x)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{3(4-x)} \right) > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in [1; 3]$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } [1; 3]$$

Alors on peut montrer maintenant que :

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$$

$$\blacksquare 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} \leq f(x) \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} \leq f(x) \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$$

D'où l'on déduit finalement : $f(I) \subseteq I$

3) soit la proposition $P(n)$ définie par :

$$P(n) : 1 \leq u_n \leq 3$$

L'initialisation : On a $1 \leq 1 \leq 3$

c-à-d que : $1 \leq u_0 \leq 3$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

$$\blacksquare \boxed{P(n) \text{ est vraie}} \Rightarrow 1 \leq u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow u_n \in I$$

$$\Rightarrow f(u_n) \in f(I) \subseteq I$$

$$\Rightarrow f(u_n) \in I$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in I$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$\Rightarrow \boxed{P(n+1) \text{ est vraie}}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 3$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

$$= u_n(4 - u_n)^{\frac{1}{3}} - u_n$$

$$= u_n \left((4 - u_n)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

$$\blacksquare u_n \in I \Rightarrow u_n \geq 1 \text{ et } u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow u_n > 0 \text{ et } -u_n \geq -3$$

$$\Rightarrow u_n > 0 \text{ et } (4 - u_n) \geq 1$$

$$\Rightarrow u_n > 0 \text{ et } (4 - u_n)^{\frac{1}{3}} \geq 1^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow u_n > 0 \text{ et } (4 - u_n)^{\frac{1}{3}} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow u_n \left((4 - u_n)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

5) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien évidemment convergente car croissante et étant majorée par 3 car $(1 \leq u_n \leq 3)$

6) On a : $u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$

La fonction f est continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$ car c'est un produit bien défini de deux fonction continues et on a : $f(I) \subseteq I$ et $u_0 \in I$ et $(u_n)_n$ est convergente vers un réel l donc $f(l) = l$. L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur $I = [1; 3]$ et c'est le nombre -3 .

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 3$$

Solution N° 71 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\blacksquare f'(x) = 4(2x^3 - 1)^3(6x^2) \\ = 24 \cdot x^2 \cdot (2x^3 - 1)^3$$

2) Rappel :

$$\begin{cases} f : I \mapsto f(I) \text{ est dérivable sur } I \\ g : J \mapsto g(J) \text{ est dérivable sur } f(I) \\ f(I) \subseteq J \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare g'(x) = (f(\cos x))' = -\sin x \cdot f'(\cos x)$$

$$= -24 \sin x \cdot \cos^2 x \cdot (2 \cos^3 x - 1)^3$$

$$\blacksquare h'(x) = (f(\sqrt[3]{6x+1}))'$$

$$= ((6x+1)^{\frac{1}{3}})' \cdot f'(\sqrt[3]{6x+1})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (6x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6 \cdot 24 \cdot (6x+1)^{\frac{2}{3}} \cdot (2(6x+1) - 1)^3$$

$$= \frac{1 \times 6 \times 24}{3} \cdot (6x+1)^0 \cdot (12x+1)^3$$

$$= 48(12x+1)^3$$

$$\blacksquare k'(x) = \left(f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)' = \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' \cdot f'\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2 \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot 24 \left(\frac{4}{x}\right) \cdot \left(2\left(\frac{8}{x\sqrt{x}}\right) - 1\right)^3$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot 24 \left(\frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{16}{x\sqrt{x}} - 1\right)^3$$

$$= -96 \left(x^{-\frac{5}{2}}\right) \left(\frac{16}{x\sqrt{x}} - 1\right)^3$$

$$\blacksquare u'(x) = \left(f\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)' = \frac{1}{4} \left(x^{-\frac{3}{4}}\right) \cdot f'\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right) \cdot f'\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \cdot 24 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2x^{\frac{3}{4}} - 1\right)^3$$

$$= 6 \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(2x^{\frac{3}{4}} - 1\right)^3$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare S'(x) = \left(f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)\right)' = \left(\tan\frac{\pi}{x}\right)' \cdot f'\left(\tan\frac{\pi}{x}\right)$$

$$= \frac{-\pi}{x^2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \cdot 24 \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(2 \tan^3\left(\frac{\pi}{x}\right) - 1\right)^3$$

$$\blacksquare v'(x) = (f(\text{Arctan } x^4))'$$

$$= 4 \cdot \text{Arctan}^3 x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot 24 \text{Arctan}^8 x$$

$$\cdot (2 \text{Arctan}^{12} x - 1)^3$$

Solution N° 72 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^5 - 1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}\right) ; \quad \varphi(x) = (x+1)^5$$

$$= \varphi'(x)_{/x=0} = 5(x+1)^4_{/x=0} = 5(0+1)^4 = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{4x+3} - 0}{x-6}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(6)}{x-6}\right) ; \quad \varphi(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{4x+3}$$

$$= \varphi'(x)_{/x=6}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(4x+3)^{-\frac{2}{3}}(4)\right)_{/x=6}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(4x+3)^2}}\right)\right)_{/x=6}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{9}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{4}{27} = \boxed{\frac{1}{54}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{4 \cos^2 x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \right); \quad \varphi(x) = 4 \cos^2 x$$

$$= \varphi'(x)_{/x=\frac{\pi}{3}} = (8 \cos x \cdot (-\sin x))_{/x=\frac{\pi}{3}}$$

$$= (-8 \cos x \cdot \sin x)_{/x=\frac{\pi}{3}}$$

$$= -8 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-2\sqrt{3}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\tan x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \left(\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{\tan x - 1} \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \right)}$$

$$= 2 \cdot \left((\cos x)'_{/x=\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \left(\frac{1}{(\tan x)'_{/x=\frac{\pi}{4}}} \right)$$

$$= 2 \cdot (-\sin x)_{/x=\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2 x)_{/x=\frac{\pi}{4}}}$$

$$= 2 \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + 1^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right); \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{x+8}$$

$$= \varphi'(x)_{/x=0} = \left(\frac{1}{3} (x+8)^{-\frac{2}{3}} \right)_{/x=0}$$

$$= \frac{1}{3} (0+8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x + \sin^2 x - \pi}{x - \pi} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(\pi)}{x - \pi} \right); \quad \varphi(x) = x + \sin^2 x$$

$$= \varphi'(x)_{/x=\pi} = (1 + 2 \sin x \cdot \cos x)_{/x=\pi}$$

$$= 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{\tan x - x} \right)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x - 0}{x - 0} \right) \left(\frac{x - 0}{\tan x - x - 0} \right)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} \right)}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \varphi(x) = \sin x - x \\ \psi(x) = \tan x - x \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 &= (-\varphi'(x)_{/x=0}) \times \left(\frac{1}{\psi'(x)_{/x=0}} \right) \\
 &= (-\cos x + 1)_{/x=0} \times \frac{1}{(1 + \tan^2 x - 1)_{/x=0}} \\
 &= 0 \times \frac{1}{0} = \text{"forme indéterminée"}
 \end{aligned}$$

Je propose de calculer cette limite à l'aide de la règle de l'Hôpital qui est une variante technique de la technique du nombre dérivé :

$$\text{On a : } l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{\tan x - x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow l &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{\tan x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(\tan x - x)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\tan^2 x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)} = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x))'}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{(1 + \tan^2 x)^2 + \tan x (2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x))'}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 0}{(1 + \tan^2 0)^2 + \tan 0 \cdot 2 \tan 0 \cdot (1 + \tan^2 0)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 + 0)^2 + 0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\tan^2 x - 1} \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{\tan^2 x - 1} \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan^2 x - \tan^2 \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \right)}$$

$$= \left(2(\cos x)'_{/x=\frac{\pi}{4}} \right) \times \left(\frac{1}{(\tan^2 x)'_{/x=\frac{\pi}{4}}} \right)$$

$$= \left(2(-\sin x)_{/x=\frac{\pi}{4}} \right) \times \left(\frac{1}{(2 \tan x (1 + \tan^2 x))_{/x=\frac{\pi}{4}}} \right)$$

$$= -2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \times \frac{1}{2 \left(\tan \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (1 + 1)}$$

$$= -\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{4}}$$

Solution N° 73 :

1) Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

2) Comme f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ alors f réalise une bijection qu'on note g de $[1, +\infty[$ sur son image $f([1, +\infty[) = [-5, +\infty[$

$$\Leftrightarrow g : [1, +\infty[\mapsto [-5, +\infty[\text{ bijective}$$

3) On a g est bijective Donc d'après la définition d'une application bijective on écrit :

$$(\forall y \in [-5, +\infty[) (\exists ! x \in [1, +\infty[) : g(x) = y$$

$$(0 \in [-5, +\infty[) (\exists ! \alpha \in [1, +\infty[) : g(\alpha) = 0$$

C'est-à-dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α de $[1, +\infty[$ maintenant pourquoi : $2 < \alpha < 3$?

C'est trop facile à démontrer. On a :

$$g(2) = -1 \quad ; \quad g(3) = 15$$

$$\blacksquare \quad -1 < 0 < 15 \Rightarrow g(2) < g(\alpha) < g(3)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(g(2)) < g^{-1}(g(\alpha)) < g^{-1}(g(3))$$

$$\Rightarrow \boxed{2 < \alpha < 3}$$

4) Comme g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et comme g' ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ car : $g'(x) = 3x^2 - 3 \neq 0 \quad ; \quad \forall x > 1$

Donc g^{-1} est dérivable sur $] -5, +\infty[$ et :

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \quad ; \quad \forall x > -5$$

$$\Rightarrow (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)} = \boxed{\frac{1}{3\alpha^2 - 3}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 74 :

$$1) f(x) = \sin x - x^2$$

D'abord f est continue sur \mathbb{R} car c'est la somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} . Et on a :

$$\blacksquare \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{16} \\ = \frac{8\sqrt{2} - \pi^2}{16} = \frac{\sqrt{128} - \pi^2}{16} > 0 \quad \text{car } 128 > \pi^4$$

$$\blacksquare \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{4} \\ = \frac{4 - \pi^2}{4} < 0 \quad ; \quad \text{car } 4 < \pi^2$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} f \text{ est continue sur } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Donc d'après le TVI on déduit que :

$$\exists \alpha \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad f(\alpha) = 0$$

J'ai écrit un intervalle ouvert $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ car :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$$

2) On a : $f(\alpha) = f(0) = 0$

et on considère l'intervalle $[0, \alpha]$ on a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [0, \alpha] \subset \mathbb{R} \\ f \text{ est dérivable sur }]0, \alpha[\subset \mathbb{R} \\ f(\alpha) = f(0) \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de ROLLE :

$$\exists c \in]0, \alpha[\quad ; \quad f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, \alpha[; \cos c - 2c = 0$$

C'est-à-dire que l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $]0, \alpha[\subset \mathbb{R}$.

3) Pour montrer que c'est unique on montre que $\varphi(x) = \cos x - 2x$ est strictement monotone sur $]0, \alpha[$ ou même sur \mathbb{R} tout entier.

$$\blacksquare \varphi'(x) = -\sin x - 2$$

$$\blacksquare -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1$$

$$\Rightarrow -3 \leq -2 - \sin x \leq -1$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) < 0$$

$\Rightarrow \varphi$ est strictement \searrow sur \mathbb{R}

$\Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est bijective

$\Rightarrow 0$ admet un seul antécédent par φ

$$\Rightarrow \exists ! c \in]0, \alpha[; \varphi(c) = 0$$

Solution N° 75 :

Rappel : centre de symétrie

$$\blacksquare \begin{cases} \Omega(a, b) \text{ est un centre} \\ \text{de symétrie de } (C_f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

$$1) f(x) = \frac{3x^2 + 8x + 4}{x + 1} ; \Omega(-1; 2)$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; 2(-1) - x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{Car : } x \neq -1 \Rightarrow -2 - x \neq -1$$

$$\text{c-à-d : } -2 - x = 1 \Rightarrow x = -1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare f(-2 - x) + f(x)$$

$$= \frac{3(-2 - x)^2 + 8(-2 - x) + 4}{-2 - x + 1} + \frac{3x^2 + 8x + 4}{x + 1}$$

$$= \frac{3x^2 + 4x}{-1 - x} + \frac{3x^2 + 8x + 4}{x + 1}$$

$$= \frac{-(3x^2 + 4x) + (3x^2 + 8x + 4)}{x + 1}$$

$$= \frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4(x + 1)}{(x + 1)} = 4$$

$$\Rightarrow f(-2 - x) + f(x) = 4$$

$$\Rightarrow f(-2 - x) = 4 - f(x)$$

$\Rightarrow \Omega(-1, 2) = \text{centre de symétrie de } (C_f)$

$$2) f(x) = \sqrt{3} \cos(2x) + \sin(2x) ; \Omega\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$$

C'est clair que : $D_f = \mathbb{R}$

$$\blacksquare \text{ Si } x \in \mathbb{R} \text{ Alors } 2\left(\frac{\pi}{3}\right) - x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + f(x)$$

$$= \sqrt{3} \cos\left(2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right) + \sin\left(2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right)$$

$$+ \sqrt{3} \cos(2x) + \sin(2x)$$

$$= \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \cos(2x) \right)$$

$$+ \left(\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \sin(2x) \right)$$

$$= 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right)$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right)$$

$$= -\sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2 \cdot 0 - f(x)$$

$$\Rightarrow \Omega\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = \text{centre de symétrie de } (C_f)$$

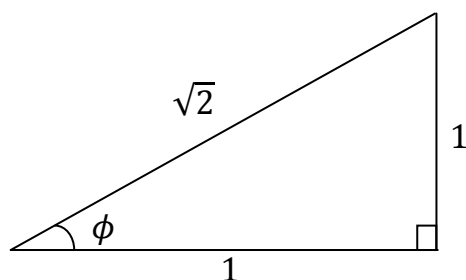
$$3) f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} ; \quad \Omega\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; \sin x + \cos x \neq 0\}$$

Réolvons l'équation $\sin x + \cos x = 0$:

$$\Leftrightarrow 1 \cos x + 1 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 1^2} \cos(x - \phi) = 0$$



