

EL HAJJAJI MATHS

- EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT
- EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT
- LES METHODES PAS A PAS
- CORRIGES DETAILLES ET EXPLIQUES

MENARA REGGADA OULED JERRAR TIZNIT

 2^{EME} ANNEE BACCALAUREAT
SCIENCES EXPERIMENTALES (PC. SVT. ...)

3

TOME 1

LIMITE D'UNE SUITE
NUMÉRIQUE

Écrit et réalisé par : Prof. **EL BACHIR EL HAJJAJI**

نسألكم الدعاء

الأستاذ: البشير الحجاجي

استاذ التعليم الثانوي الشاهيبي
بشكافية المسيرة الخضراء الشاهيبي
المديرية الإقليمية تيزنيت.



شُكْرٌ خَاصٌّ

الشُّكْرُ الْمَوْضُوعُ لِكُلِّ مَنْ:

الأستاذ: إبراهيم الحجاجي، أخي الأكبر
وصاحب الفضل الكبير

السيد: إبراهيم إضرصار، المدير الاقليمي
بالمديرية الإقليمية تيزنيت، على دعمه
المتواصل

السيد: حسن بوليد، مفتش مادة الرياضيات
بالمديرية الإقليمية تيزنيت

فَسَلِّمُوا عَلَى السَّلَامَةِ

مقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على مولانا رسول الله .
 تزامناً مع بداية الدخول المدرسي 2020-2021، والذي
 يتيسر بظروفي خاصة، أهدي لتلاميذ السنة
 الثانية بكالوريا علوم تجريبية، بجميع مسالكها
 هذا العمل المتواضع الذي يحتوي على تمارين
 محلولة، وكذا تمارين للبحث. راجياً من
 العلي القدير أن لا ننسونا من خالص دعائكم

يخطب البشير الحجاجي
 استاذ مادة الرياضيات
 الثانوية التأهيلية المسيرة الخضراء
 المديرية الإقليمية تيزنيت

نسألكم الدعاء

EXERCICE 1

Déterminer dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n)

① $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{3n^2 - 1}{2n - 3}$

② $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{5n^2 - n - 1}{n^2 + n - 1}$

③ $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{3n - 1}{2n^2 - 3}$

CORRECTION

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 1}{2n - 3}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{2n}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}n$
 $= +\infty$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 - n - 1}{n^2 + n - 1}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2}{n^2}$
 $= 5$

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 1}{2n^2 - 3}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n}$
 $= 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n x^n}{b_m x^m}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{b_m} x^{n-m} = \infty \quad \text{si } n > m$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{b_m x^{m-n}} = 0 \quad \text{si } m > n$$

$$= \frac{\alpha_n}{b_m} \quad \text{si } m = n$$

EXERCICE 2

Déterminer dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n)

① $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{n+1}{3\sqrt{n}+2}$

② $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{3n-1}$

CORRECTION

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3\sqrt{n}+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}(3 + \frac{2}{\sqrt{n}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}} = +\infty$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}}$$

$$= +\infty$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{3n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n(2 + \frac{1}{n})}}{\sqrt{n}(3\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{n}(3\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{(3\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})}$$

$$= 0$$

Si on remplace, on va trouver la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
 Dans ce cas, et la plupart du temps il faut factoriser

EXERCICE 3

Déterminer dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n)

$$\textcircled{1} (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{\sqrt{n^2+n-1}}{\sqrt{n^2-n+1}} \quad \textcircled{2} (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

CORRECTION

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n-1}}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})}}{\sqrt{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}{n \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

$$= 1$$

Si on remplace, on va trouver la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
 Dans ce cas, et la plupart du temps il faut factoriser

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 - n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$
 Et puisque $\sqrt{n+1} = \sqrt{n}$
 Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

EXERCICE 4

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_n = 3n + \cos(n)$

① Montrer que : $|u_n - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

② En déduire $\lim u_n$

CORRECTION

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } u_n - \frac{3}{2} &= \frac{3n + \cos(n)}{2n} - \frac{3}{2} \\
 &= \frac{2(3n + \cos(n)) - 3 \cdot 2n}{2n} \\
 &= \frac{6n + 2\cos(n) - 6n}{2n} \\
 &= \frac{\cos(n)}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } |u_n - \frac{3}{2}| &= \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| \\
 &= \frac{|\cos(n)|}{|n|} \\
 &= \frac{|\cos(n)|}{n}
 \end{aligned}$$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); |\cos(n)| \leq 1$

On multiplie les deux membres par le nombre strictement positif $\frac{1}{n}$

On sait que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |\cos(n)| \leq 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{|\cos(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$

D'où : $|u_n - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

② Déduisons $\lim u_n$

D'après le résultat de la question précédente,

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{|\cos(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$

Et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Alors, d'après les critères de convergence

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{3}{2}$$

EXERCICE 5

Soit (u_n) la suite numérique définie par:

$$u_n = 3(-1)^n + \sin(n) + n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n - 3$

2. En déduire la limite de la suite (u_n)

CORRECTION

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

On sait que: $(-1)^n \geq -1$

Donc: $3(-1)^n \geq -3$

Et on sait que: $\sin(n) \geq -1$

Donc: $3(-1)^n + \sin(n) \geq -4$

Et par suite:

$$3(-1)^n + \sin(n) + n + 1 \geq -4 + n + 1$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n - 3$

2. D'après le résultat de la question précédente

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n - 3$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3 = +\infty$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1; \\ -1; \end{cases}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

Toujours, pour les limites de $n \mapsto (-1)^n, n \mapsto \cos n$ et $n \mapsto \sin n$, il faut utiliser l'encadrement, puis appliquer les théorèmes concernant les limites et l'ordre

EXERCICE 6

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par: $u_n = \frac{n}{n^2 - \sin(n)}$

1. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \frac{n}{n^2+1} < u_n < \frac{n}{n^2-1}$

2. En déduire $\lim u_n$

CORRECTION

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \frac{n}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On sait que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); -1 \leq \sin(n) \leq 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); -1 \leq -\sin(n) \leq 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); n^2-1 \leq n^2-\sin(n) \leq n^2+1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2-\sin(n)} \leq \frac{1}{n^2-1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2-\sin(n)} \leq \frac{n}{n^2-1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \frac{n}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2-1}$

2) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \frac{n}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2-1}$

Et : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$

Donc, d'après les critères de convergence (Théorème de gendarme)

on aura : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 7

Déterminer dans chacun des cas suivants, la limite de la suite (u_n) :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 3^n - 1$ 2) $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n$

CORRECTION

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 1) = +\infty$ car $3 > 1$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\right) = 0 + 3 = 3$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5\left(\frac{3}{4}\right)^n = 5 \times 0 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{si } q > 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \text{N'existe pas,} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

EXERCICE 8

Déterminer dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n)

① $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \frac{3^n - 2^n}{5^n - 2^n}$ ② $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{4^n - 3^{n+1}}{3^{n+2} - 2^n}$

③ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{4}}$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \text{① } \sim \lim u_n &= \lim \frac{3^n - 2^n}{5^n - 2^n} \\ &= \lim \frac{3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{5^n \left(1 - \frac{2^n}{5^n}\right)} \\ &= \lim \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} \\ &= 0 \times \frac{1}{1} \\ &= 0 \quad \text{car } \frac{3}{5} < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } \sim \lim u_n &= \lim \frac{4^n - 3^{n+1}}{3^{n+2} - 2^n} \\ &= \lim \frac{4^n \left(1 - \frac{3^{n+1}}{4^n}\right)}{3^n \left(3^2 - \frac{2^n}{3^n}\right)} \\ &= \lim \frac{4^n}{3^n} \times \frac{1 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n}{9 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \lim \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{1 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n}{9 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③ } \sim \lim u_n &= \lim n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{4}} \\ &= \lim n^{\frac{8}{12}} - n^{\frac{3}{12}} \\ &= \lim \left(n^{\frac{1}{12}}\right)^8 - \left(n^{\frac{1}{12}}\right)^3 \\ &= \lim \left(n^{\frac{1}{12}}\right)^3 \left(\left(n^{\frac{1}{12}}\right)^5 - 1\right) \end{aligned}$$

Ici, si on remplace n par $+\infty$, on aura:

• Au numérateur la forme $+\infty - \infty$

• Au dénominateur la forme $+\infty - \infty$

Mais, au numérateur, 3^n est le plus puissant, et au dénominateur, 5^n est le puissant

Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur par 3^n et le dénominateur par 5^n

Ici, ça sera mieux de mettre les exposants de $n^{\frac{2}{3}}$ et $n^{\frac{1}{4}}$ au même dénominateur

• Le dénominateur commun de $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$ est 12

Donc

, puis on factorise par $n^{\frac{3}{12}}$ ou bien par $n^{\frac{8}{12}}$ le plus puissant

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{n^3} (\sqrt[12]{n^5} - 1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{n} (\sqrt[12]{n^5} - 1)$$

EXERCICE 9

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Première partie

1. Sur un même graphique, tracer les deux droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$
2. Déterminer graphiquement u_1, u_2 et u_3
3. Déterminer par le calcul u_1, u_2 et u_3
Les résultats sont-ils cohérents ?
4. Conjecturer le sens de variation de (u_n)
5. Conjecturer la limite de (u_n)

Deuxième partie

Démonstration des conjectures

1. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que (u_n) est une suite croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 6$
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et calculer son premier terme.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n
 - c. Calculer $\lim u_n$
4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

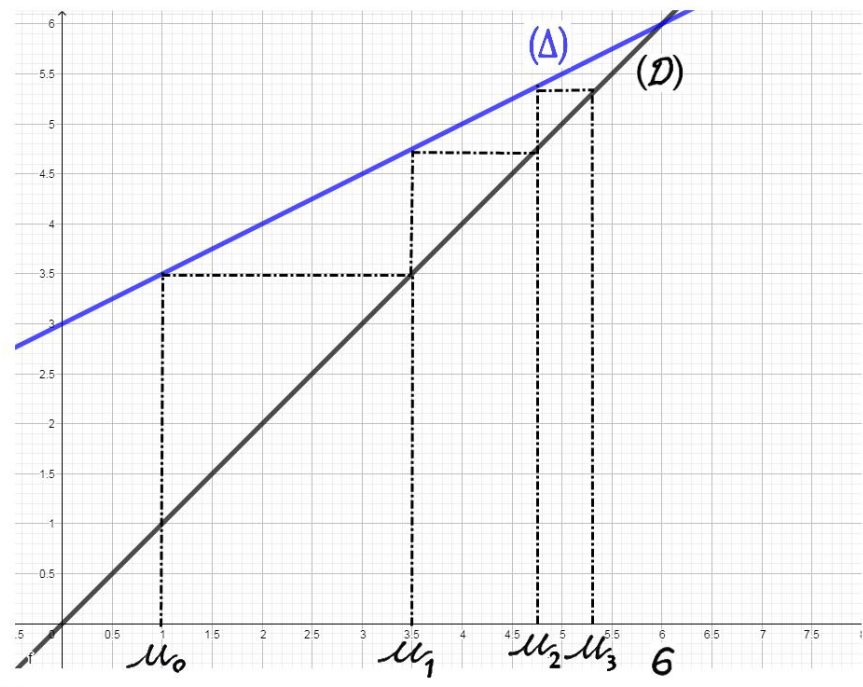
et $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

 - a. Déterminer S'_n en fonction de n
 - b. En déduire que $S_n = 6n - 4 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c. Calculer $\lim S_n$

CORRECTION

① Représentation des deux droite :

- ✎ La droite (D): $y=x$ passe par O (0;0) et A (1;1)
- ✎ La droite (Δ): $y=\frac{1}{2}x+3$ passe par B (0;3) et C(2;4)



Remarque

- ✎ (D) et (Δ) se coupent au point E(6;6)
- ✎ $x=6$ est la solution de l'équation $\frac{1}{2}x+3=x$
- ✎ $x=6$ est appelé le point fixe
- ✎ Si (u_n) est convergente, alors sa limite forcément vaut 6.

② Graphiquement, on trouve: $u_1 \approx 3,5$, $u_2 \approx 4,75$ et $u_3 \approx 5,3$

③ Par le calcul on a:

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{1}{2} + 3 = 3,5$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 3 = \frac{3,5}{2} + 3 = \frac{9,5}{2} = 4,75$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 3 = \frac{4,75}{2} + 3 = \frac{10,75}{2} = 5,375$$

$u_1 = 3,5$

$u_2 = 4,75$

$u_3 = 5,375$

On trouve presque les mêmes résultats

④ On a: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

Donc (u_n) est une suite croissante.

Remarque

Remarquer bien que le premier terme u_0 joue un rôle fondamental de la monotonie de (u_n)

5. D'après le graphe, et si on continue à calculer $u_4, u_5; \dots$ (u_n) semble converger vers 6

Deuxième partie

1. Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 6$

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = 1$

Donc $1 \leq u_0 \leq 6$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

On prend $n=0$, car la première valeur de n est 0 d'après l'énoncé.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 \leq u_n \leq 6$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

On a: $1 \leq u_n \leq 6$

d'après la supposition

$$\text{Donc: } 1 \leq u_n < 6 \Rightarrow 1 \times \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} u_n < 6 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} u_n < 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 3 \leq \frac{1}{2} u_n + 3 < 3 + 3$$

$$\Rightarrow 3,5 \leq u_{n+1} < 6$$

Et on a: $1 \leq 3,5$

Donc on aura: $1 \leq u_{n+1} < 6$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 6$

2. La monotonie de (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n + 3 - u_n$$

$$= -\frac{1}{2} u_n + 3$$

$$= -\frac{1}{2} (u_n + 3 \left(-\frac{2}{1}\right))$$

$$= -\frac{1}{2} (u_n - 6)$$

Puisque $1 \leq u_n \leq 6$

D'après le résultat de la question précédente

Ici, pour prouver que $1 \leq u_{n+1} \leq 6$ il suffit d'utiliser l'encadrement

Pour étudier la monotonie de (u_n) , dans notre cas, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le résultat de récurrence.

$$\frac{\alpha}{b} u_n + \frac{c}{d} = \frac{\alpha}{b} \left(u_n + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{\alpha} \right)$$

Alors $-\frac{1}{2} < 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 6$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 6 < 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}); -\frac{1}{2}(u_n - 6) > 0$

D'où (u_n) est croissante

👉 Déduisons que (u_n) est convergente.

