Prof. : M. TEHUA
Tel. : 0546234613

ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 7.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{-3}{x^2+1}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Etudier la parité de f et de g.

Exercice 7.2

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{5}{3} + \dfrac{31}{3(3x-2)}$

On note (Cf) la courbe représentative de f.

Démontrer que le point $A(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3})$ est centre de symétrie de (Cf).

Exercice 7.3

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2}{x^2-2x}$

On note (Cf) la courbe représentative de f.

Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie à (Cf).

Problème 7.4

1. Soit le polynôme g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   a) Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
   c) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Justifier que $2{,}1 < \alpha < 2{,}11$.
   d) En déduire que $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

2. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ et (Cf) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 1cm.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$, $f'(x) = g(x) \times h(x)$ où h est une fonction à préciser.
   b) En déduire les variations de f.
   c) Etudier les limites de f aux bornes de D_f ; puis interpréter graphiquement (si possible) chacun des résultats obtenus.
   d) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + \dfrac{bx+c}{x^2-1}$

b) En déduire que (Cf) admet en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation.

c) Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ).

5. Montrer que f(α) = 3α.

6. a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]- ∞ ; -1[une solution unique β.

b) Déterminer un encadrement de β d'amplitude 0,1.

c) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

7. Tracer (Cf), (Δ) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé (O, I, J).

Problème 7.5

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie x par $f(x) = -x + \sqrt{x^2-9}$.

(Cf) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 1cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de Df puis en déduire que (Cf) admet une asymptote que l'on précisera.

2. Etudier la dérivabilité de f en -3 et en 3 puis interpréter graphiquement les résultats.

3. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = -2x est asymptote à (Cf) en - ∞.

b) Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ).

4. On admet que f est dérivable sur]- ∞ ; -3[∪] 3 ; + ∞[, vérifier que :

$$\forall x \in]-\infty ; -3[\cup] 3 ; +\infty[, f'(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}.$$

5. a) Montrer que $x \in]-\infty ; -3[$, x - $\sqrt{x^2-9} \leq 0$.

b) Montrer que $x \in] 3 ; +\infty[$, x - $\sqrt{x^2-9} \geq 0$.

c) En déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

6. Tracer (Cf) et (Δ).

Problème 7.6

Soit f la fonction dérivable et définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$, par $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$.

On note (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

Unité graphique : 2 cm.

1. a) Pour tout x de D_f donner l'écriture de $f(x)$ sans valeur absolue.

b) Etudier les limites de f aux bornes des intervalles de D_f. Eventuellement, on donnera une interprétation graphique de chacune de ces limites.

2. a) Exprimer f'(x) et étudier le signe de f'(x) sur chacun des intervalles de D_f.

b) En déduire le sens de variation de f dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que, (Cf) coupe l'axe (OI) exactement en deux points distincts d'abscisses α et β. $\alpha < \beta$.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α puis de β.

c) En déduire le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

4. a) Vérifier que les droites (Δ_1) : y = x + 1 et (Δ_2) : y = -x - 1 sont asymptotes obliques à (Cf) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ_1) sur]-∞ ; -1[.

c) Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ_2) sur] -1 ; 1[∪]1 ; -∞ [.

5. Trouver une équation de la tangente (T) à (Cf) au point A d'abscisse 0.

6. Tracer (Cf), ses asymptotes et la tangente (T).

Exercice 7.10

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ, définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$. On note (𝒞f) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 2 cm.