$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou bien } x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou bien } x \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{-\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrons maintenant l'implication :

$$x \in D_f \Rightarrow 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - x \in D_f$$

$$\text{Si } \begin{cases} \text{ou bien } \frac{2\pi}{4} - x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou bien } \frac{2\pi}{4} - x \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \text{ou bien } x \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou bien } x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Ainsi par passage à la contraposée :

$$\begin{cases} \text{et } x \not\equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \\ \text{et } x \not\equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{et } \frac{2\pi}{4} - x \not\equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \text{et } \frac{2\pi}{4} - x \not\equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$D'ou \text{ : } \forall x \in D_f ; \left(\frac{2\pi}{4} - x\right) \in D_f$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare f\left(\frac{2\pi}{4} - x\right) + f(x)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{4} - x\right) + f(x) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{4} - x\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x)$$

$$\Rightarrow \Omega\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right) = \text{centre de symétrie de } (C_f)$$

Solution N° 76 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot \text{Arctan } x + \text{Arctan} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 0 \cdot \text{Arctan } 1 + \text{Arctan } 0 - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{-\pi}{2}}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -2x \cdot \text{Arctan } x$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot \text{Arctan } 1 = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{-\pi}{2}}$$

$$\text{comme : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1)$$

Alors f est continue en 1

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = f'(x)_{/x=1}$$

Car $f(x) = -2x \cdot \text{Arctan } x$ est un produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc dérivables en 1.

$$= -2 \left(\text{Arctan } x + \frac{x}{1 + x^2} \right)_{/x=1}$$

$$= -2 \left(\text{Arctan } 1 + \frac{1}{1 + 1} \right)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = f'_g(1)$$

Géométriquement on dira que (C_f) admet une demi-tangente (Δ) à gauche en 1. Avec : $(\Delta) : y = f'_g(1)(x - 1) + f(1)$
C'est-à-dire : $(\Delta) : y = -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x + 1$

Pour la 2^{ème} limite on ne peut pas écrire

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = (f'(x))_{/x=1}$$

Car la fonction dans ce cas est dérivable juste sur $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$
En 1 On ne dispose d'aucune idée donc on doit calculer la limite autrement :

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} \text{Arctan } x + \text{Arctan} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{x - 1} \right)$$

$$= \frac{0 + 0 - \pi}{0^+} = \frac{-\pi}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 et géométriquement on dira que (C_f)

Admet une demi-tangente (D) verticale à droite en 1 avec : (D) : $x = 1$

3) Si $x \in]-\infty, 1]$ on a :

$$f(x) = -2x \operatorname{Arctan} x$$

$$\text{Ainsi : } f'(x) = -2 \left(\operatorname{Arctan} x + \frac{x}{1+x^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = -2 \left(\operatorname{Arctan} 0 + \frac{0}{1+0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = -2 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$= -2 \left(\frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{-4}{(1+x^2)^2} < 0$$

■ $x \in]1, +\infty[$ Alors :

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \cdot \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } f'(x) &= \left(\sqrt{x^2-1} \right)' \operatorname{Arctan} x \\ &+ \sqrt{x^2-1} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \\ &+ \left(\sqrt{x^2-1} \right)' \times \left(\frac{1}{1+(x^2-1)^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \operatorname{Arctan} x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{1}{1+(x^2-1)^2} \right)$$

$$= \frac{x \operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}(x^4-2x^2+2)}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \left(\operatorname{Arctan} x + \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^4-2x^2+2} \right) > 0$$

4) On a d'après le calcul réalisé dans la question 3) on a : $\forall x > 1 ; f'(x) > 0$

Donc f est strictement \nearrow sur $]1, +\infty[$

5) il suffit de montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{\pi x}{2} - 1 \right) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ On a : } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi x}{2} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2} + 1 \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$= (0 + 1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) - \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} \right)$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \cdot \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= 1 + 0 - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} \right) \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \frac{1}{x}}} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right)$$

$$= 1 + 0 - \sqrt{1} \times 1 = \boxed{0}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) il suffit de montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\pi x + 2)) = 0$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\pi x + 2)) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x \operatorname{Arctan} x - \pi x - 2) \\ &= -2 - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \operatorname{Arctan} x + \pi x) \\ &= -2 - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -2 - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ &= -2 + 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= -2 + 2 \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right) \\ &= -2 + 2 \times 1 = -2 + 2 = \boxed{0} \end{aligned}$$

Solution N° 77 :

1) la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ est dérivable sur $[0,1]$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$ et on a encore $\varphi([0,1]) \subseteq D_{\tan}$; $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$

c'est à dire $\forall x \in [0,1]$; $\frac{1}{x+1} \notin \frac{\pi}{2} [\pi]$

Ainsi la fonction $f(x) = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$

Est dérivable sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare |f'(x)| = \left| \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right|$$

$$\blacksquare 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 < 1+x < 2 \\ \cos 1 < \cos x < \cos 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 < (x+1)^2 < 4 \\ \cos^2 1 < \cos^2 x < 1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < \frac{1}{(x+1)^2} < 1 \\ 1 < \frac{1}{\cos^2 x} < \frac{1}{\cos^2 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{16} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) < \frac{1}{4} \\ 1 < \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right| < \frac{1}{\cos^2 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right| < \frac{1}{4 \cos^2 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{|f'(x)| < \frac{1}{4 \cos^2 1}}$$

2) On a : $\forall x \in [0,1]$; $f'(x) < 0$

$$\text{Car : } f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} < 0$$

Donc f est strictement \searrow sur $[0,1]$ et comme f est continue et étant strictement monotone sur $[0,1]$ alors f réalise une bijection de $[0,1]$ vers son image $f([0,1]) = [f(1), f(0)]$. Soit la fonction définie par : $\psi(x) = f(x) - x$

On a ψ est continue sur $[0,1]$

$$\text{Et : } \begin{cases} \psi(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{4} \tan 1 > 0 \\ \psi(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{2}\right) - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [0,1] \\ \psi(1) \cdot \psi(0) < 0 \end{cases}$$

Alors d'après le TVI on écrit :

$$\exists \alpha \in [0,1] \quad ; \quad \psi(\alpha) = 0$$

$$\text{comme : } \begin{cases} \psi(0) = \frac{1}{4} \tan 1 \neq 0 \\ \psi(1) = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \exists \alpha \in]0,1[\quad ; \quad \psi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in]0,1[\quad ; \quad f(\alpha) = \alpha$$

Comme f est une bijection alors le nombre α est unique dans $]0,1[$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists ! \alpha \in]0,1[\quad ; \quad f(\alpha) = \alpha}$$

3) On a f est continue et dérivable sur $[0,1]$ donc On peut appliquer le TAF à f sur n'importe quel intervalle inclus dans $[0,1]$ Soit l'intervalle $[u_n, \alpha] \subseteq [0,1]$

D'abord on peut facilement montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ par la méthode récurrence. Je vous laisse le soin de le vérifier.

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [u_n, \alpha] \\ f \text{ est dérivable sur }]u_n, \alpha[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]u_n, \alpha[\quad ; \quad \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

$$\blacksquare \quad c \in]u_n, \alpha[\subset [0,1]$$

$$\Rightarrow |f'(c)| < \frac{1}{4 \cos^2 1} \quad ; \quad \text{Question 1)}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| < \frac{1}{4 \cos^2 1}$$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| < \frac{1}{4 \cos^2 1} \cdot |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{4 \cos^2 1} \cdot |u_n - \alpha|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^2 \cdot |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^3 \cdot |u_{n-2} - \alpha|$$

⋮

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^{n+1} \cdot |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow \boxed{|u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^n \cdot |u_0 - \alpha|}$$

$$4) \text{ on a } 0 < |u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cos^2 1}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Donc d'après le critère de comparaison on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 78 :

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}) = \boxed{0}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - \text{Arctan } x)^{\frac{1}{3}} = \boxed{0}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Donc la fonction f est continue en zéro

$$2) \text{ Soit } \varphi(t) = t - \text{Arctan } t \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier car c'est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur \mathbb{R} . On peut donc appliquer le TAF à la fonction φ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit l'intervalle $[0, x]$ avec $x > 0$:

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{x - \text{Arctan } x - 0}{x - 0} = 1 - \frac{1}{1 + c^2}$$

$$\blacksquare 1 + c^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + c^2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1 + c^2} > -1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x - \text{Arctan } x}{x} > 0 \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x - \text{Arctan } x > 0 \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x > \text{Arctan } x \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x \geq \text{Arctan } x \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

Car on a aussi : $0 \geq \text{Arctan } 0$

$$3) \text{ soient } \varphi(t) = \frac{t^3}{3} - t + \text{Arctan } t \text{ et } x > 0$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x^3}{3} - x + \text{Arctan } x}{x} = c^2 - 1 + \frac{1}{1 + c^2}$$

$$\blacksquare c^4 > 0 \Rightarrow -c^4 < 0 \Rightarrow 1 - c^4 < 1$$

$$\Rightarrow (1 - c^2)(1 + c^2) < 1$$

$$\Rightarrow 1 - c^2 < \frac{1}{1 + c^2}$$

$$\Rightarrow c^2 - 1 + \frac{1}{1 + c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x^3}{3} - x + \text{Arctan } x}{x} > 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} - x + \text{Arctan } x > 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} - x + \text{Arctan } x \geq 0 \quad ; \quad x \geq 0$$

$$\text{Car : } \frac{0^3}{3} - 0 + \text{Arctan } 0 = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0 \quad ; \quad \boxed{\frac{x^3}{3} \geq x - \text{Arctan } x} \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{Soit : } \psi(t) = t - \text{Arctan } t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$$

$$\text{On a } \begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases} ; x > 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \psi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{x - \text{Arctan } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}{x} = 1 - \frac{1}{1+c^2} - c^2 + c^4$$

$$\text{On a : } 1 - \frac{1}{1+c^2} - c^2 + c^4$$

$$= \frac{1+c^2 - 1 - c^2(1+c^2) + c^4(1+c^2)}{1+c^2}$$

$$= \frac{c^2 - c^2 - c^4 + c^4 + c^6}{1+c^2} = \frac{c^6}{1+c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x - \text{Arctan } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}{x} > 0$$

$$\Rightarrow x - \text{Arctan } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} > 0$$

$$\Rightarrow x - \text{Arctan } x > \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0 ; \boxed{x - \text{Arctan } x \geq \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}} \quad (2)$$

$$\text{Car : } 0 - \text{Arctan } 0 = \frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5}$$

D'après (1) et (2) on déduit que $\forall x \geq 0$

$$\boxed{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \text{Arctan } x \leq \frac{x^3}{3}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\text{On a : } \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \text{Arctan } x \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}}_{\downarrow \frac{1}{3}} \leq \frac{x - \text{Arctan } x}{x^3} \leq \underbrace{\frac{1}{3}}_{\downarrow \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x^3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right)$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right)$$

$$= 1 + \frac{0}{2} = 1 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et encore que $f'_g(0) = 1$.

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt[3]{x - \text{Arctan } x}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x - \text{Arctan } x)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à droite en 0

Et encore : $f'_d(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors on déduit que f n'est pas dérivable en 0.

6) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ on a :

■ $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$

■ $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1 + \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1 + \frac{x}{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

■ $\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + 1 > 1$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} < 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in]-\infty, 0[$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur }]-\infty, 0[$$

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ on a :

■ $f(x) = \sqrt[3]{x - \text{Arctan } x} = (x - \text{Arctan } x)^{\frac{1}{3}}$

■ $f'(x) = \frac{1}{3}(x - \text{Arctan } x)^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x - \text{Arctan } x)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) > 0$$

Donc f est strictement \nearrow sur $[0, +\infty[$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x - \text{Arctan } x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x \left(1 - \frac{\text{Arctan } x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{\text{Arctan } x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (+\infty) \cdot (1 - 0)^{\frac{1}{3}} = \boxed{+\infty}$$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x - \text{Arctan } x}}{x}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\text{Arctan } x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (0 - 0 \times 0)^{\frac{1}{3}} = \boxed{0}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que (C_f) admet une branche parabolique suivant l'axe (Ox) .

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{(x - \sqrt{x^2 + 1})}$$

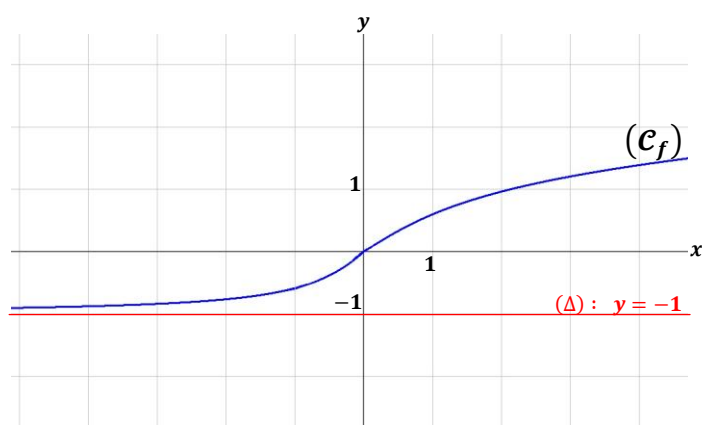
$$= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= -1 + \frac{-1}{-\infty} = -1 + 0^+ = \boxed{-1}$$

Donc la droite $(\Delta) : y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

8) Voici la représentation graphique :



9) On a f est continue et strictement \nearrow sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ Donc f réalise une bijection qu'on note g de $I =]-\infty, 0[$ vers son image $f(I)$.

$$\blacksquare f(I) = f(]-\infty, 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; f(0) \right[\\ = \left] -1, 0 \right[$$

Ainsi l'application : $g :]-\infty, 0[\mapsto]-1, 0[$ est une application bijective.