Rappel

Toute suite croissante et majorée ($u_n \leq M$) est convergente

Puisque (u_n) est croissante et majorée par 6

Alors (u_n) est convergente

3) \rightarrow Montrons que (v_n) est une suite géométrique

On a : $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_{n+3} - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 3 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = u_0 - 6$$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

On a $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

🔺 Déterminons v_0

On a $v_n = u_n - 6$

Donc $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$

6. Exprimons v_n en fonction de n .

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

👉 Exprimons u_n en fonction de n

La raison q et le premier terme de (v_n) sont appelés: les éléments caractéristique de (v_n)

Si (v_n) est géométrique de raison q

Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

On prend v_p : le premier terme

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - 6$

Donc $u_n = v_n + 6$

Et on a : $v_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

c.v. Déterminons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-5 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6 \right)$$

car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$$S'_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= -5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -10 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= -10 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= -10 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où $S'_n = -10 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n - 6$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = v_n + 6$

Donc $u_0 = v_0 + 6$ ($n=0$)

$u_1 = v_1 + 6$ ($n=1$)

$u_2 = v_2 + 6$ ($n=2$)

$u_3 = v_3 + 6$ ($n=3$)

⋮ ⋮ ⋮

$u_n = v_n + 6$ jusqu'à n

$$S_n = S'_n + 6(n-0+1)$$

$$= S'_n + 6n + 6$$

Par somme membre à membre

Le nombre 6 se répète $(n-0+1)$ fois

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{si } q > 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \text{N'existe pas,} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

On pose $S' = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$
 Si (v_n) est une suite géométrique de raison q
 Alors $S' = v_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
 avec $n-p+1$ est le nombre des termes de S'

On a S est la somme des termes consécutifs de la suite (u_n)
 Mais (u_n) ni géométrique ni arithmétique.
 Donc et forcément, il faut demander l'aide à notre suite auxiliaire (v_n)

Et on a : $S'_n = -10 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $S_n = -10 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6n + 6$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = 6n - 4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

E_n Déterminons $\lim S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n - 4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n - 4 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 10 Type

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n + \frac{15}{28}; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a_n Calculer u_1 et u_2

E_n Conjecturer la monotonie de (u_n)

2) a_n Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{7}(u_n - \frac{3}{4})$

E_n Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < \frac{3}{4}$

3) a_n Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{5}{7}\left(\frac{3}{4} - u_n\right)$

E_n Montrer que (u_n) est une suite croissante et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n < \frac{3}{4}$

c_n En déduire que (u_n) est convergente.

4) a_n On pose : $v_n = 4u_n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a_n Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{7}$

E_n Calculer v_0 , puis écrire v_n en fonction de n .

c_n En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{7}\right)^n$

d_n Calculer $\lim u_n$

5) a_n On pose : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a_n Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S = \frac{3}{4}n - \frac{21}{20} + \frac{21}{20}\left(\frac{2}{7}\right)^n$

E_n Calculer $\lim S$.

CORRECTION

① $n \rightarrow \infty$ Calculons u_1 et u_2

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{2}{7} u_n + \frac{15}{28}$$

$$\text{Donc: } u_1 = \frac{2}{7} u_0 + \frac{15}{28} = \frac{15}{28}$$

$$\text{Et: } u_2 = \frac{2}{7} u_1 + \frac{15}{28} = \frac{2}{7} \cdot \frac{15}{28} + \frac{15}{28} = \frac{135}{196}$$

\hookrightarrow Conjecture de la monotonie de (u_n)

$$\text{On a: } u_0 < u_1 < u_2$$

Il semble que (u_n) est une suite croissante

② $n \rightarrow \infty$ Vérifions que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{7} (u_n - \frac{3}{4})$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{7} u_n + \frac{15}{28} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{7} u_n - \frac{6}{28}$$

$$= \frac{2}{7} u_n - \frac{3}{14}$$

$$= \frac{2}{7} (u_n - \frac{3}{14} \cdot \frac{7}{2})$$

$$= \frac{2}{7} (u_n - \frac{3}{4})$$

$$\text{D'où: } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{7} (u_n - \frac{3}{4})$$

\hookrightarrow Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < \frac{3}{4}$

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = 0$

$$\text{Donc } u_0 < \frac{3}{4}$$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n < \frac{3}{4}$ et montrons que: $u_{n+1} < \frac{3}{4}$

$$\text{On a: } u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{7} (u_n - \frac{3}{4})$$

Et puisque $\frac{2}{7} > 0$

$$\text{Et } u_n - \frac{3}{4} < 0 \quad (\text{car } u_n < \frac{3}{4} \text{ d'après la supposition})$$

$$\text{Alors } \frac{2}{7} (u_n - \frac{3}{4}) < 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \frac{3}{4} < 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} < \frac{3}{4}$$

Il suffit de remplacer n par 0 pour avoir u_1 , et par 1 pour avoir u_2

Il nous demandes de factoriser par $\frac{2}{7}$

On prend $n=0$, car la première valeur de n est 0 d'après l'énoncé.

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < \frac{3}{4}$

3. a. Vérifions que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{5}{7}(\frac{3}{4} - u_n)$
 Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{7}u_n + \frac{15}{28} - u_n \\ &= \frac{2}{7}u_n - u_n + \frac{15}{28} \\ &= \left(\frac{2}{7} - 1\right)u_n + \frac{15}{28} \\ &= -\frac{5}{7}u_n + \frac{15}{28} \\ &= \frac{5}{7}\left(-u_n + \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{5}{7}\left(\frac{3}{4} - u_n\right) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{5}{7}\left(\frac{3}{4} - u_n\right)$

b. La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{7}\left(\frac{3}{4} - u_n\right)$

Et puisque $\frac{5}{7} > 0$ et $\frac{3}{4} - u_n > 0$ car $u_n < \frac{3}{4}$

Alors : $\frac{5}{7}\left(\frac{3}{4} - u_n\right) > 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$

D'où (u_n) est suite croissante

➤ Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n < \frac{3}{4}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_n < \frac{3}{4}$

Puisque (u_n) est croissante

Alors : $n \geq 0 \Rightarrow u_n \geq u_0$
 $\Rightarrow u_n \geq 0$

Donc : $u_n \geq 0$ et $u_n < \frac{3}{4}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n < \frac{3}{4}$

c. Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{4}$

Donc (u_n) est convergente.

4. $v_n = 4u_n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour étudier la monotonie de (u_n) , dans notre cas, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le résultat de récurrence.