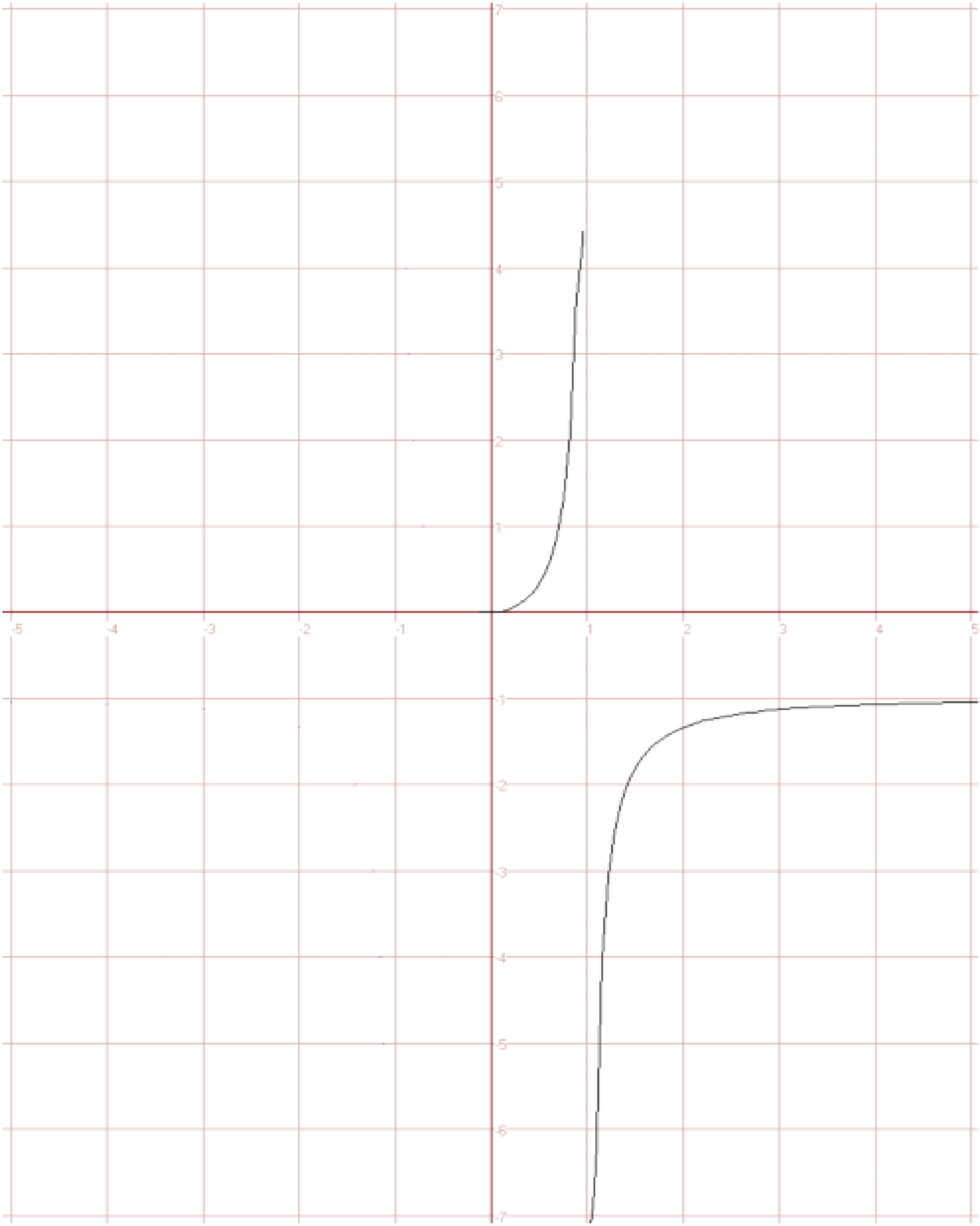
1. Justifier que l'ensemble de définition Df de f est égal à ℝ\{-1 ; 1}.
2. Etudier la parité de f. en déduire un élément de Symétrie de (𝒞f).
3. Calculer les limites de f aux bornes de Df puis donner une interprétation graphique de chacun des résultat obtenus
4. a)Pour tout x de Df, calculer f'(x).
   b) Etudier le signe de f' puis donner le sens de variation de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (𝒞f) en son point d'abscisse 2.
6. Soit h la restriction de f à]1 ; +∞ [.
   a) Justifier que h réalise une bijection de]1 ; +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) h^{-1} est la bijection réciproque de h.
   donner le sens de variation de h^{-1} et établir son tableau de variation.
   c) Vérifier que $f(2) = -\dfrac{4}{3}$. Justifier que h^{-1} est dérivable en $-\dfrac{4}{3}$ puis calculer $h^{-1})'(-\dfrac{4}{3})$.
7. La feuille annexe représente f sur représente [0 ; + ∞ [.
   Achever la construction de f. Puis construire la représentation graphique ($\mathcal{C}h^{-1}$) de h^{-1} sur le même graphique.

Exercice 7.11

Soit f la fonction numérique de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$ et (𝒞f) désigne la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2. Calculer les limites de f en + ∞ et en - ∞.
3. Etudier la limite de f en -1. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5. a) Montrer qu'il existe une fonction g et deux nombres réels a et b tels que f(x) = ax + b + g(x).
   b) En déduire que (𝒞f) admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation.
   c) Etudier la position relative de (𝒞f) et de (D).
6. Construire (𝒞f).

Feuille annexe de l'exercice 6.10



Exercice 7.12

Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ et $(\mathscr{C}f)$ désigne la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2. Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Etudier la dérivabilité de f en -1. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
4. Déterminer la limite de f(x) puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ en . Interpréter graphiquement le résultat.
5. a) On admet que f est dérivable sur $]-1 ; 0[$ et sur $]1 ; +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
   b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
6. Soit h la restriction de f à $[0 ; +\infty[$.
   a) Justifier que h réalise une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) h^{-1} est la bijection réciproque de h.
   Donner le sens de variation de h^{-1} et établir son tableau de variation.
7. Tracer $(\mathscr{C}f)$ et la courbe $(\mathscr{C}h^{-1})$ de h^{-1} sur le même graphique

Exercice 7.13

On donne le tableau de variation d'une fonction f et on désigne par $(\mathscr{C}f)$ sa courbe représentative.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			‖				‖		
$f(x)$	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

Par lecture du tableau de variation :

1. Déterminer Df
2. a) Justifier que $(\mathscr{C}f)$ admet deux asymptotes horizontales que l'on précisera.
   b) Justifier que $(\mathscr{C}f)$ admet deux asymptotes verticales que l'on précisera.
3. Recopier puis compléter le tableau.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]1 ; +\infty[$.
5. Déterminer le signe de f.
6. Tracer une allure de la courbe $(\mathscr{C}f)$ dans le repère (O, I, J).