10) comme g est une bijection Alors par définition d'une application bijective on écrit :

$$(\forall y \in J) (\exists! x \in I) : g(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{x^2 + 1} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y - x + 1$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1) = (y - x + 1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = y^2 + x^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$$

$$\Rightarrow y^2 - (2y + 2)x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow (y^2 + 2y) = x(2y + 2)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = x = \frac{y^2 + 2y}{2y + 2}$$

Donc l'application réciproque g^{-1} est définie comme suit :

$$g^{-1} :]-1, 0[\mapsto]-\infty, 0[\\ y \mapsto \frac{y^2 + 2y}{2y + 2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

11) on a ; $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; x - \text{Arctan } x \leq \frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow x - \text{Arctan } x \leq \frac{x^3}{3} < x^3$

$\Rightarrow (x - \text{Arctan } x)^{\frac{1}{3}} < x$

$\Rightarrow \boxed{f(x) < x ; \forall x \in \mathbb{R}^+}$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$ c'est trop facile de prouver cette assertion en utilisant la machine récurrence.

Donc pour $x = u_n \in \mathbb{R}^+$ on ait :

$f(u_n) < u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement ↘

Voici pourquoi $u_n > 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$?

Soit la proposition $P(n) : u_n > 0$

L'initialisation : on a : $u_0 = 1 > 0$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que l'instance $P(n)$ soit vraie.

■ $P(n)$ est vraie $\Rightarrow u_0 > 0$

$\Rightarrow \text{Arctan}(u_n) < u_n ;$ selon Quest[2]

$\Rightarrow u_n - \text{Arctan}(u_n) > 0$

$\Rightarrow (u_n - \text{Arctan}(u_n))^{\frac{1}{3}} > 0$

$\Rightarrow f(u_n) > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

Ainsi : $\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

12) la suite (u_n) est bien entendu convergente car décroissante et étant minorée par zéro (c-à-d $u_n > 0$)

Solution N° 79 :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2} ; \forall x \in \mathbb{R}$

■ $f'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 5)}{(x - 2)^2}$
 $= \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x - 2)^2}$

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-2	\searrow	$+\infty$
				$+\infty$	$+\infty$
				10	

Comme f est continue et étant strictement monotone (↗) sur $[5, +\infty[$ Alors f réalise une bijection de $[5, +\infty[$ vers son image $f([5, +\infty[) = [10, +\infty[$ ainsi l'application suivante est bijective :

$f : [5, +\infty[\mapsto [10, +\infty[$

$\Leftrightarrow (\forall y \in [10, +\infty[) (\exists ! x \in [5, +\infty[) : f(x) = y$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5}{x - 2} = y$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = y(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - yx + (5 + 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y \mp \sqrt{y^2 - 8y - 20}}{2}$$

$$\text{avec } : \Delta_y = y^2 - 8y - 20$$

Pour savoir laquelle des deux expressions de x qu'on devrait retenir on choisit un point trivial comme $f(11) = 14$. On remplace y par 14 dans chacune des expressions $\frac{y \mp \sqrt{y^2 - 8y - 20}}{2}$ puis on détermine celui qui donnera la valeur 11.

$$\text{c'est } \frac{y + \sqrt{y^2 - 8y - 20}}{2}$$

Donc on retrouve les définitions suivantes

$$f : [5, +\infty[\mapsto [10, +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 5}{x - 2}$$

$$f^{-1} : [10, +\infty[\mapsto [5, +\infty[$$

$$y \mapsto \frac{y + \sqrt{y^2 - 8y - 20}}{2}$$

$$2) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} \left(1 - \frac{x}{2(x^2 + 1)}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} \left(\frac{2x^2 + 2 - x}{2(x^2 + 1)}\right) > 0$$

$$\text{Car } 2x^2 + 2 - x > 0 ; \text{ et } \Delta < 0$$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} et comme f est continue et étant strictement \nearrow sur $[0, +\infty[$ Alors f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$

$$f([0, +\infty[) = \left[f(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right]$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = \boxed{1} \end{aligned}$$

Ainsi l'application suivante est bijective :

$$f : [0, +\infty[\mapsto [0, 1[$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in [0, 1[) (\exists ! x \in [0, +\infty[) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 1} = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 \cdot x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - y^2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{1 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y^2}{1 - y^2}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow x = + \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}} \geq 0$$

Donc on obtient les définitions suivantes

$$f : [0, +\infty[\mapsto [0, 1[\\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f^{-1} : [0, 1[\mapsto [0, +\infty[\\ y \mapsto \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}$$

$$3) f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\blacksquare f'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \\ = \frac{2\sqrt{x^2-x} - (2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Pour $x \geq 1$ on a : $f'(x) < 0$

$$\blacksquare \text{ car } 0 < 1 \Rightarrow -4x < 1 - 4x \\ \Rightarrow 4x^2 - 4x < 1 - 4x + 4x^2 \\ \Rightarrow 4(x^2 - x) < (2x - 1)^2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x} < |2x - 1| \\ \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x} < 2x - 1 \\ \Rightarrow \frac{2\sqrt{x^2 - x} - (2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x}} < 0 \\ \Rightarrow f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \geq 1$$

Donc f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et comme elle est continue sur $[1, +\infty[$ alors elle réalise une bijection de

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$[1, +\infty[$ sur son image $f([1, +\infty[)$:

$$\blacksquare f([1, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(1) \right]$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - x})(x + \sqrt{x^2 - x})}{(x + \sqrt{x^2 - x})} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - x})^2}{x + \sqrt{x^2 - x}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + |x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Donc l'application suivante est bijective :

$$f : [1, +\infty[\mapsto \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall y \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right] \right) (\exists! x \in [1, +\infty[) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - x} = y$$

$$\Leftrightarrow x - y = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2y)x = -y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y}{1 - 2y}$$

Ainsi on obtient les définitions suivantes

$$f : [1, +\infty[\mapsto \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$x \mapsto x - \sqrt{x^2 - x}$$

$$f^{-1} : \left] \frac{1}{2}, 1 \right] \mapsto [1, +\infty[$$

$$y \mapsto \frac{-y}{1 - 2y}$$

4) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$; $I = \mathbb{R}$

■ $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 ; \text{ car on a :}$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + x$$

$$= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x$$

$$= |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x$$

$$= -x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x$$

$$= x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) > 0$$

C'est trop facile de démontrer l'implication suivante :

$$x < 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} < 0$$

Si maintenant $x > 0$ alors $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f : \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) \text{ est bijective}$$

$$f(\mathbb{R}) = f] -\infty, +\infty[= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
 &= \frac{-1}{-\infty - \infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0^+ = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = \boxed{+\infty}$$

Donc l'application suivante est bijective :

$$f : \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in]0, +\infty[) (\exists ! x \in \mathbb{R}) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y - x$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = (y - x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = y^2 - 2xy + x^2$$

$$\Rightarrow y^2 - 1 = 2xy$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{y^2 - 1}{2y}}$$

Ainsi on obtient les définitions suivantes

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\mapsto]0, +\infty[\\
 x &\mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{-1} :]0, +\infty[&\mapsto \mathbb{R} \\
 y &\mapsto \frac{y^2 - 1}{2y}
 \end{aligned}$$

Solution N° 80 :

1) D'abord $D_f = \mathbb{R}$ Donc son domaine de définition est symétrique c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}
 \blacksquare f(-x) &= \frac{\sqrt{1 + (-x)^2} - 1}{-x} \\
 &= - \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \right) = -f(x)
 \end{aligned}$$

Donc f est bien entendu impaire

2) Sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Sur chacun de ces deux intervalles f est dérivable car c'est un quotient bien défini de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R}^*

Examinons pour l'instant la dérivabilité en zéro de la fonction f :

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x^2})^2 - 1^2}{x^2(\sqrt{1 + x^2} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1 + x^2} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} \right) = \frac{1}{2} = f'(0) \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en zéro c'est-à-dire que f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
 3) \quad f'(x) &= \left(\frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - (\sqrt{1+x^2} - 1)}{x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \right) \\
 &= \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - 1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{x^2+1}} > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Car } x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > 1$$

$$\Rightarrow -1 + \sqrt{1+x^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ est strictement \nearrow sur \mathbb{R}

Et comme f est continue sur \mathbb{R} et étant strictement monotone Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R} \mapsto f(\mathbb{R})$.

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}
 \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1+0} + 0} = \boxed{-1}$$

$$\blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0} + 0} = \boxed{+1}$$

Donc l'application suivante est bijective :

$$f : \mathbb{R} \mapsto]-1 ; 1[$$

4) On sait très bien d'après le cours que f et f^{-1} conservent les mêmes variations. Pour la parité on se donne un $y \in]-1; 1[$ Donc $\exists ! x \in \mathbb{R} ; f(x) = y$

$$\begin{aligned} \blacksquare f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) \\ &= f^{-1} \circ f(x) = x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est une fonction paire.

5) On a $f'(0) = \frac{1}{2}$ et pour que f^{-1} soit dérivable en zéro il suffit que f soit dérivable en $f(0)$ et que f' ne s'annule pas en $f(0)$. Bien entendu $f(0) = 0$ et encore que $f'(0) = 1/2$ Donc f' ne s'annule pas en zéro. D'où f^{-1} est dérivable en $f(0)$ et on a :

$$\blacksquare (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{Ainsi : } (f^{-1})'(0) = 2$$

Solution N° 81 :

$$1) f(x) = x^2 - 2x$$

$$\blacksquare f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Comme f est continue et étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image $f([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) En $A(2,0)$ la courbe (C_f) admet une tangente $(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$\Leftrightarrow (T) : y = 2x - 4$$

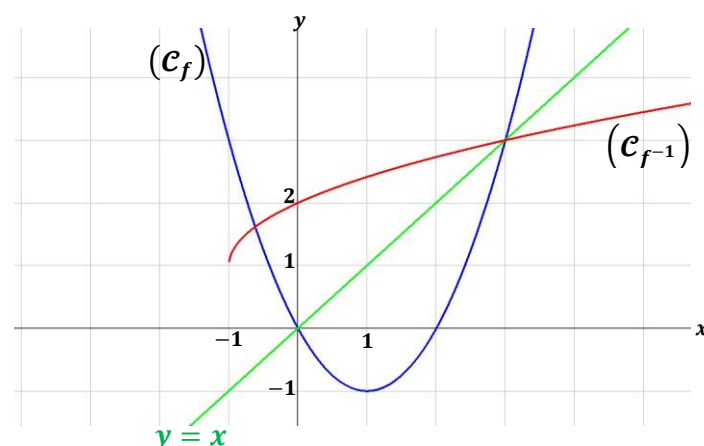
3) En $A'(2,0)$ la courbe $(C_{f^{-1}})$ admet une tangente $(T') : y = (f^{-1})'(0)(x - 0) + f^{-1}(0)$

$$\Leftrightarrow (T') : y = \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \right) x + f^{-1}(0)$$

$$\Leftrightarrow (T') : y = \left(\frac{1}{f'(2)} \right) x + 2$$

$$\Leftrightarrow (T') : y = \frac{1}{2}x + 2$$

4) les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice ($y = x$) il suffirait de construire (C_f) et de tracer le symétrique de (C_f) par rapport à ($y = x$) pour retrouver la courbe $(C_{f^{-1}})$.



Solution N° 82 :

$$1) f(x) = \cos(2x) ; I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\blacksquare f'(x) = -2 \sin(2x) ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare x \in I \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin(2x) \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq -2 \sin(2x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0 ; \forall x \in I$$

$\Rightarrow f$ est strictement \searrow sur I
 c - à - d garde le même sens sur I

$$\Rightarrow f : I \mapsto f(I) \text{ bijective}$$

$$\blacksquare f(I) = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); f(0)\right]$$

$$= [-1; 1] = J$$

2) la fonction f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$
 Car f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et en plus
 f ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\blacksquare (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} ; \forall x \in] -1, 1[$$

$$3) (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{-2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

4) Soit $x \in] -1, 1[$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

On a l'application suivante est bijective :

$$f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto] -1, 1[$$

$$(\forall y \in] -1, 1[) (\exists! x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \text{Arccos}(y) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Arccos}(y)}{2} = x$$

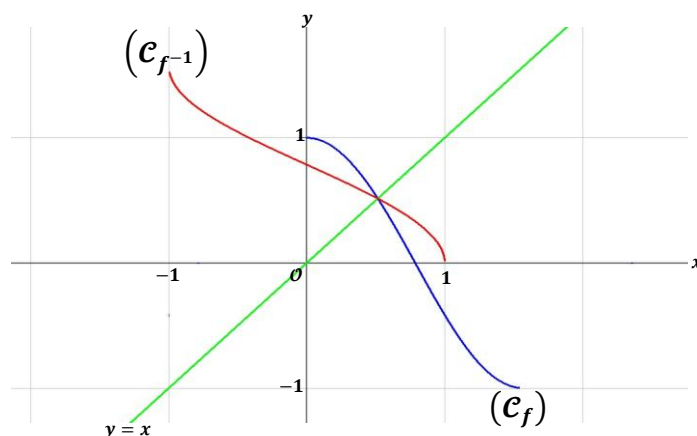
Ainsi : $f^{-1} :] -1, 1[\mapsto \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
 $y \mapsto \frac{1}{2} \text{Arctan } y$

$$\blacksquare \forall x \in] -1, 1[; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2} \text{Arctan } x\right)} = \frac{1}{-2 \sin(\text{Arctan } x)}$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos } x)}} = \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

5) Voici la représentation graphique :



Solution N° 83 :

1) On pose $f(x) = \varphi \circ \psi(x)$

$$\text{Avec : } \varphi(x) = \sqrt[3]{x} ; \psi(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On a $\psi(x)$ est dérivable sur I car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur I . Et on a φ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et en plus on a :

$$\psi(I) \subseteq [0, +\infty[$$

$$\text{Car : } \forall x > 0 ; \quad \psi(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} \geq 0$$

Donc la composition $\varphi \circ \psi$ est dérivable sur I et on pour tout $x \in I$:

$$(\varphi \circ \psi(x))' = f'(x) = \psi'(x) \cdot \varphi'(\psi(x))$$

$$2) \text{ On a : } f'(x) = \left(\left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)'$$

$$= \frac{1}{3} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(3x^2 - \frac{3}{x^4} \right)$$

$$= \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^6 - 1}{x^4} \right)$$

$$\blacksquare \quad x \in E \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x^6 \geq 1$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{x^6 - 1}{x^4} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 ; \quad \forall x \in E$$

Donc f est strictement \nearrow sur E .