Si (u_n) est croissante
 $n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$

a_n Montrons que (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4u_{n+1} - 3 \\ &= 4\left(u_{n+1} - \frac{3}{4}\right) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{7} \left(u_n - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{2}{7} \cdot 4 \left(u_n - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{2}{7} (4u_n - 3) \\ &= \frac{2}{7} v_n \end{aligned}$$

Ici, ça sera mieux de factoriser par 4 pour avoir $(u_{n+1} - \frac{3}{4})$ et utiliser le résultat de la question b_n .
Et pour avoir v_n au second membre, il faut que 4 soit le coefficient de u_n , donc, il faut développer juste le nombre 4.

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{7}$.

b_n Calculons v_0 .

On a $v_n = 4u_n - 3$

Donc $v_0 = 4u_0 - 3 = -3$

Exprimons v_n en fonction de n .

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{7}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = -3 \left(\frac{2}{7}\right)^n$

c_n Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{7}\right)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = 4u_n - 3$

Donc: $4u_n = v_n + 3$

Et on a: $v_n = -3 \left(\frac{2}{7}\right)^n$

Donc: $4u_n = -3 \left(\frac{2}{7}\right)^n + 3$

Donc: $u_n = -\frac{3}{4} \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{3}{4}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{7}\right)^n$

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

d_n Déterminons $\lim u_n$

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{7}\right)^n \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Car $\lim \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{2}{7} < 1$

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{si } q > 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \text{N'existe pas,} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

Posons $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{7}$

$$\begin{aligned} S' &= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= -3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{5}{7}} \\ &= -3 \times \frac{7}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n\right) \\ &= -\frac{21}{5} + \frac{21}{5} \left(\frac{2}{7}\right)^n \end{aligned}$$

On pose $S' = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$
 Si (v_n) est une suite géométrique de raison q
 Alors $S' = v_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
 avec $n-p+1$ est le nombre des termes de S'

On a: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); 4u_n = v_n + 3$

Donc $4u_0 = v_0 + 3$ ($n=1$)

$4u_1 = v_1 + 3$ ($n=2$)

$4u_2 = v_2 + 3$ ($n=3$)

$4u_3 = v_3 + 3$ ($n=4$)

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$4u_{n-1} = v_{n-1} + 3$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 4S &= S' + 3(n-1-0+1) \\ 4S &= -\frac{21}{5} + \frac{21}{5} \left(\frac{2}{7}\right)^n + 3n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } S &= \frac{1}{4} \left(-\frac{21}{5} + \frac{21}{5} \left(\frac{2}{7}\right)^n + 3n \right) \\ &= -\frac{21}{20} + \frac{21}{20} \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{3}{4}n \end{aligned}$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S = \frac{3}{4}n - \frac{21}{20} + \frac{21}{20} \left(\frac{2}{7}\right)^n$

En Déterminons $\lim S$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}n - \frac{21}{20} + \frac{21}{20} \left(\frac{2}{7}\right)^n \right) \text{ car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}n - \frac{21}{20} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{21}{20} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0 \end{cases}$$

Par somme membre à membre
 le nombre 3 se répète $(n-1-0+1)$ fois

On a S est la somme des termes consécutifs de la suite (u_n)
 Mais (u_n) ni géométrique ni arithmétique.
 Donc et forcément, il faut demander l'aide à notre suite auxiliaire (v_n)

EXERCICE 11 En générale: La $u_{n+1} = a u_n + b$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_{n+1} = a u_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ deux réels non nuls tels que } a \neq 1)$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

① $\forall n \in \mathbb{N}$ Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison a

b_n Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c_n En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1; 1[$ alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$

② $\forall n \in \mathbb{N}$ On considère la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 9 \\ w_{n+1} = 0,7 w_n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite (w_n) est-elle convergente ?

CORRECTION

① $\forall n \in \mathbb{N}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= a u_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= a u_n + \frac{b - a b - b}{1-a} \\ &= a u_n - \frac{a b}{1-a} \\ &= a \left(u_n - \frac{b}{1-a} \right) \\ &= a v_n \end{aligned}$$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison a et son premier terme : $v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$

b_n Δ Expressions v_n en fonction de n .

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = a$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot a^n$

Δ Expressions u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

Donc : $u_n = v_n + \frac{b}{1-a}$

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot \alpha^n$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = v_0 \cdot \alpha^n + \frac{b}{1-a}$

c_n Soit $\alpha \in]-1; 1[$

Donc : $\lim \alpha^n = 0$

Donc : $\lim u_n = \lim v_0 \cdot \alpha^n + \frac{b}{1-a}$
 $= \frac{b}{1-a}$

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{si } q > 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \text{N'existe pas,} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

2 On a : $w_{n+1} = 0,7w_n + 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (w_n) est une suite arithmético-géométrique avec $\alpha = 0,7$ et $b = 3$

Et puisque $\alpha \in]-1; 1[$

Alors, d'après le résultat de la question précédente, la suite (w_n) est convergente et :

$\lim w_n = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-0,7} = 10$

EXERCICE 12 Problème ~ Exemple ~

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unité, est modélisé par la suite $(u_n)_n$ où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2020+n)$. En 2020, la forêt possède 50000 arbres.

Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1 Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation :

$u_{n+1} = 0,95u_n + 3$

2 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 60 - u_n$

a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b Exprimer u_n en fonction de n .

3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2025. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. a. Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$
 b. En déduire la monotonie de la suite (u_n)
5. Déterminer la limite de (u_n) , puis donner une interprétation au résultat obtenu.

CORRECTION

1. En 2020, 50 milliers d'arbres passent leur existence dans la forêt.
 Donc: $u_0 = 50$
- Lorsque 5% des arbres sont lâchement abattus au cours d'une année, il reste: $u_n - \frac{5}{100} u_n = 0,95 u_n$
 Par ailleurs, on replante 3 milliers d'arbres chaque année
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = 0,95 u_n + 3$

2. a. Montrons que la suite (v_n) est géométrique.
 Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = 60 - u_n$
 Donc: $v_{n+1} = 60 - u_{n+1}$
 $= 60 - (0,95 u_n + 3)$
 $= 60 - 0,95 u_n - 3$
 $= 57 - 0,95 u_n$
 $= 0,95 \left(\frac{57}{0,95} - u_n \right)$
 $= 0,95 (60 - u_n)$
 $= 0,95 v_n$

Pour montrer que (v_n) est géométrique il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$ q est la raison de (v_n)

D'où, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et son premier terme

b. Exprimons u_n en fonction de n .

- Exprimons d'abord v_n en fonction de n .
 On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et $v_0 = 10$
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 10 \cdot (0,95)^n$

Exprimons u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = 60 - u_n$

Donc: $u_n = 60 - v_n$
 $= 60 - 10 \cdot (0,95)^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 60 - 10 \cdot (0,95)^n$

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

3. Le nombre d'arbres de la forêt en 2025

On a: $2025 = 2020 + 5$

Donc le nombre d'arbres en 2025 est donnée par u_5

En utilisant la formule précédente, on obtient:

$u_5 = 60 - 10 \cdot (0,95)^5 = 522,65$

Donc en 2025 on aura 522,65 arbres.