L'adverbe strictement signifie que la fonction garde le même sens de variations tout au long de E .

Et comme f est continue alors f réalise une bijection qu'on note g de E sur $f(E)$

$$\begin{aligned} f(E) &= f([1, +\infty[) = \left[f(1) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[\\ &= \left[\sqrt[3]{2}, +\infty[= J \end{aligned}$$

D'où l'application suivante est bijective :

$$g : [1, +\infty[\mapsto \left[\sqrt[3]{2}, +\infty[$$

3) comme g est une bijection alors :

$$(\forall y \in \left[\sqrt[3]{2}, +\infty[) (\exists ! x \in [1, +\infty[) : g(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y = \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{x^6 + 1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{t^2 + 1}{t} ; \quad t = x^3$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 1 = t \cdot y^3$$

$$\Leftrightarrow t^2 - y^3 \cdot t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{y^3 \pm \sqrt{y^6 - 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{y^3 \pm \sqrt{y^6 - 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{y^3 \pm \sqrt{y^6 - 4}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Pour savoir laquelle des deux expressions de x est valable on examine un point trivial comme $f(2) = \frac{65^{1/3}}{2}$ On remplace y par $\frac{65^{1/3}}{2}$ dans chacune des expressions

De x pour décider laquelle est vraie :

$$c'est : x = \left(\frac{y^3 + \sqrt{y^6 - 4}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Donc pour tout y de $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$ on a :

$$g^{-1}(y) = \left(\frac{y^3 + \sqrt{y^6 - 4}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

4) la fonction g^{-1} est dérivable sur l'ensemble $J \setminus \{\sqrt[3]{2}\} =]\sqrt[3]{2}, +\infty[$ car g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et g' ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ et en plus on a :

$$\forall x \in]\sqrt[3]{2}, +\infty[; (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

Mais g^{-1} n'est pas dérivable sur J car g' s'annule en $g^{-1}(\sqrt[3]{2}) = 1$.

$$g'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^6 - 1}{x^4} \right)$$

$$\Rightarrow g'(1) = \left(1^3 + \frac{1}{1^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1^6 - 1}{1^4} \right) = 0$$

5) Soit : $\varphi(t) = f(t) - t^3$

Cette fonction est continue sur $]1, \sqrt[3]{2}[$

$$\blacksquare \varphi(1) = \sqrt[3]{2} - 1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1} > 0$$

$$\blacksquare \varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2 + \frac{1}{2}} - 2 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} - \sqrt[3]{\frac{16}{2}} < 0$$

$$\Rightarrow \varphi(1) \times \varphi(\sqrt[3]{2}) < 0$$

Donc d'après le TVI on déduit que :

$$\exists \alpha \in]1, \sqrt[3]{2}[; \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in]1, \sqrt[3]{2}[; f(\alpha) = \alpha^3$$

Et comme f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$ Alors pour tout élément de $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$ il existe un seul antécédent par f .

Pour l'élément $\alpha^3 \in [\sqrt[3]{2}, +\infty[$ son antécédent par f est α . Il est unique dans $]1, +\infty[$ en particulier dans $]1, \sqrt[3]{2}[$

$$\Leftrightarrow \exists! \alpha \in]1, \sqrt[3]{2}[; f(\alpha) = \alpha^3$$

Solution N° 84 :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{2}{x^2} \right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{-x \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}} \right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \left(\frac{1 + 0}{-\sqrt{2 + 0}} \right) = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \left(\frac{1 + 0}{\sqrt{2 + 0}} \right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$2) f'(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 2} - (x + 1) \cdot \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 2}}}{2x^2 + 2}$$

$$= \frac{\sqrt{2x^2 + 2}}{2x^2 + 2} \left(1 - \frac{4x(x + 1)}{2(2x^2 + 2)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2}} \left(1 - \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2}} \left(\frac{1 - x}{x^2 + 1} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Comme $\sqrt{2x^2 + 2}$ et $x^2 + 1 > 0$

Alors : $\text{signe}(f'(x)) \equiv \text{signe}(1 - x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Comme f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ Alors f réalise une bijection qu'on note g définie de $[1, +\infty[$ vers $g([1, +\infty[) = \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$

Ainsi l'application suivante est bijective :

$$g : [1, +\infty[\mapsto \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$$

4) comme g est une bijection alors :

$$\left(\forall y \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right] \right) (\exists ! x \in [1, +\infty[) : g(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow y^2(2x^2 + 2) = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (2y^2 - 1)x^2 - 2x + (2y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16(1 - y^2)y^2}}{2(2y^2 - 1)}$$

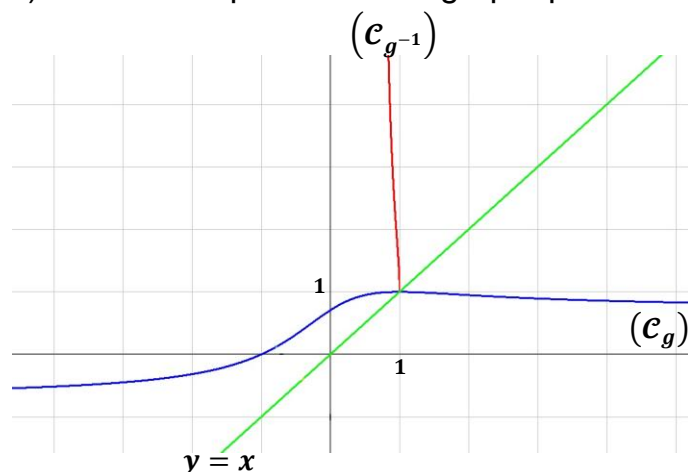
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 2y\sqrt{1-y^2}}{2y^2-1}$$

Pour savoir laquelle des deux expressions de x est celui qu'on va retenir, il suffirait de prendre un point trivial par exemple $f(2) = 3/\sqrt{10}$ puis on remplace y par $3/\sqrt{10}$ et on examine laquelle des expressions de x donnera la valeur $x = 2$

$$c'est : x = \frac{1 + 2y\sqrt{1-y^2}}{2y^2-1}$$

$$\Rightarrow \forall y \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right] ; g^{-1}(y) = \frac{1 + 2y\sqrt{1-y^2}}{2y^2-1}$$

5) Voici la représentation graphique :



6) Soit la proposition $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$

L'initialisation : On a : $0 \leq 0 \leq 1$

Donc : $0 \leq u_0 \leq 1 \Rightarrow P(0)$ est vraie

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

■ $P(n)$ est vraie $\Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) ; f$ est ↗

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

Ainsi : $\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

7) On peut le faire à l'aide de la machine récurrence mais je propose cette fois ci le TAF.

On a f est une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier Donc on peut appliquer le TAF à f sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit pour le moment l'intervalle $[u_n, 1]$.

■ $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [u_n, 1] \\ f \text{ est dérivable sur }]u_n, 1[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]u_n, 1[; \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} = \frac{1}{\sqrt{2c^2 + 2}} \left(\frac{1-c}{c^2 + 1} \right)$$

$$\text{On pose : } \psi(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \psi'(x) = \frac{-(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(1-x)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \left(x^2+1 + \frac{3}{2}(1-x) \right)}{(x^2+1)^3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{-(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + 1)^3} \left(x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{5}{2} \right) < 0$$

$\Delta < 0$ sur $[0,1]$

$\Rightarrow \psi$ est \searrow sur $[0,1]$

■ $c > 0 \Rightarrow 0 < \psi(c) < \psi(0)$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1-c}{(c^2+1)^{\frac{3}{2}}} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \cdot \left(\frac{1-c}{c^2+1} \right) < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \cdot \left(\frac{1-c}{c^2+1} \right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 0 < f'(c) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |f'(c)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|u_{n+1} - 1|}{|u_n - 1|} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

8) On a : $|u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |u_{n-1} - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |u_{n-2} - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 |u_{n-3} - 1|$$

\vdots

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1} |u_{n-n} - 1|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1} |u_0 - 1|$$

$$\Rightarrow |u_n - 1| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n |u_0 - 1|$$

$$\Rightarrow |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{car : } u_0 - 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^0$$

9) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

Donc d'après la question 8) on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$$

Solution N° 85 :

1) $u_1 = \sqrt[3]{4} - 1 \approx 0,587$

2) Soit la proposition $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$

L'initialisation : On a : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

■ $P(n)$ est vraie $\Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq 3 u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3 u_n + 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} \leq \sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \leq \sqrt[3]{4} - 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{4} - 1 < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

Voici pourquoi $\sqrt[3]{4} - 1 < 1$:

$$\blacksquare 4 < 8 \Rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow \sqrt[3]{4} < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{4} - 1 < 1}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

3) Soit $x \in [0,1]$ et on procède ainsi :

$$\blacksquare f(x) - x = (\sqrt[3]{3x+1} - 1) - x$$

$$= \frac{\left((3x+1)^{\frac{1}{3}} - (x+1) \right)}{1} \\ \times \frac{\left((3x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)(3x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2 \right)}{\left((3x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)(3x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2 \right)}$$

$$= \frac{\left((3x+1)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - (x+1)^3}{(3x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)(3x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2}$$

$$= \frac{3x+1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{(3x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)(3x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{-(x^3 + 3x^2)}{(3x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)(3x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - x \leq 0 ; \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(x) \leq x ; \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(u_n) \leq u_n ; \text{ car } u_n \in [0,1]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite } \searrow$$

4) la suite $(u_n)_n$ est bien évidemment convergente car décroissante et étant minorée par 0 c'est à dire $0 \leq u_n \leq 1$.

$$5) u_{n+1} = f(u_n) ; f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 1$$

La fonction f est continue sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$
On a aussi $f(I) \subseteq I$.

$$\text{Car } x \in I \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3x+1 \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt[3]{3x+1} - 1 \leq \sqrt[3]{4} - 1 < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \in I$$

On a aussi (u_n) est convergente et sa limite appartient à I car $0 \leq u_n \leq 1$ Donc par passage aux limites on se rend compte que la limite ℓ est bien dans I .

$$\Leftrightarrow f(\ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(\ell^3 + 3\ell^2)}{(3\ell+1)^{\frac{2}{3}} + (\ell+1)(3\ell+1)^{\frac{1}{3}} + (\ell+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell^2(\ell+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell \in \{0; -3\}$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{car} \quad -3 \notin I$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0}$$

Solution N° 86 :

1) Soit $x \in]0,2[$ et on procède ainsi :

$$f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2} = (2x - x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1}{3}(2x - x^2)^{-\frac{2}{3}}(2 - 2x)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(1-x)}{\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}}$$

2) Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-	
$f(x)$				1		
		0	↗	↘	0	

$$3) x \in [0,2] \Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x \in [0,1] \\ \text{ou bien } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x \leq 1 \\ \text{ou bien } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } f(x) \leq f(1) ; f \nearrow [0,1] \\ \text{ou bien } f(x) \leq f(1) ; f \searrow [1,2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(1) ; \forall x \in [0,2]$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in [0,2] ; f(x) \leq 1} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare x \in [0,2] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \quad \text{et} \quad (2-x) \geq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow x(2-x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x - x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in [0,2] ; f(x) \geq 0} \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\forall x \in [0,2] ; 0 \leq f(x) \leq 1$$

4) Pour l'implication directe c'est clair que si (u_n) est constante alors on déduit que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = u_n$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \sqrt[3]{2u_n - u_n^2} = u_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; 2u_n - u_n^2 = u_n^3$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n(u_n^2 + u_n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n(u_n - 1)(u_n + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in \{0; 1; -2\}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in \{0; 1\} \quad \text{car} \quad -2 \notin [0,2]$$

$$\Rightarrow u_0 = a \in \{0; 1\}$$

Pour l'implication réciproque on a :

$$\blacksquare \text{ Si } a = 0 \Rightarrow u_1 = \sqrt[3]{2a - a^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt[3]{2 \cdot 0 - 0^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_3 = \sqrt[3]{2 \cdot 0 - 0^2} = 0$$

⋮

$$\Rightarrow u_n = \sqrt[3]{2 \cdot 0 - 0^2} = 0$$

$$\blacksquare \text{ Si } a = 1 \Rightarrow u_1 = \sqrt[3]{2 \cdot 1 - 1^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt[3]{2 \cdot 1 - 0^2} = 1$$

$$\Rightarrow u_3 = \sqrt[3]{2 \cdot 1 - 1^2} = 1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt[3]{2 \cdot 1 - 1^2} = 1$$

La conclusion : $u_n = cte \Leftrightarrow a \in \{0; 1\}$

5) Soit la proposition définie ainsi :

$$P(n) : \forall a \in]0,1[; 0 \leq u_n \leq 1$$

L'initialisation : On a : $u_0 = a \in [0,1]$

Donc : $0 \leq u_0 \leq 1 \Rightarrow P(0)$ est vraie

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie } \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) ; f \nearrow [0,1]$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall a \in [0,1] ; 0 \leq u_n \leq 1$$

6) c'est clair que si $a \in \{0; 1\}$ alors $u_n = cte$

Si $a \in]0,1[$ Soit $x \in [0,1]$ et on a :

$$f(x) - x = \sqrt[3]{2x - x^2} - x$$

$$= \frac{(2x - x^2) - x^3}{(2x - x^2)^{\frac{2}{3}} + x(2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \frac{-x(x^2 + x - 2)}{(2x - x^2)^{\frac{2}{3}} + x(2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \frac{-x(x+2)(x-1)}{(2x - x^2)^{\frac{2}{3}} + x(2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} \geq 0$$

$$\text{Car } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -x \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-x(x+2)(x-1)}{(2x - x^2)^{\frac{2}{3}} + x(2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - x \geq 0 ; \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(x) \geq x ; \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(u_n) \geq u_n ; \text{ car } u_n \in [0,1]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite } \nearrow$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite convergente} \\ \text{car majorée par } 1 : (0 \leq u_n \leq 1)$$