4. Vérifions que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_n = 60 - 10 \cdot (0,95)^n$

Donc: $u_{n+1} = 60 - 10 \cdot (0,95)^{n+1}$

Donc: $u_{n+1} - u_n = 60 - 10 \cdot (0,95)^{n+1} - (60 - 10 \cdot (0,95)^n)$
 $= 60 - 10 \cdot (0,95)^{n+1} - 60 + 10 \cdot (0,95)^n$
 $= 10 \cdot (0,95)^n - 10 \cdot (0,95)^{n+1}$
 $= 10 \cdot (0,95)^n - 10 \cdot (0,95)^n \cdot (0,95)$
 $= 10 \cdot (0,95)^n (1 - 0,95)$
 $= 10 \cdot 0,005 \cdot (0,95)^n$
 $= 0,05 (0,95)^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$

$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{si } q > 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \text{N'existe pas, si } q \leq -1 \end{cases}$

5. Déterminons $\lim u_n$

$\lim u_n = \lim 60 - 10 \cdot (0,95)^n$
 $= 60$ car $\lim (0,95)^n = 0$ car $-1 < 0,95 < 1$

Interprétation

À long terme, la forêt se stabilisera à 60.000 arbres.

EXERCICE 13

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n}; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > -1$
2. a. Montrer que (u_n) est une suite décroissante, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 < u_n \leq 0$
 b. En déduire que (u_n) est une suite convergente.
3. Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}}$
 a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme
 b. Exprimer u_n en fonction de n
 c. Calculer $\lim u_n$
4. On pose $S = 1+2+3+4+\dots+n$
 Exprimer S en fonction de n , puis calculer $\lim S$

CORRECTION

1. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > -1$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 0$

Donc $u_0 > -1$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n > -1$

et montrons que : $u_{n+1} > -1$

$$\begin{aligned} u_n > -1 &\Rightarrow 2 + u_n > -1 + 2 \\ &\Rightarrow 2 + u_n > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2 + u_n} < 1 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2 + u_n} > -1 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > -1 \end{aligned}$$

Ici, pour prouver que $u_{n+1} > -1$, on peut juste utiliser l'encadrement, car dans l'expression de u_{n+1} , on trouve u_n dans une seule place

Si $a \geq b$ avec a et b ont le même signe. Alors $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ et $-a \leq -b$

Donc $u_n > -1 \Rightarrow u_{n+1} > -1$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > -1$

2) α_n La monotonie de
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-1}{2+u_n} - u_n \\ &= \frac{-1 - u_n(2+u_n)}{2+u_n} \\ &= \frac{-1 - 2u_n - u_n^2}{2+u_n} \\ &= \frac{-(1 + 2u_n + u_n^2)}{2+u_n} \\ &= \frac{-(1+u_n)^2}{2+u_n} \end{aligned}$$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > -1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); -(1+u_n)^2 < 0$ et $2+u_n > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n < 0$

D'où (u_n) est décroissante

3) Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 < u_n \leq 0$

On a (u_n) est décroissante

Donc (u_n) est majorée par son premier terme

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq u_0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 0$

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > -1$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 < u_n \leq 0$

6) Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est décroissante

et minorée par -1

Donc (u_n) est convergente.

3) α_n Montrons que (v_n) est arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$

Calculons v_{n+1} (en fonction de u_n)

On a : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

Pour étudier la monotonie de (u_n) , dans notre cas, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le résultat de récurrence.

Toute suite décroissante et minorée ($u_n \geq m$) est convergente

Pour montrer que (v_n) est arithmétique il suffit de trouver un réel r tel que $v_{n+1} - v_n = r$
 r est la raison de (v_n)

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 1} \\
 &= \frac{1}{\frac{-1}{2+u_n} + 1} \\
 &= \frac{1}{\frac{-1+2+u_n}{2+u_n}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1+u_n}{2+u_n}} \\
 &= \frac{2+u_n}{1+u_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } v_{n+1} - v_n &= \frac{2+u_n}{1+u_n} - \frac{1}{1+u_n} \\
 &= \frac{2+u_n-1}{1+u_n} \\
 &= \frac{1+u_n}{1+u_n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

D'où (v_n) est arithmétique de raison $r=1$ et son premier terme $v_0 = \frac{1}{1+u_0} = 1$

b_n Exprimons u_n en fonction de n

Exprimons d'abord v_n en fonction de n

On a (v_n) est arithmétique de raison $r=1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 + n \cdot r = 1 + n$

Exprimons u_n en fonction de n

$$\begin{aligned}
 \text{On a } v_n &= \frac{1}{1+u_n} \iff 1+u_n = \frac{1}{v_n} \\
 &\iff u_n = \frac{1}{v_n} - 1 \\
 &\iff u_n = \frac{1}{1+n} - 1
 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{1+n} - 1$

c_n Calculons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{1+n} - 1 \right) = -1 \text{ car } \lim \frac{1}{1+n} = 0$$

4_n On pose : $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$

On a $v_n = 1 + n$

Si (v_n) est arithmétique de raison r alors :

$$v_n = v_p + (n-p)r$$

Et on prend $p=0$

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

Donc $v_0 = 1 + 0 = 1; v_1 = 1 + 1 = 2; v_2 = 1 + 2 = 3; \dots; v_{n-1} = 1 + n - 1 = n$

Donc : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

Et puisque (v_n) est arithmétique

$$\begin{aligned} \text{Alors : } S &= \frac{n-1-0+1}{2} (v_0 + v_{n-1}) \\ &= \frac{n}{2} (1+n) \\ &= \frac{n(1+n)}{2} \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S = \frac{n(1+n)}{2}$

☛ Déterminons $\lim S$

$$\lim S = \lim \frac{n(1+n)}{2} = +\infty$$

EXERCICE 14

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n - 4}{2 + u_n}; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

① \sim Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

② \sim a \sim Montrer que (u_n) est une suite décroissante, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n \leq 3$

b \sim En déduire que (u_n) est une suite convergente.

③ \sim Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$$

a \sim Montrer que (v_n) est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme

b \sim Exprimer u_n en fonction de n

c \sim Calculer $\lim u_n$

CORRECTION

① \sim Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 3$

Donc $u_0 > 2$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n > 2$

et montrons que: $u_{n+1} > 2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{6u_n - 4}{2 + u_n} - 2 \\ &= \frac{6u_n - 4 - 2(2 + u_n)}{2 + u_n} \\ &= \frac{6u_n - 4 - 4 - 2u_n}{2 + u_n} \\ &= \frac{4u_n - 8}{2 + u_n} \\ &= \frac{4(u_n - 2)}{2 + u_n} \end{aligned}$$

Et puisque $4 > 0$

Et $2 + u_n > 0$ et $u_n - 2 > 0$ (car $u_n > 2$ d'après la supposition)

Alors $\frac{4(u_n - 2)}{2 + u_n} > 0$

Donc: $u_{n+1} - 2 > 0$

Donc: $u_{n+1} > 2$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

2 u_n La monotonie de
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{6u_n - 4}{2 + u_n} - u_n \\ &= \frac{6u_n - 4 - u_n(2 + u_n)}{2 + u_n} \\ &= \frac{6u_n - 4 - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{2 + u_n} \\ &= \frac{-(u_n^2 - 4u_n + 4)}{2 + u_n} \\ &= \frac{-(u_n - 2)^2}{2 + u_n} \end{aligned}$$

Pour étudier la monotonie de (u_n) , dans notre cas, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le résultat de récurrence.

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); -(u_n - 2)^2 < 0$ et $2 + u_n > 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n < 0$

D'où (u_n) est décroissante

➤ Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 < u_n \leq 0$

On a (u_n) est décroissante

Donc (u_n) est majorée par son premier terme

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq u_0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 3$

Et puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

Alors: $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n \leq 3$

En Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est décroissante

et minorée par 2

Donc (u_n) est convergente.

Toute suite décroissante
et minorée ($u_n \geq m$)
est convergente

3) a_n Montrons que (v_n) est arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$$

On a:

$$u_{n+1} - 3 = \frac{6u_n - 4}{2 + u_n} - 3 = \frac{6u_n - 4 - 3(2 + u_n)}{2 + u_n} = \frac{3u_n - 10}{2 + u_n}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{4(u_n - 2)}{2 + u_n}$$

Donc: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} = \frac{3u_n - 10}{2 + u_n} \times \frac{2 + u_n}{4(u_n - 2)} = \frac{3u_n - 10}{4(u_n - 2)}$

Et par suite: $v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n - 10}{4(u_n - 2)} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

$$= \frac{3u_n - 10}{4(u_n - 2)} - \frac{4(u_n - 3)}{4(u_n - 2)}$$

$$= \frac{3u_n - 10 - 4u_n + 12}{4(u_n - 2)}$$

$$= \frac{-u_n + 2}{4(u_n - 2)}$$

$$= \frac{-(u_n - 2)}{4(u_n - 2)}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

Pour montrer que (v_n) est
arithmétique il suffit
de trouver un réel r
tel que $v_{n+1} - v_n = r$
 r est la raison de (v_n)

D'où (v_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{4}$ et son premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2} = 0$

b_n Exprimons u_n en fonction de n

Exprimons d'abord v_n en fonction de n

On a (v_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{4}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 + nr = -\frac{n}{4}$

Exprimons u_n en fonction de n

$$\begin{aligned} \text{On a : } v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2} &\Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 3 \\ &\Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = u_n - 3 \\ &\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = 2v_n - 3 \\ &\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 3 \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{2(-\frac{n}{4}) - 3}{-\frac{n}{4} - 1} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{-\frac{2n}{4} - 12}{-\frac{n}{4} - 4} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{2n + 12}{n + 4} \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2n + 12}{n + 4}$

c_n Calculons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \frac{2n + 12}{n + 4} = \lim \frac{2n}{n} = 2$$

EXERCICE 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1_n Montrer par récurrence que : $u_n > 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2_n a_n Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n - 1)}{u_n}$

b_n En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

Si (v_n) est arithmétique de raison r alors :

$$v_n = v_p + (n - p)r$$

Et on prend $p = 0$

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_{n-1}}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

b. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n

c. Calculer $\lim u_n$

4. On pose $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $S = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} - 1}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a. Exprimer S' en fonction de n .

b. Exprimer S en fonction de n .

c. Calculer $\lim S$

CORRECTION

1. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 3$

Donc $u_0 > 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n > 2$

et montrons que : $u_{n+1} > 2$

$$u_n > 2 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{u_n} < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{u_n} > -1$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{2}{u_n} > 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2$$

Ici, pour prouver que $u_{n+1} > 2$, on peut juste utiliser

l'encadrement, car dans l'expression de u_{n+1} , on trouve u_n dans une seule place

Si $a > b$ avec a et b ont le même signe. Alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ et $-a < -b$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

2. a. Vérifions que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n - 1)}{u_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{2}{u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n - 2 - u_n^2}{u_n} \end{aligned}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n}$$

D'autre part, on a: $(2 - u_n)(u_n - 1) = 2u_n - 2 - u_n^2 + u_n$
 $= -u_n^2 + 3u_n - 2$

Et par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n - 1)}{u_n}$

b_n La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n - 1)}{u_n}$

Et puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$ (D'après la question 1_n)

Alors: $2 - u_n < 0$; $u_n - 1 > 0$ et $u_n > 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n < 0$

D'où la suite (u_n) est décroissante.



On a (u_n) est décroissante et minorée par 2

Donc (u_n) est convergente.

Toute suite décroissante et minorée ($u_n \geq m$) est convergente

3_n a_n Montrons que (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$

Donc: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1}$
 $= \frac{3 - \frac{2}{u_n} - 2}{3 - \frac{2}{u_n} - 1}$
 $= \frac{1 - \frac{2}{u_n}}{2 - \frac{2}{u_n}}$
 $= \frac{\frac{u_n - 2}{u_n}}{\frac{2u_n - 2}{u_n}}$
 $= \frac{u_n - 2}{2u_n - 2}$
 $= \frac{u_n - 2}{2(u_n - 1)}$
 $= \frac{1}{2} v_n$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
 et son premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = \frac{1}{2}$

Exprimons v_n

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Exprimons u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \Rightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - 2$$

$$\Rightarrow v_n u_n - v_n = u_n - 2$$

$$\Rightarrow v_n u_n - u_n = v_n - 2$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \quad v_{n+1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}$

Déterminons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}$$

$$= \frac{-2}{2^{-1}}$$

$$= 2^{-1} \text{ car } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0, \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

4. On pose $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } S' = v_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Si (v_n) est géométrique de raison q
 Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$
 On prend v_p : le premier terme

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{si } q > 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \text{N'existe pas,} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

On pose $S' = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$
 Si (v_n) est une suite géométrique de raison q
 Alors $S' = v_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
 avec $n-p+1$ est le nombre des termes de S'

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); S' = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

En On pose $S = \frac{1}{u_0-1} + \frac{1}{u_1-1} + \dots + \frac{1}{u_{n-1}-1}$

Exprimons S en fonction de n

$$\begin{aligned} \text{On a: } v_n &= \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}-1}{u_{n-1}} \\ &= \frac{u_{n-1}-1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-1}} \\ &= 1 - \frac{1}{u_{n-1}} \end{aligned}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{u_{n-1}} = 1 - v_n$

$$\frac{1}{u_0-1} = 1 - v_0$$

$$\frac{1}{u_1-1} = 1 - v_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{1}{u_{n-1}-1} = 1 - v_{n-1}$$

$$S = 1(n-1-0+1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) \quad \text{Par somme membre à membre}$$

Donc: $S = n - S'$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S = n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$



Le nombre 1 se répète $(n-1-0+1)$ fois

En Déterminons $\lim S$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{Car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim q^n = 0, \text{ si } -1 < q < 1$$

EXERCICE 16

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. On suppose que: $\alpha = 1$

Montrer que (u_n) est une suite constante.

On suppose dans tout ce qui suit que $\alpha = \frac{3}{2}$

2. Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n < \frac{3}{2}$

3. a. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

b. En déduire que (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite de (u_n)

4. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

b. Écrire u_n en fonction de n

c. Déterminer - à nouveau - la limite de (u_n) .