7) On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on a f est une fonction continue sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ et encore que $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. On a de plus $u_0 = a \in [0,1]$ et la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ appartient à l'intervalle $[0,1]$. Alors on déduit que :

$$f(\ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\ell(\ell+2)(\ell-1)}{(2\ell - \ell^2)^{\frac{2}{3}} + \ell(2\ell - \ell^2)^{\frac{1}{3}} + \ell^2} = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \ell \in \{0; 1; -2\}$$

$$\Leftrightarrow \ell \in \{0; 1\}; \text{ car } -2 \notin [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1; \text{ car } (u_n) \text{ est } \nearrow$$

Solution N° 87 :

1) On a P est continue sur $]1,4[\subset \mathbb{R}$ car c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

$$\text{Et on a : } \begin{cases} P(1) = -4 < 0 \\ P(4) = 5 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(1) \times P(4) < 0$$

Donc d'après le TVI on déduit que :

$$\exists \alpha \in [1,4]; P(\alpha) = 0$$

Et comme : $P(1) \neq 0$ et $P(4) \neq 0$ alors

$$\exists \alpha \in]1,4[; P(\alpha) = 0$$

Et comme P est strictement croissante sur $]1,4[$ alors P est une bijection définie de $]1,4[$ vers son image et par la suite l'élément 0 admet un seul antécédent α Donc on écrit finalement :

$$\exists! \alpha \in]1,4[; P(\alpha) = 0$$

Voici pour l'instant pourquoi P est une fonction croissante sur $]1,4[$:

$$\blacksquare P'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

$$= 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$= 3(x - 2)^2 > 0; \forall x \in]1,4[$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et on procède ainsi :

$$\blacksquare g(x) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x^2 - 12x + 11} - x = 0$$

$$\frac{(6x^2 - 12x + 11) - x^3}{(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{2}{3}} + x(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{1}{3}} + x^2} = 0$$

$$\frac{-P(x)}{(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{2}{3}} + x(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{1}{3}} + x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha \in]1,4[$$

Donc α est la seule solution de $g(x) = x$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$ et on procède comme suit

$$\blacksquare g'(x) = \left((6x^2 - 12x + 11)^{\frac{1}{3}} \right)'$$

$$= \frac{1}{3} (6x^2 - 12x + 11)^{-\frac{2}{3}} \cdot (12x - 12)$$

$$= \frac{4(x - 1)}{\sqrt[3]{(6x^2 - 12x + 11)^2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \geq 1$$

$$\Rightarrow g \text{ est } \nearrow \text{ sur } [1, +\infty[$$

$$4) g([1, +\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[$$

$$= [\sqrt[3]{5}; +\infty[$$

5) Soit la proposition définie ainsi :

$$Q(n) : 1 \leq u_n \leq \alpha$$

L'initialisation : On a : $1 \leq 1 \leq \alpha$

Donc $1 \leq u_0 \leq \alpha \Rightarrow Q(0) \text{ est vraie}$

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie.

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 1 \leq u_n \leq \alpha$$

$$\Rightarrow g(1) \leq g(u_n) \leq g(\alpha) ; g \nearrow [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{5} \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \alpha$

6) On a : $g(x) - x =$

$$\frac{-P(x)}{(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{2}{3}} + x(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$\blacksquare 1 \leq x \leq \alpha \Rightarrow P(1) \leq P(x) \leq P(\alpha) ; P \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow -4 \leq P(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq -P(x) \leq 4$$

$$\frac{-P(x)}{(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{2}{3}} + x(6x^2 - 12x + 11)^{\frac{1}{3}} + x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x) - x \geq 0 ; \forall x \in [1, \alpha]$$

$$\Rightarrow g(u_n) - u_n \geq 0 ; \text{ car } u_n \in [1, \alpha]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite } \nearrow$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

7) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien évidemment convergente car croissante et étant minorée par α vu que $1 \leq u_n \leq \alpha$.

$$\Leftrightarrow f(\ell) = \ell ; \text{ avec } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$$

$$\frac{-P(\ell)}{(6\ell^2 - 12\ell + 11)^{\frac{2}{3}} + \ell(6\ell^2 - 12\ell + 11)^{\frac{1}{3}} + \ell^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow P(\ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha}$$

Solution N° 88 :

1) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on procède ainsi :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}} = \left(\frac{2}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 + \sin x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1 + \sin x}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 + \sin x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-2 \cos x}{(1 + \sin x)^2}\right) \\ &= \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$2) x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \cos x \leq \cos 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow -\cos x \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \searrow \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \text{ bijective}$$

Soit $\varphi(x) = f(x) - x \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On a φ est une fonction continue sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a encore :

$$\begin{cases} \varphi(0) = f(0) - 0 = \sqrt{2} > 0 \\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Donc d'après le TVI on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad : \quad \varphi(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad : \quad f(\lambda) = \lambda$$

Et comme $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ Alors :

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad : \quad f(\lambda) = \lambda$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Comme f réalise une bijection sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
Alors l'élément λ admet un seul antécédent par f et c'est λ lui-même.

$$\Leftrightarrow \exists! \lambda \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad : \quad f(\lambda) = \lambda$$

$$3) \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \geq 1$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x)^{\frac{3}{2}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |-\cos x| \cdot \left| \frac{1}{(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq 1 \cdot 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4) \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \geq 1$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x)^{1/2} \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{2}}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi on a pu montrer l'implication suivante : $x \in [0, \pi] \Rightarrow f(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Donc : $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2^{ème} Méthode : (très facile)

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); f(0)\right] \text{ car } f \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= [1, \sqrt{2}] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

5) Soit la proposition $P(n)$ définie par :

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$$

L'initialisation : On a : $0 \leq 0 \leq \frac{\pi}{2}$

Donc $0 \leq u_0 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow P(0) \text{ est vraie}$

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

■ $P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow f(u_n) \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow f(u_n) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$

Ainsi : $\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$

6) On a f est une fonction continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc on peut appliquer le TAF à f sur n'importe quelle portion de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit l'intervalle $[u_n, \lambda] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [u_n, \lambda] \\ f \text{ est dérivable sur }]u_n, \lambda[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]u_n, \lambda[; \frac{f(u_n) - f(\lambda)}{u_n - \lambda} = f'(c)$$

$$\text{Comme : } |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} ; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Alors : } |f'(c)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} ; c \in]u_n, \lambda[\subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$D'où : \left| \frac{f(u_n) - f(\lambda)}{u_n - \lambda} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{|u_{n+1} - \lambda|}{|u_n - \lambda|} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \lambda|$$

7) On a : $|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \lambda|$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} |u_{n-1} - \lambda|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \lambda| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 |u_{n-2} - \lambda|$$

: : :

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \lambda| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} |u_{n-n} - \lambda|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \lambda| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \lambda|$$

$$\Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |\lambda|$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lambda$

Solution N° 89 :

1) Soit $x > 0$ et on considère $[0, x]$ on a

$$\begin{cases} \sin t \text{ est continue sur } [0, x] \\ \sin t \text{ est dérivable sur }]0, x[\\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$$

Alors d'après l'inégalité des accroissements finis on écrit :

$$-1 \leq \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow -x \leq \sin x \leq x \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow -x \leq \sin x \leq x \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

car $-0 \leq \sin 0 \leq 0$

2) Soit : $\varphi(t) = f(t) - g(t) + g(0) - f(0)$
Et soit l'intervalle $[0, x]$ avec $x > 0$
comme f et g sont dérivables sur \mathbb{R}
alors φ l'est donc on peut appliquer le TAF à φ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} en particulier sur $[0, x]$:

$$\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, x[\quad ; \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

■ $\forall x \geq 0 \quad ; \quad f'(x) \leq g'(x)$

$$\Rightarrow f'(c) \leq g'(c) \quad ; \quad \text{car } c > 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(c) = f'(c) - g'(c) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} < 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x) - g(x) + g(0) - f(0) - 0}{x - 0} \right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - g(x) + g(0) - f(0)}{x} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) + g(0) - f(0) < 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) < g(x) - g(0) \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) < g(x) - g(0) ; \forall x \geq 0$$

$$\text{car : } f(0) - f(0) = g(0) - g(0)$$

$$3) \text{ On pose : } g(x) = \cos x \text{ et } f(x) = \frac{-x^2}{2}$$

Les fonctions f et g sont évidemment dérivables sur \mathbb{R} et on a :

$$g'(x) = -\sin x \text{ et } f'(x) = -x$$

$$\blacksquare \text{ Question } \boxed{1} \Rightarrow x \geq \sin x$$

$$\Rightarrow -x \leq -\sin x ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq g'(x) ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{2} - 0 \leq \cos x - \cos 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{2} \leq \cos x - 1 ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1} ; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$4) \text{ On pose } f(x) = x - \frac{-x^3}{6} \text{ et } g(x) = \sin x$$

Les fonctions f et g sont trivialement dérivables sur \mathbb{R} et on a de plus :

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ et } g'(x) = \cos x$$

On a d'après la question 3) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ ; f'(x) \leq g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{6} - 0 \leq \sin x - \sin 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x ; \text{ selon 1)}$$

Solution N° 90 :

$$1) f(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)} ; \forall x \in I$$

D'abord f est dérivable sur I car c'est un quotient bien définie de deux fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{(1 - \sin 2x)^2}$$

$$\blacksquare x \in I \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(2x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2x)}{(1 - \sin 2x)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0 ; \forall x \in I$$

$\Rightarrow f$ est strictement \searrow sur I
Strictement = garde le même sens

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Et comme f est continue sur I et étant strictement monotone (\searrow) alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$:

$$\begin{aligned} \blacksquare f(I) &= f\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right) \\ &= \left[f\left(\frac{3\pi}{4}\right); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x)\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}; \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1}{1 - \sin x}\right)\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}; \lim_{\substack{t \rightarrow 1^- \\ t = \sin x}} \left(\frac{1}{1 - t}\right)\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}, +\infty\right] \end{aligned}$$

Ainsi l'application suivante est bijective :

$$f : \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \mapsto \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

2) Soit $\varphi(t) = f^{-1}(t) - t$

On a φ est continue sur $[1,2] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 &\Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow f^{-1}(1) - 1 &= \frac{\pi}{2} - 1 > 0 \\ \Rightarrow \boxed{\varphi(1) > 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 &\Rightarrow f^{-1}(2) = \frac{5\pi}{12} \\ \Rightarrow f^{-1}(2) - 2 &= \frac{5\pi}{12} - 2 < 0 \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(2) < 0}$$

Donc on déduit que : $\varphi(1) \times \varphi(2) < 0$

D'où d'après le TVI on écrit :

$$\exists \alpha \in [1,2] ; \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in [1,2] ; f^{-1}(\alpha) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in [1,2] ; g(\alpha) = \alpha$$

Comme f est une bijection alors tout élément de $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ admet un seul antécédent. En particulier pour l'élément $\alpha \in [1,2] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ il existe un seul et unique antécédent et c'est $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Je rajoute que $\alpha \in]1,2[$ car $f^{-1}(1) \neq 1$ Et $f^{-1}(2) \neq 2$ Donc on déduit que :

$$\exists! \alpha \in K ; g(\alpha) = \alpha$$

4) On a $g = f^{-1}$ est continue et dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\supset [1,2]$ Donc on peut appliquer le TAF à g sur n'importe quelle portion de $[1,2]$ en particulier sur un intervalle $[x,t] \subseteq [1,2]$:

$$\begin{cases} g \text{ est continue sur } [x,t] \\ g \text{ est dérivable sur }]x,t[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]x,t[: \frac{g(x) - g(t)}{x - t} = g'(c)$$

$$\blacksquare c \in]x,t[\subset [1,2]$$

$$\Rightarrow 1 \leq c \leq 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) \leq f^{-1}(c) \leq f^{-1}(1) ; f^{-1} \text{ est } \searrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12} \leq f^{-1}(c) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f' \left(\frac{5\pi}{12} \right) \leq f'(f^{-1}(c)) \leq f' \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow -4\sqrt{3} \leq f'(f^{-1}(c)) \leq -2$$

$$\Rightarrow -4\sqrt{3} \leq f'(f^{-1}(c)) \leq -2$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{1}{f'(f^{-1}(c))} \leq \frac{-1}{4\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{1}{f'(f^{-1}(c))} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{f'(f^{-1}(c))} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(x) - g(t)}{x - t} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(t)| \leq \frac{1}{2}|x - t|$$

5) Soit la proposition définie ainsi :

$$P(n) : u_n \in K$$

L'initialisation : $u_0 = 1 \in [1,2] = K$

Donc $u_0 \in K \Rightarrow P(0)$ est vraie

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

■ $P(n)$ est vraie $\Rightarrow u_n \in K$

$$\Rightarrow 1 \leq u_n \leq 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) \leq f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(1) ; f^{-1} \text{ est } \searrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12} \leq g(u_n) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{5\pi}{12} \leq g(u_n) \leq \frac{\pi}{2} < 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in K$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

6) On a d'après la question 4) :

$$\forall (x, t) \in K^2 ; |g(x) - g(t)| \leq \frac{1}{2}|x - t|$$

$$(\alpha, u_n) \in K^2 ; |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$$

7) On d'après la question 6) :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-2} - \alpha|$$

⋮

$$\hookrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_{n-n} - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha| ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{Alors : } \lim_0 |1 - \alpha| \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

D'où d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

Solution N° 91 :

$$1) h(x) = \frac{1}{x} - 2 \operatorname{Arctan} x ; x \neq 0$$

$$h'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{2}{1+x^2} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2}\right) < 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et comme h est continue et étant strictement monotone sur $]0, +\infty[$ alors h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur son image $h(]0, +\infty[)$

$$h(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right[$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \operatorname{arctan} x\right) = -\pi$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - 2 \operatorname{Arctan} x\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2 \operatorname{Arctan} x}{x}\right)$$

$$= (+\infty)(1 - 2 \times 1) = +\infty$$

Ainsi l'application suivante est bijective :

$$h :]0, +\infty[\mapsto]-\pi, +\infty[$$

Donc d'après la définition d'une application bijective on écrit :

$$(\forall y \in]-\pi, +\infty[) (\exists ! x \in]0, +\infty[) ; h(x) = y$$

$$(0 \in]-\pi, +\infty[) (\exists ! \alpha \in]0, +\infty[) ; h(\alpha) = 0$$

$$\text{Pourquoi maintenant } \frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1 ?$$

On a h est une fonction continue sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right] \subset]0, +\infty[$ et on aussi :

$$\begin{aligned} \blacksquare h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \sqrt{3} - 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \sqrt{3} - 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare h(1) &= 1 - 2 \operatorname{Arctan}(1) \\ &= 1 - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \end{aligned}$$

Alors on en déduit que :

$$h(1) \times h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$$

Alors d'après le TVI on écrit :

$$\exists \left(\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1\right) ; h(\alpha) = 0$$

Et comme h est une bijection alors 0 admet un seul antécédent et c'est α :

$$\exists ! \left(\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1\right) ; h(\alpha) = 0$$

Si vous aimeriez être typique vous appliquez directement le TVI et vous rajoutez que h est continue et étant strictement monotone.