5. a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n)$

b. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7}\right)^n$

c. Déterminer - à nouveau - la limite de (u_n)

CORRECTION

1. On suppose que : $u_0 = a = 1$

Montrons que (u_n) est une suite stationnaire

(c'est-à-dire que : $u_n = u_0 = 1$)

Par récurrence

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 1$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n = 1$

Montrons que $u_{n+1} = 1$

$$\text{On a : } u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$$

Puisque $u_n = 1$, d'après la supposition

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{5 \cdot 1 - 2}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 1$

2. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n < 2$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = \frac{3}{2}$

Donc $1 < u_0 < 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Remarquons que (u_n) est constante lorsque $u_0 = 1$ ou bien $u_0 = 2$ car 1 et 2 sont les points fixes (Solutions de : $\frac{5x-2}{x+2} = x$)

Supposons que: $1 < u_n < 2$
 et montrons que: $1 < u_{n+1} < 2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 1 \\ &= \frac{5u_n - 2 - (2 + u_n)}{u_n + 2} \\ &= \frac{5u_n - 2 - 2 - u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n - 4}{u_n + 2} \\ &= \frac{4(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Et on a: $1 < u_n < 2$, d'après la supposition

Donc: $4 > 0$, $u_n - 1 > 0$ et $u_n + 2 > 0$

Et par suite: $u_{n+1} - 1 > 0$

Donc: $u_{n+1} > 1$ (1)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 2 \\ &= \frac{5u_n - 2 - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{5u_n - 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2} \\ &= \frac{3u_n - 6}{u_n + 2} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
 رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Et on a: $1 < u_n < 2$, d'après la supposition

Donc: $3 > 0$, $u_n - 2 < 0$ et $u_n + 2 > 0$

Et par suite: $u_{n+1} - 2 < 0$

Donc: $u_{n+1} < 2$ (2)

D'après (1) et (2), on déduit que: $1 < u_{n+1} < 2$

Et d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n < 2$

3) n a n La monotonie de (u_n)

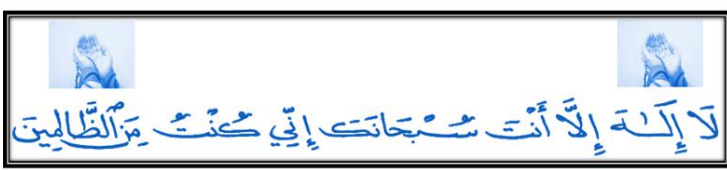
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{5u_n - 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Pour étudier la monotonie de (u_n) , dans notre cas, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le résultat de récurrence.

$$= \frac{5u_n - 2 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 2}$$



Et puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n < 2$

Alors: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n + 2 > 0$

Donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $-u_n^2 + 3u_n - 2$

On pose: $x = u_n$

Étudions le signe de: $-x^2 + 3x - 2$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-1)(-2) = 1$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$-x^2 + 3x - 2$	-	o	+	o

Si $\Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Supposons $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	o	signe de $-a$	o
		signe de a	signe de $-a$	signe de a

D'après le tableau de signe de $-x^2 + 3x - 2$

On a: $(\forall x \in]1; 2[); -x^2 + 3x - 2 > 0$

Et comme $u_n \in]1; 2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); -u_n^2 + 3u_n - 2 > 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n > 0$

D'où (u_n) est une suite croissante

E_n Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est une suite croissante et majorée par 2

Donc (u_n) est une suite convergente.

c_n Déterminons $\lim u_n$

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (l existe puisque (u_n) est convergente.)

Or, si $n \rightarrow +\infty$, alors $n+1 \rightarrow +\infty$

Donc $\lim u_n = \lim u_{n+1} = l$

Par passage à la limite, on aura: $l = \frac{5l - 2}{l + 2}$

$$l = \frac{5l - 2}{l + 2} \Rightarrow l(l + 2) = 5l - 2$$

$$\Rightarrow l^2 + 2l = 5l - 2$$

$$\Rightarrow l^2 + 2l - 5l + 2 = 0$$

$$\Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \quad \text{En multipliant par } -1$$

$$\Rightarrow -l^2 + 3l - 2 = 0$$

D'après le résultat de la question précédente

on aura $l=1$ ou bien $l=2$

Et puisque (u_n) est croissante

Alors: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq u_0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \frac{3}{2}$

D'où: $\lim u_n = 2$

4. Montrons que (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a: } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2} \\ &= \frac{4(u_n - 1)}{u_n + 2} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{4(u_n - 1)}{3(u_n - 2)} \\ &= \frac{4}{3} v_n \end{aligned}$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{3}$

et son premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 - 2} = -1$

6. Exprimons u_n en fonction de n

Exprimons d'abord v_n en fonction de n

On a (v_n) est une suite

géométrique de raison $q = \frac{4}{3}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = -1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = -\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Exprimons u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n - 2} \Rightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 1 \\ &\Rightarrow v_n u_n - 2v_n = u_n - 1 \\ &\Rightarrow v_n u_n - u_n = 2v_n - 1 \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مِثْلَ مَا كَرَّمْتَنِي
رَبِّيَ إِنِّي صَغِيرٌ

Pour montrer que (v_n) est
il faut juste calculer
 v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

Si (v_n) est géométrique
de raison q

Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

On prend v_p : le premier
terme

Pour écrire u_n en fonction
de n , il faut écrire
 u_n en fonction de v_n ,
puis u_n en fonction
 (v_n) : Suite auxiliaire

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_n(v_n-1) &= 2v_n-1 & v_{n+1} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{2v_n-1}{v_n-1} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{2\left(-\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)-1}{\left(-\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)-1} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{-\left(2\left(\frac{4}{3}\right)^n+1\right)}{-\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n+1\right)} \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مَا كُنْتُ
رَبِّيَ ابْنِي صَغِيرًا

Et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n+1}$

car Calculons $\lim u_n$

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n+1} \\ &= \lim \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n\left(2+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} \\ &= \lim \frac{2+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} \\ &= 2 \quad \text{car } \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{aligned}$$

Ici; on a $\lim \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$
Et si on remplace, on va trouver $\frac{\infty}{\infty}$.
Dans ce cas, il faut juste factoriser le numérateur et le dénominateur par $\left(\frac{4}{3}\right)^n$

$\lim q^n = 0, \text{ si } -1 < q < 1$

5) car Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 2 - u_{n+1} - \frac{6}{7}(2 - u_n) &= -\left(u_{n+1} - 2\right) - \frac{6}{7}(2 - u_n) \\ &= -\frac{3(u_n - 2)}{u_n + 2} - \frac{6}{7}(2 - u_n) \\ &= \frac{3(2 - u_n)}{u_n + 2} - \frac{6}{7}(2 - u_n) \\ &= (2 - u_n) \left(\frac{3}{u_n + 2} - \frac{6}{7} \right) \\ &= (2 - u_n) \times \frac{21 - 6(u_n + 2)}{7(u_n + 2)} \\ &= (2 - u_n) \times \frac{9 - 6u_n}{7(u_n + 2)} \end{aligned}$$

$$= (2 - u_n) \times \frac{6 \left(\frac{3}{2} - u_n \right)}{7(u_n + 2)}$$

Or on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{3}{2} \leq u_n < 2$

Donc : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{3}{2} - u_n \leq 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n > 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_n + 2 > 0 \end{cases}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} - \frac{6}{7}(2 - u_n) \leq 0$