2) Soit x un élément de $]0, +\infty[$:

■ Si $x \geq \alpha$ Alors $h(x) \leq h(\alpha)$; $h \searrow$

$$\Rightarrow \boxed{h(x) \leq 0 ; \forall x \in [\alpha, +\infty[}$$

■ Si $x \leq \alpha$ Alors $h(x) \geq h(\alpha)$; $h \searrow$

$$\Rightarrow \boxed{h(x) \geq 0 ; \forall x \in]0, \alpha]}$$

3) Soit $f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{1+x^2}$; $\forall x \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{■ } f'(x) &= \frac{\frac{1+x^2}{1+x^2} - 2x(\text{Arctan } x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1 - 2x \cdot \text{Arctan } x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2 \text{Arctan } x \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot h(x) \end{aligned}$$

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$		+	-
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$4) \text{ On a : } h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - 2 \text{Arctan } \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Arctan } \alpha = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\text{Arctan } \alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$$

5) On a d'après le tableau de $f(x)$:

$$\forall x \geq 0 ; 0 \leq f(x) \leq f(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \geq 0 ; 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$$

$$\text{■ } \frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1 \\ \text{Et } \frac{12}{9} < \alpha^2 + 1 < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{3}}{9} < 2\alpha(\alpha^2 + 1) < 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2\alpha(\alpha^2 + 1)} < \frac{9}{8\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2\alpha(\alpha^2 + 1)} < \frac{9}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2\alpha(\alpha^2 + 1)} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\alpha(\alpha^2 + 1)} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \geq 0 ; 0 \leq f(x) < \frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

6) Soit : $\varphi(t) = (\text{Arctan } t)^2$; $\forall t \in \mathbb{R}$
 On a φ est trivialement continue et dérivable sur \mathbb{R} tout entier Donc on peut appliquer le TAF à φ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} .

Soit l'intervalle $[x_0, x]$; $x > x_0 \geq 0$

Ainsi : $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [x_0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]x_0, x[\end{cases}$

$$\Rightarrow \exists c \in]x_0, x[; \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{(\text{Arctan } x)^2 - (\text{Arctan } x_0)^2}{x - x_0} = 2 f(c)$$

$$\Rightarrow \varphi'(c) = (\text{Arctan}^2 t)'_{t=c} = \frac{2 \text{Arctan } c}{1 + c^2}$$

$$\blacksquare f(x) < \frac{3\sqrt{3}}{8} ; \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow f(c) < \frac{3\sqrt{3}}{8} ; \text{ car } c \geq 0$$

$$\Rightarrow 2f(c) < \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(\text{Arctan } x)^2 - (\text{Arctan } x_0)^2}{x - x_0} < \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow (\text{Arctan } x)^2 - (\text{Arctan } x_0)^2 < \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow (\text{Arctan } x)^2 - (\text{Arctan } x_0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$$

$$\text{Car } (\text{Arctan } x_0)^2 - (\text{Arctan } x_0)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(x_0 - x_0)$$

Donc pour tout $x \geq x_0$ on a :

(*)

$$\boxed{(\text{Arctan } x)^2 - (\text{Arctan } x_0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

7) On prend dans la formule (*) :

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{2^k} \geq 0 ; k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq n \\ x_0 \rightarrow 0 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\left(\text{Arctan} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)^2 - (\text{Arctan } 0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{2^k} - 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{Arctan} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{2^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n} \left(\text{Arctan} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} x \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow u_n(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} x \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow u_n(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} x \cdot 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow u_n(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} x \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow u_n(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} x ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Car : } 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow (u_n(x))_n \text{ est majorée par } \frac{3\sqrt{3}}{2} x$$

8) On prend dans la formule (*) :

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{2^k} \geq 0 ; k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq n \\ x_0 \rightarrow \frac{x_0}{2^k} \geq 0 ; k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)^2 - \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x_0}{2^k} \right) \right)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x - x_0}{2^k} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &< \sum_{k=0}^{k=n} \left(\left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)^2 - \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x_0}{2^k} \right) \right)^2 \right) \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{4} (x - x_0) \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} \right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{k=n} \left(\left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)^2 - \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x_0}{2^k} \right) \right)^2 \right) \right| \\ \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot |x - x_0| \cdot \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} \right)^k \end{aligned}$$

(**)

$$\Rightarrow |u_n(x) - u_n(x_0)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot |x - x_0| \cdot \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$= 2(1 - 0) = \boxed{2}$$

Donc d'après le critère de comparaison dans les suites on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x) - u_n(x_0)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} |x - x_0|$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0) \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} |x - x_0|$$

$$\Rightarrow |C(x) - C(x_0)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} |x - x_0|$$

$$\text{On a encore : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3\sqrt{3}}{2} |x - x_0| = 0$$

Donc d'après le critère de comparaison dans les fonctions on déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |C(x) - C(x_0)| = 0 ; \forall x_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (C(x) - C(x_0)) = 0 ; \forall x_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} C(x) = C(x_0) ; \forall x_0 \in \mathbb{R}^+$$

\Rightarrow la fonction C est continue sur \mathbb{R}^+

Solution N° 92 :

Remarque : la règle de l'Hôpital est clairement hors programme car elle facilite et rend trop facile beaucoup de calculs de limites. Les décideurs détestent toute simplicité dans la matière Mathématiques. Vous devez quand-même apprendre à appliquer cette règle pour sauver vos calculs dans le brouillon aux examens et aux concours.

$$1) l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x + \sin x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] FI$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)'}{(x + \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan^2 x - \cos x}{1 + \cos x} \right)$$

$$= \frac{1 + 0 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 2) \quad l &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)'}{(x^3)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan^2 x - \cos x}{3x^2} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan^2 x - \cos x)'}{(3x^2)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x) + \sin x}{6x} = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \tan x + \tan^3 x + \sin x)'}{(6x)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + 2 \tan^2 x + 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + \cos x}{6} \right) \\
 &= \frac{2 + 0 + 0 + 1}{6} = \boxed{\frac{1}{2}} \\
 3) \quad l &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(\pi \sqrt{\cos x}))'}{(x)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\left(\frac{-\pi \sin x}{2\sqrt{\cos x}} \cdot \cos(\pi \sqrt{\cos x}) \right)}{1} \right) \\
 &= 0 \times \cos(\pi) = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 4) \quad l &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \sqrt{1 + \sin x}}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \sqrt{1 + \sin x})'}{(x)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x - \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}}{1} \right) \\
 &= \left(\frac{-\sin 0 - \frac{\cos 0}{2\sqrt{1 + \sin 0}}}{1} \right) = \boxed{\frac{-1}{2}} \\
 5) \quad l &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3})'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}} \right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \boxed{3} \\
 6) \quad l &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - x)'}{(x)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1}{1} \right) = \boxed{+\infty} \\
 7) \quad l &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } 3x}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI} \\
 &\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{Arctan } 3x)'}{(x)'}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{3}{1+x^2}}{1} \right) = \boxed{3}$$

$$8) \quad l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$9) \quad l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \boxed{1}$$

$$10) \quad l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{Arctan } x}{x^3} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \text{Arctan } x)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)'}{(3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{6x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)'}{(6x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \left(\frac{2(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{2-0}{1} \right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$11) \quad l = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}}{x-1} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\text{Arctan } x - \frac{\pi}{4})'}{(x-1)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$12) \quad l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{Arctan } x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} \right) = \boxed{1}$$

$$13) \quad l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan^2 x}{1} \right)$$

$$= \frac{1+0}{1} = \boxed{1}$$

$$14) \quad l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) = \boxed{\frac{0}{0}} \text{ FI}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{3x^2} \right) = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x}{6x} \right) = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos x}{6} \right) = \boxed{\frac{-1}{6}}$$

Solution N° 93 :

$$1) f(x) = \sqrt{\sin x} + x \quad ; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car c'est une somme bien définie de deux fonctions continues et dérivables. Et on pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

$$\text{Car si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ Alors } \cos x > 0$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en plus f est continue donc f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers son image $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0; \frac{\pi}{2} + 1\right]$:

Ainsi l'application suivante est bijective :

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \left[0; \frac{\pi}{2} + 1\right]$$

2) comme f est bijective et comme f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors la fonction réciproque f^{-1} est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2} + 1\right]$. Examinons maintenant la dérivabilité de la fonction f^{-1} :

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Comme f est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et comme f' ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ Alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2} + 1\right] = J \setminus \{0\}$ et on ait par la suite :

$$\forall x \in J \setminus \{0\} \quad ; \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Pourquoi f' ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$?

$$\text{Car } f'(x) = 1 + \frac{\cos c}{2\sqrt{\sin c}} \neq 0 \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$3) \text{ On a : } \begin{cases} f \text{ est continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = 1 + \frac{\cos c}{2\sqrt{\sin c}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} + 1 = 1 + \frac{\cos c}{2\sqrt{\sin c}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} = \frac{\cos c}{2\sqrt{\sin c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{\pi} = \frac{\cos c}{2\sqrt{\sin c}}}$$

Solution N° 94 :

$$1) \text{ On a : } f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} + x \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{x^2} + 1 \right) = \frac{x^2 - 3}{2x^2}$$

$$\blacksquare x \in [\sqrt{3}, +\infty[\Rightarrow x \geq \sqrt{3} \Rightarrow x^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 3 \Rightarrow x^2 - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3}{2x^2} \geq 0 ; \quad \forall x \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 ; \quad \forall x \geq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow f$ est strictement \nearrow sur $[\sqrt{3}, +\infty[$
c'est à dire garde le même sens

$$2) x \in I \Rightarrow x \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\sqrt{3}) \text{ car } f \text{ est } \nearrow [\sqrt{3}, +\infty[$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \sqrt{3}$$

3) Soit $x \in I$, On a pu montrer que :

$$\boxed{f'(x) \geq 0} \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{Et on a : } \frac{x^2 - 3}{2x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x^2 - 6 - 2x^2}{2x^2}$$

$$= \frac{-6}{2x^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3}{2x^2} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3}{2x^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) < 0} \rightsquigarrow (2)$$

D'après les résultats (1) et (2) on tire :

$$\boxed{\forall x \in I ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}}$$

4) Soit $x > \sqrt{3}$ et on procède ainsi :

$$\blacksquare \begin{cases} f \text{ est continue sur } [\sqrt{3}, x] \\ f \text{ est dérivable sur }]\sqrt{3}, x[\end{cases}$$

Alors d'après le TAF on écrit :

$$\exists c \in]\sqrt{3}, x[; \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = f'(c)$$

Comme : $\forall x \in I ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

Alors : $0 \leq f'(c) < \frac{1}{2}$; car $c \in I$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\sqrt{3})| < \frac{1}{2} \cdot |x - \sqrt{3}|$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in I ; |f(x) - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} |x - \sqrt{3}|}$$

5) Soit la proposition définie ainsi :

$$P(n) : u_n \geq \sqrt{3}$$

L'initialisation : On a : $u_0 = 4 \geq \sqrt{3}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie.

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie } \Rightarrow u_n \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n \in [\sqrt{3}; +\infty[= I$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow f(u_n) \geq \sqrt{3} \quad ; \quad \text{d'après Quest } \boxed{2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq \sqrt{3}$

6) On a d'après la question 4) :

$$\forall x \in I \quad ; \quad |f(x) - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} |x - \sqrt{3}|$$

Donc pour $u_n \in I \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$|f(u_n) - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} \cdot |u_n - \sqrt{3}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} \cdot |u_n - \sqrt{3}|$$

7) Soit la proposition définie ainsi :

$$Q(n) : |u_n - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |u_0 - \sqrt{3}|$$

L'initialisation : $|4 - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |4 - \sqrt{3}|$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie.

$$Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow |u_n - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |u_0 - \sqrt{3}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{3}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \sqrt{3}|$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad |u_n - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{3}|}$$

8) Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{3}| = 0$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Est géométrique et : $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc d'après le critère de comparaison dans les suites on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \sqrt{3}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \sqrt{3}}$$

Solution N° 95 :

$$1) h(x) = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$$

$$h'(x) = \frac{-2}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{2-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{x^2+1} - \frac{2-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2 + 1) - (2 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-(x^2 + 4)}{(x^2 + 1)^2} < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Ce qui nous intéresse c'est l'intervalle $] -\infty, 0[$ Donc h est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ calculons maintenant les limites aux bornes de l'intervalle $] -\infty, 0[$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{x-1}{x^2+1} \right)$$

$$= 2 \operatorname{Arctan}(0^-) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$= 0 - \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{x-1}{x^2+1} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{-\pi}{2} \right) - \left(\frac{0-1}{0+1} \right) = \boxed{1-\pi}$$

Reste à dresser le tableau de variation :

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	-	
$f(x)$	0	$1-\pi$

2) Comme h est continue et étant strictement monotone sur $] -\infty, 0[$ alors h réalise une bijection de $] -\infty, 0[$ vers son image $h(] -\infty, 0[) =] 1 - \pi ; 0[$:

$$h(] -\infty, 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right[$$

$$=] 1 - \pi ; 0[$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Donc l'application suivante est bijective :

$$h :] -\infty, 0[\mapsto] 1 - \pi ; 0[$$

D'où d'après la définition d'une bijection :

$$(\forall y \in] 1 - \pi ; 0[) (\exists ! x \in] -\infty, 0[) : h(x) = y$$

Ou encore on peut écrire :

$$(\forall x \in] -\infty, 0[) (\exists ! y \in] 1 - \pi ; 0[) : h(x) = y$$

$$\Rightarrow \forall x \in] -\infty, 0[; h(x) \in] 1 - \pi ; 0[$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in] -\infty, 0[; h(x) < 0}$$

3) On pose : $\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x$

On a φ est une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} Donc on peut appliquer le TAF sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit pour l'instant l'intervalle $[t, 0]$ avec $t < 0$:

Ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est continue sur } [t, 0] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]t, 0[\end{array} \right.$

$$\Rightarrow \exists c \in]t, 0[; \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t}{t} = \frac{-2c^2}{(1+c^2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t}{t} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t > 0 \quad ; \quad t < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t < 0 ; \frac{t}{1+t^2} > \operatorname{Arctan} t} \rightsquigarrow (1)$$

De la même manière on pose :

$$\psi(x) = \text{Arctan } x - x$$

La fonction ψ est dérivable sur \mathbb{R} Donc on peut appliquer le TAF à ψ sur n'importe quel intervalle inclus dans \mathbb{R} . Soit l'intervalle $[t, 0]$; avec $t < 0$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \psi \text{ est continue sur } [t, 0] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]t, 0[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]t, 0[; \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} = \psi'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arctan } t - t - 0}{t - 0} = \frac{-c^2}{1 + c^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arctan } t - t}{t} < 0 ; \quad \forall t < 0$$

$$\Rightarrow \text{Arctan } t - t > 0 ; \quad \forall t < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t < 0 ; \text{Arctan } t > t} \rightsquigarrow (2)$$

D'après les résultats (1) et (2) on déduit

$$\boxed{\forall t < 0 ; t < \text{Arctan } t < \frac{t}{1 + t^2}} (*)$$

4) On a d'après l'encadrement (*) :

$$\forall t < 0 ; 0 < \text{Arctan } t - t < \frac{t}{1 + t^2} - t$$

$$\forall t < 0 ; \frac{1}{1 + t^2} - 1 < \frac{\text{Arctan } t - t}{t} < 0$$

$$\text{comme } \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \left(\frac{1}{1 + t^2} - 1 \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} 0 = 0$$

Donc d'après le critère de comparaison dans les fonctions on peut en déduire :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{Arctan } t - t}{t} \right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 96 :

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - 1}$$

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} ; x + 2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} - 1 \neq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x \geq -2 \text{ et } x \neq -1 \}$$

$$= [-2, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \frac{-(\sqrt{x+2} - 1)'}{(\sqrt{x+2} - 1)^2} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x+2} - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in D_f : f'(x) < 0}$$

Voici les limites aux bornes :

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = f(-2) = \boxed{-1}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 1^- \\ t = \sqrt{x+2}}} \left(\frac{1}{t - 1} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^- \\ u = t - 1}} \left(\frac{1}{u} \right) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} - 1} \right) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 1^+ \\ t = \sqrt{x+2}}} \left(\frac{1}{t - 1} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u = t - 1}} \left(\frac{1}{u} \right) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} - 1} \right) = \boxed{0^+}$$

Voici le tableau de variations de f :

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-1	$+\infty$	0^+

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x^2 + 2x + 1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; (x + 1)^2 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x \neq -1\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$=]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$\blacksquare f'(x)$$

$$= \frac{(2x - 3)(x^2 + 2x + 1) - (2x + 2)(x^2 - 3x + 2)}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{(2x - 3)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x^2 - 3x + 2)}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{(x + 1)((2x - 3)(x + 1) - 2(x^2 - 3x + 2))}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{(x + 1)(5x - 7)}{(x + 1)^4}$$

$$\Rightarrow \text{signe}(f'(x)) \equiv \text{signe}((x + 1)(5x - 7))$$

Calculons les limites aux bornes :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} \right) = \boxed{1}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)^2} \right)$$

$$= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x^2 - 3x + 2) \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{(x + 1)^2} \right)$$

$$= 6 \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = (x+1)^2}} \frac{1}{t} \right) = 6 \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)^2} \right)$$

$$= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x^2 - 3x + 2) \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{(x + 1)^2} \right)$$

$$= 6 \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = (x+1)^2}} \frac{1}{t} \right) = 6 \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

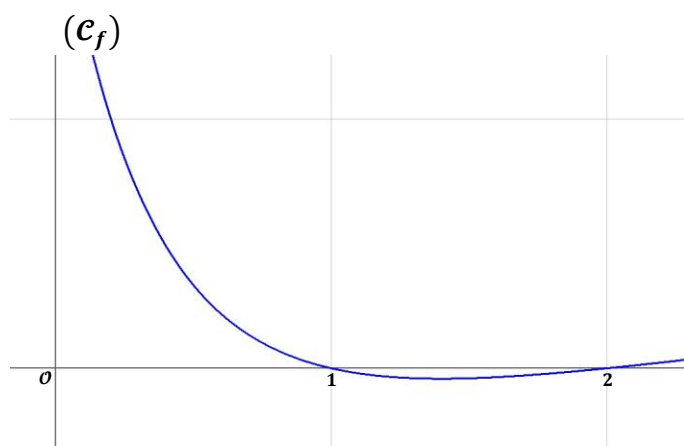
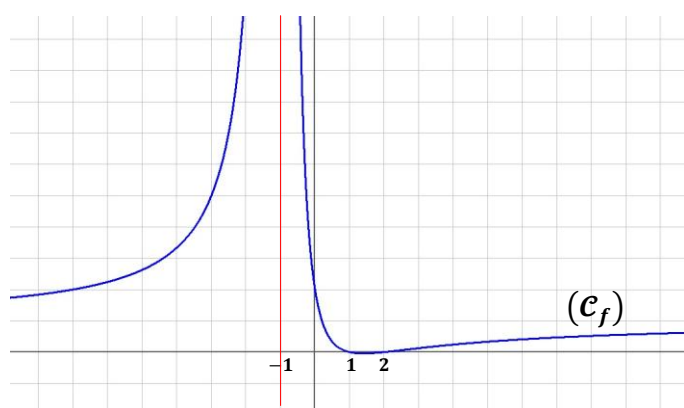
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \boxed{1}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$7/5$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	1	$+\infty$	$f\left(\frac{7}{5}\right)$	1

Voici la représentation graphique :



$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0 \text{ et } x \neq 1\}$$

$$= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= \frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{2x} - 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1-2x}{2x} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} \left(\frac{-x-1}{2x} \right) \\ &= \frac{-\sqrt{x}}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x+1)}{2x} < 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles du domaine de définition.

Voici les limites aux bornes :

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = \frac{\sqrt{0}}{0-1} = \boxed{0}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \\ &= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{x} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} \right) \\ &= \sqrt{1} \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^- \\ t = x-1}} \frac{1}{t} \right) = 1 \times (-\infty) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

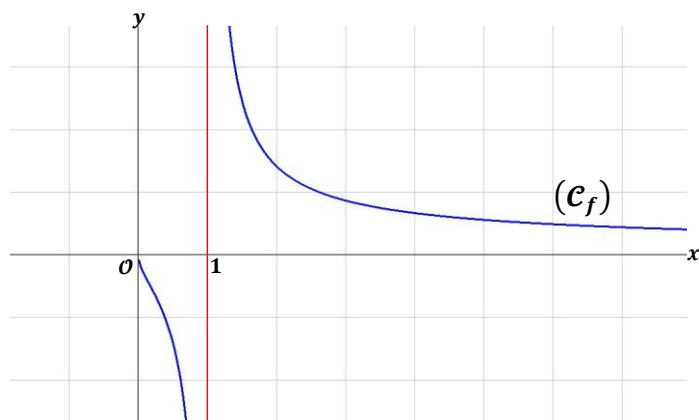
$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \\ &= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x} \right) \times \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} \right) \\ &= \sqrt{1} \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x-1}} \frac{1}{t} \right) = 1 \times (+\infty) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) \\
 &= (0^+) \times \left(\frac{1}{1-0} \right) = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

Voici le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	0	$-\infty$	0

Voici la représentation graphique :



Solution N° 97 :

1) On a f est une fonction continue sur l'intervalle $]0,1[$ car c'est un produit bien défini de deux fonctions continues sur $]0,1[$ et encore f est dérivable sur $]0,1[$ comme étant quotient bien défini de

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Deux fonctions dérivables. Et on a :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin(n\pi) = 0 \\ f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sin((n+1)\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \begin{cases} f \text{ est continue sur } \left] \frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n} \right[\subset]0,1[\\ f \text{ est dérivable sur } \left] \frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n} \right[\subset]0,1[\\ f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de Rolle :

$$\exists c_n \in \left] \frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n} \right[: f'(c_n) = 0$$

2) On a pu montrer d'après la 1^{ère} question que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solution $c_n \in \left] \frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n} \right[; n \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right)' = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \cdot \left(\sin\frac{\pi}{x} \right)' = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \cdot \left(\frac{-\pi}{x^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\pi}{x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{\pi}{x}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = t ; \text{ avec } t = \frac{\pi}{x} \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \tan t = t$$

Cette dernière équation admet une infinité de solutions dans \mathbb{R} puisqu'elle est équivalente à $f'(x) = 0$ qui à son tour admet aussi une infinité de solutions dans l'ensemble \mathbb{R} .

Solution N° 98 :

$$1) f(x) = \cos(2x) ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

La fonction f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions dérivables :

$$f'(x) = -2 \sin(2x) ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\blacksquare x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin(2x) \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq -2 \sin(2x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \searrow \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

strictement = garde le même sens \searrow

$$\Rightarrow f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \text{ bijective}$$

$$\Rightarrow f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] \text{ bijective}$$

$$\Rightarrow f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto]-1; 1[\text{ bijective}$$

2) Comme f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme f' ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car $-2 \sin(2x) \neq 0 ; \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1; 1[$ et on a :

$$\blacksquare (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{-2 \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

3) Soit $x \in]-1; 1[$ et on procède ainsi :

$$\blacksquare (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Comme $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto]-1; 1[$ bijective

Alors d'après la définition d'une bijection

$$(\forall y \in]-1; 1[) \left(\exists ! x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+1}{2} = \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{y+1}{2}} \in]0, 1[$$

$$\Leftrightarrow x = \text{Arccos} \sqrt{\frac{y+1}{2}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \text{Arccos} \sqrt{\frac{y+1}{2}} ; \quad \forall y \in]-1; 1[$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
 &= \frac{1}{f' \left(\text{Arccos} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right)} \\
 &= \frac{1}{-2 \sin \left(2 \text{Arccos} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right)} \\
 &= \frac{1}{-2 \cdot 2 \sin \left(\text{Arccos} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right) \cdot \cos \left(\text{Arccos} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right)} \\
 &= \frac{1}{-4 \sqrt{1 - \cos^2 \left(\text{Arccos} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right)} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{-4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2} \right)} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{-4 \cdot \sqrt{\left(\frac{1-x}{2} \right) \left(\frac{x+1}{2} \right)}} \\
 &= \frac{1}{-4 \sqrt{\frac{1-x^2}{4}}} = \frac{1}{\frac{-4}{2} \sqrt{1-x^2}} \\
 &= \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}}
 \end{aligned}$$

Voici une 2^{ème} Méthode :

$$\text{On a } \forall x \in]-1, 1[; f^{-1}(x) = \text{Arccos} \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

Donc on dérive directement cette fonction en s'aidant des formules classiques de dérivation on trouve :

$$\begin{aligned}
 \blacksquare (f^{-1})'(x) &= \frac{- \left(\sqrt{\frac{x+1}{2}} \right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2} \right)}} \\
 &= \frac{- \left(\frac{x+1}{2} \right)'}{2 \sqrt{\frac{x+1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x+1}{2}}} \\
 &= \frac{\frac{-1}{2}}{2 \sqrt{\frac{x+1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}}
 \end{aligned}$$

Solution N° 99 :

$$1) f(x) = \sqrt{2-x} - x ; \forall x \in]-\infty, 2]$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare f'(x) &= \frac{(2-x)'}{2\sqrt{2-x}} - 1 = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - 1 \\
 &= \frac{-(1+2\sqrt{2-x})}{2\sqrt{2-x}} < 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 ; \forall x \leq 2$$

C'est-à-dire que f est strictement \searrow sur l'intervalle $]-\infty, 2]$ et comme f est continue sur $]-\infty, 2]$ alors f réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur son image :

$$f(]-\infty, 2]) = [f(2); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-2, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2-x} - x) \\
 &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = -x}} (\sqrt{2+t} + t) = \boxed{+\infty}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f :]-\infty, 2] \mapsto [-2, +\infty[\text{ bijective}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Comme f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ car c'est la somme de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]-\infty, 2[$. Et comme f' ne s'annule pas sur $]-\infty, 2[$ car :

$$\blacksquare 2\sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow 1 + 2\sqrt{2-x} \geq 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(1 + 2\sqrt{2-x})}{2\sqrt{2-x}} \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \neq 0 ; \forall x \leq 2$$

Alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(]-\infty, 2[) =]-2, +\infty[$ et en plus on a :

$$\forall x > 2 ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$3) (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{-\left(\frac{1 + 2\sqrt{2-1}}{2\sqrt{2-1}}\right)} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$

4) comme f est une bijection Alors :

$$(\forall y \in]-2, +\infty[) (\exists ! x \in]-\infty, 2[) : f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} - x = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = y + x$$

$$\Leftrightarrow 2 - x = y^2 + x^2 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2y + 1)x + (y^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(2y + 1) \pm \sqrt{4y + 9}}{2}$$

Pour savoir laquelle des expressions de x est vraie on prend un point trivial par exemple $f(1) = 0$ On remplace y par 0 dans chacune des expressions de x et on se rend compte de l'expression exacte de x en fonction de y .

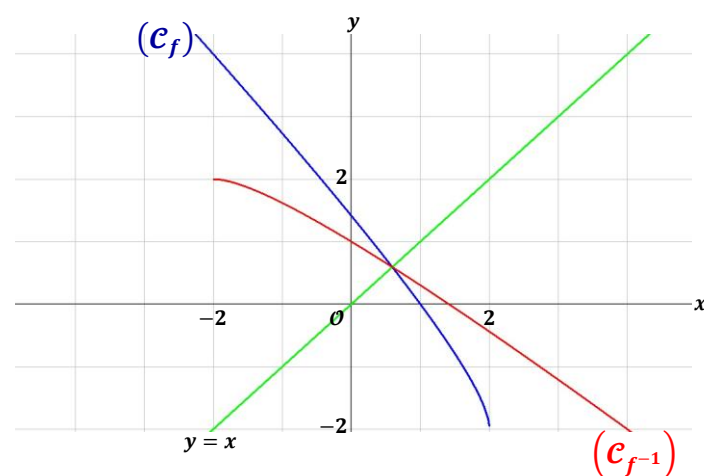
$$c'est : x = \frac{-(2y + 1) + \sqrt{4y + 9}}{2}$$

Donc on déduit les définition suivantes :

$$f :]-\infty, 2[\mapsto]-2, +\infty[\\ x \mapsto \sqrt{2-x} - x$$

$$f^{-1} :]-2, +\infty[\mapsto]-\infty, 2[\\ x \mapsto \frac{-(2x + 1) + \sqrt{4x + 9}}{2}$$

5) voici la représentation graphique :



Solution N° 100 :

$$1) f(x) = x^4 - 4x ; D_f = \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

$$= 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow \text{Signe}(f'(x)) \equiv \text{signe}(x - 1)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad ; \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \text{signe}(f'(x)) \equiv \text{signe}(x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\blacksquare \text{On a : } x^2 + 1 > x^2 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ est strictement \searrow sur \mathbb{R}

Voici les limites aux bornes $-\infty$ et $+\infty$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$= (+\infty) - (-\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+ = \boxed{0}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0^+

$$3) f(x) = \text{Arctan}(x - 2\sqrt{x}) \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$\blacksquare f'(x) = (x - 2\sqrt{x})' \cdot \left(\frac{1}{1 + (x - 2\sqrt{x})^2} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \times \left(\frac{1}{1 + (x - 2\sqrt{x})^2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Signe}(f'(x)) \equiv \text{Signe}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Voici les limites aux bornes 0^+ et $+\infty$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \text{Arctan} 0 = \boxed{0}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x - 2\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}\left(x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}} \text{Arctan} t = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Voici le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(1)$	$\pi/2$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 6x)$$

$$= \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 8)^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Signe}(f'(x)) \equiv \text{Signe}(x(x-2))$$

Voici les limites aux bornes :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8} = \boxed{-\infty}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8} = \boxed{+\infty}$$

Voici le tableau de variations de f :

Solution N° 101 :

$$1) f(x) = \text{Arctan}\sqrt{x+1}$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x+1 \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$\blacksquare f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{1+(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1} \cdot (x+1)} > 0 \quad ; \quad \forall x > -1$$

Voici les limites aux bornes :

$$\blacksquare \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1) = \text{Arctan} 0 = \boxed{0}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}\sqrt{x+1}$$

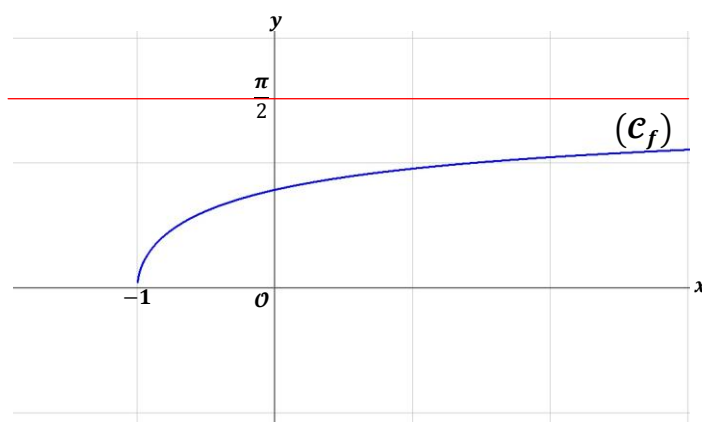
$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \sqrt{x+1}}} \text{Arctan} t = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Voici le tableau de variation de f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{\pi}{2}$

Voici la représentation graphique :



$$2) f(x) = \sqrt[3]{1-x} - 1 = (1-x)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$\blacksquare D_f = \{x \in \mathbb{R} ; (1-x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(-1) = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f \text{ est strictement } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

Voici les limites aux bornes :

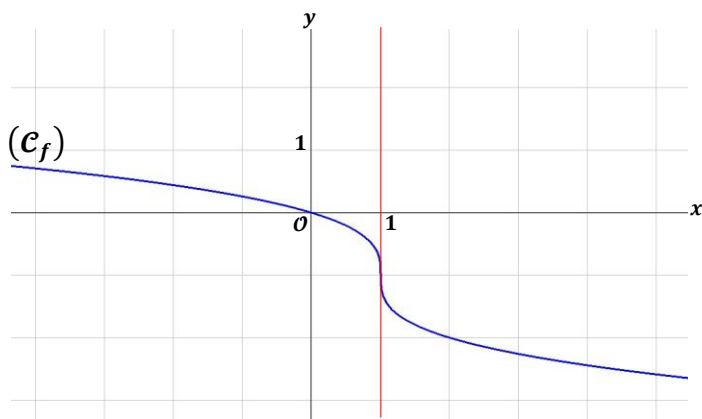
$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x} - 1) = \boxed{+\infty}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1-x} - 1) = \boxed{-\infty}$$

Voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Voici la représentation graphique :



3) $f(x) = \text{Arctan}(2x) - x$; $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \blacksquare f'(x) &= (2x)' \cdot \left(\frac{1}{1+4x^2} \right) - 1 \\ &= \frac{2}{1+4x^2} - 1 = \frac{1-4x^2}{1+4x^2} \\ &= \frac{(1-2x)(1+2x)}{1+4x^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Signe}(f'(x)) \equiv \text{Signe}((1-2x)(1+2x))$$

Voici les limites aux bornes :

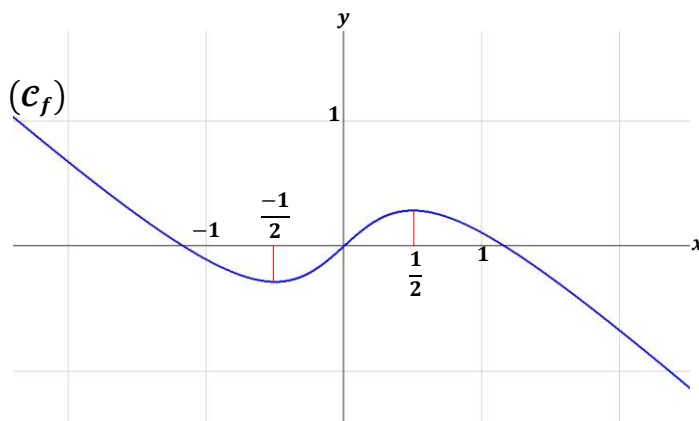
$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{Arctan}(2x) - x) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Arctan } t \right) - \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x \right) \\ &= \frac{-\pi}{2} - (-\infty) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Arctan}(2x) - x) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan } t \right) - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - (+\infty) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

Voici la représentation graphique de f :



You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

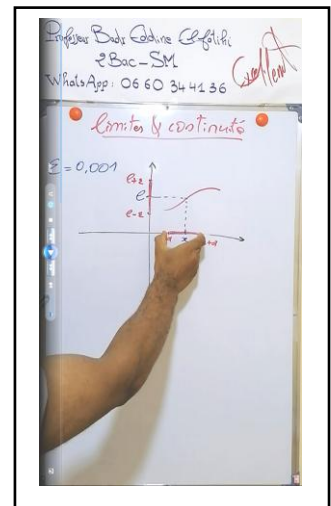
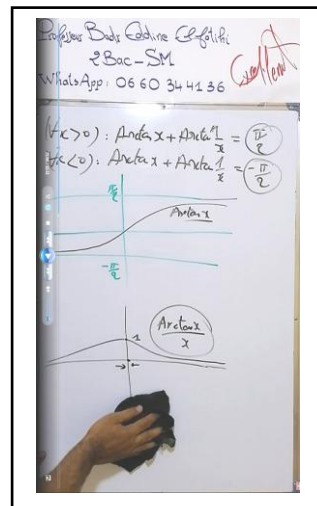
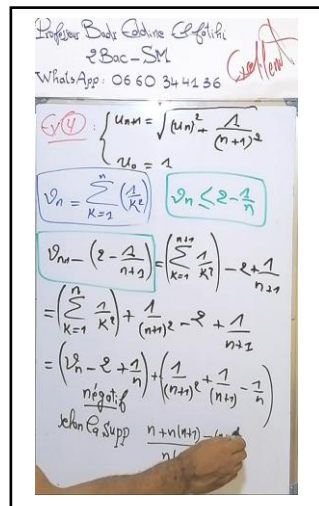
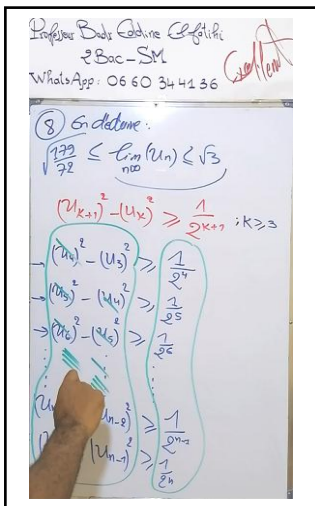
عروض السنة الدراسية : 2023/2022

عرض الدروس :

- 12 ساعة فيديوهات لشرح كل درس بالتفاصيل و بعض التمارين المحلولة
- يرسل كل درس في بطاقة ذاكرة من فئة 32Go أو 64Go
- بإمكانكم اقتناء فقط الدروس التي تمثل عائق في البرنامج
- بإمكان التلاميذ المترشحون الأحرار و الرسميون الاستفادة من العرض
- ينصح بمشاهدة كل حصة مرتين على الأقل لضبط المفاهيم جيدا

عرض الامتحانات التجريبية المصححة :

- يتكون من 12 امتحان تجريبي متوسط الصعوبة كلها مصححة بالتفاصيل
- يرسل العرض في بطاقة ذاكرة من فئة 64Go (12 امتحان في بطاقة واحدة)
- الشروحات صالحة للتحضير للمباريات الوطنية (20 ساعة شرح تقريبا)
- الإرسال يتم عبر البريد (خدمة أمانة المغرب)



Radio - SM

12/07/2022

Vous avez changé l'icône de ce grou...

Groupe WhatsApp pour discussions

2BAC SM : Biof 2022/2023

leçon	support	Durée	Prix
Limites et continuité	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Suites numériques	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Dérivation, étude de fonctions	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Logarithme népérien	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
L'exponentielle	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Le calcul d'intégrales	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Nombres complexes	Carte mémoire 64Go	14h cours et exercices	300 DH
Arithmétiques	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Structures algébriques	Carte mémoire 64Go	14h cours et exercices	300 DH
Équations différentielles	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
Calcul de probabilités	Carte mémoire 32Go	12h cours et exercices	300 DH
12 Examens Blancs Corrigés	Carte mémoire 64Go	20h Examens corrigés	500 DH

التوصيل سوف يتم عن طريق خدمة AMANA للإرساليات (بريد المغرب)



SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2022-2023

Tome 4 : Fonctions Logarithmes

- **Calculs de base sur les logarithmes**
- **Limites des fonctions logarithmes**
- **Dérivation des fonctions logarithmes**
- **Détermination de primitives des logarithmes**
- **Étude des fonctions logarithmes**
- **Fonction logarithme de base a**
- **La représentation graphique des logarithmes**
- **Les limites usuelles des logarithmes**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2023

Pour le 2^{ème} Semestre

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Badr Eddine EL FATIHI', written over a horizontal line.



SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2022-2023

Tome 5 : Fonctions Exponentielles

- **Calculs de base sur des exponentielles**
- **Limites des fonctions exponentielles**
- **Dérivation des fonctions exponentielles**
- **Détermination de primitives**
- **Étude des fonctions exponentielles**
- **Liens entres logarithmes et exponentielles**
- **La représentation graphique des exponentielles**
- **Les limites usuelles des exponentielles**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2023

Pour le 1^{er} Semestre

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Badr Eddine EL FATIHI', written over a large, stylized flourish.



SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2022-2023

Tome 6 : Calcul Intégral

- **Intégrale d'une fonction continue**
- **Propriétés fondamentales de l'intégrale**
- **Passages intégration - dérivation**
- **L'interprétation géométrique de l'intégrale**
- **Intégration par parties**
- **Intégration par changement de variable**
- **Intégration et ordre – valeur moyenne**
- **Sommes de Riemann**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2023

Pour le 2^{ème} Semestre



SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2022-2023

Tome 7 : Équations Différentielles

- **Équations Différentielles du premier ordre**
- **Équations Différentielles du second ordre**
- **Technique et astuces de résolution**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2022

Pour le 2^{ème} Semestre

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Badr Eddine EL FATIHI'.