Et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n)$

b. Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$

D'après le résultat de la question précédente,

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$

Donc : $0 < 2 - u_1 \leq \frac{6}{7}(2 - u_0)$

~~$0 < 2 - u_2 \leq \frac{6}{7}(2 - u_1)$~~

~~$0 < 2 - u_3 \leq \frac{6}{7}(2 - u_2)$~~

~~$0 < 2 - u_4 \leq \frac{6}{7}(2 - u_3)$~~

~~$0 < 2 - u_5 \leq \frac{6}{7}(2 - u_4)$~~

~~$0 < 2 - u_{n-1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-2})$~~

~~$0 < 2 - u_n \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-1})$~~

~~$0 < 2 - u_{n-1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-2})$~~

~~$0 < 2 - u_n \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-1})$~~

~~$0 < 2 - u_{n-1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-2})$~~

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n < 2$
 Mais, toujours, après avoir étudié la monotonie de (u_n) , on obtiendra un encadrement plus précis.

On a tous les membres sont positifs.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
 رَبَّيَّانِي صَغِيرًا

On multiplie les membres des inégalités membre à membre,

on aura : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 2 - u_n \leq (2 - u_0) \left(\frac{6}{7} \right)^{n-1+1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$

c. Déterminons $\lim u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$

$\lim q^n = 0$, si $-1 < q < 1$

On a : $\lim 0 = 0$ et $\lim \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n = 0$ car $-1 < \frac{6}{7} < 1$

Donc, d'après les critères de convergence (Théorème de gendarme)

$\lim 2 - u_n = 0$

D'où : $\lim u_n = 0$

EXERCICE 17

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{5}u_n^2 + 4}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > \sqrt{5}$
2. a. Comparer u_{n+1}^2 et u_n^2 , puis en déduire la monotonie de la suite
 b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n^2 - 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme.
 b. Écrire u_n en fonction de n
 c. Calculer $\lim u_n$
4. On pose $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$
 Exprimer S_n en fonction de n , puis déterminer $\lim S_n$

CORRECTION

1. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > \sqrt{5}$

Initialisation

Pour $n=1$, on a : $u_1 = 3$

Donc : $u_1 > \sqrt{5}$

Donc la proposition est vraie pour $n=1$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que : $u_n > \sqrt{5}$

et montrons que : $u_{n+1} > \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_n > \sqrt{5} &\Rightarrow u_n^2 > 5 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5}u_n^2 > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5}u_n^2 + 4 > 1 + 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{5}u_n^2 + 4} > \sqrt{5} \\ &\Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{5} \end{aligned}$$

On prend $n=1$, car la première valeur de n est 1 d'après l'énoncé.

Ici, pour prouver que $u_{n+1} > \sqrt{5}$, on peut juste utiliser l'encadrement, car dans l'expression de u_{n+1} , on trouve u_n dans une seule place

Donc : $u_n > \sqrt{5} \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{5}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > \sqrt{5}$

2) *on* Comparons u_{n+1}^2 et u_n^2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n^2 &= \frac{1}{5}u_n^2 + 4 - u_n^2 \\ &= -\frac{4}{5}u_n^2 + 4 \\ &= -\frac{4}{5}\left(u_n^2 + 4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)\right) \\ &= -\frac{4}{5}(u_n^2 - 5) \end{aligned}$$

Cela sera mieux de factoriser toujours par le coefficient de u_n

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

Et d'après le résultat de la question précédente, on a : $u_n > \sqrt{5}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n^2 > 5$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n^2 - 5 > 0$

Et comme : $-\frac{4}{5} < 0$

Alors : $-\frac{4}{5}(u_n^2 - 5)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1}^2 - u_n^2 < 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1}^2 < u_n^2$

La monotonie de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $u_{n+1}^2 < u_n^2$

Donc : $|u_{n+1}| < |u_n|$

Et comme : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$

Donc, on aura : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} < u_n$

D'où (u_n) est une suite décroissante.

En On a (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$

Donc (u_n) est une suite convergente

3) *on* Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $v_n = u_n^2 - 5$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - 5 \\ &= \frac{1}{5}u_n^2 + 4 - 5 \\ &= \frac{1}{5}u_n^2 - 1 \\ &= \frac{1}{5}(u_n^2 - 5) \\ &= \frac{1}{5}v_n \end{aligned}$$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = qv_n$ q est la raison de (v_n)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مَا كُنْتُ
 رَبِّيَ إِنِّي صَغِيرٌ

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et son premier terme : $v_1 = u_1^2 - 5 = 4$

b_n Exprimons u_n en fonction de n

Exprimons d'abord v_n en fonction de n
On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = 4 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

L'expression de u_n en fonction de n

On a : $u_n^2 - 5 = v_n$

Donc : $u_n^2 = v_n + 5$

Donc : $u_n = \sqrt{v_n + 5}$ ou $u_n = -\sqrt{v_n + 5}$

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > \sqrt{5}$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sqrt{v_n + 5}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sqrt{4 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 5}$

c_n Déterminons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 5} = \sqrt{5}$$

car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$

4 On a : $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$

Posons : $S'_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

Alors : $S'_n = v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{5}}$

$$= 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}$$

$$= 4 \times \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$= 5 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

Si (v_n) est géométrique de raison q

Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

On prend v_p : le premier terme

Pour écrire u_n en fonction de n , il faut écrire u_n en fonction de v_n , puis u_n en fonction (v_n) : Suite auxiliaire

Si : $a^2 = b$ avec $b > 0$
alors : $a = b$ ou $a = -b$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مَا كُنْتُ
رَبِّيَ ابْنِي صَغِيرًا

$\lim q^n = 0$, si $-1 < q < 1$

On a S est la somme des termes consécutifs de la suite (u_n)

Mais (u_n) ni géométrique ni arithmétique.
Donc et forcément, il faut demander l'aide à notre suite auxiliaire (v_n)

On pose $S = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$
Si (v_n) est une suite géométrique de raison q
Alors $S = v_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
avec $n-p+1$ est le nombre des termes de S

$$\begin{aligned}
 &= 5 - 5\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
 &= 5 - 5\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\
 &= 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S'_n = 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

Et on a: $u_n^2 = v_n + 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc: $u_1^2 = v_1 + 5$

$u_2^2 = v_2 + 5$

$u_3^2 = v_3 + 5$

$u_4^2 = v_4 + 5$

\vdots

$u_n^2 = v_n + 5$

$$\begin{aligned}
 S_n &= S'_n + 5(n-1+1) \\
 &= 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 5n
 \end{aligned}$$



Par somme membre à membre



Le nombre 5 se répète $(n-1+1)$ fois

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = 5n + 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

🔍 Déterminons $\lim S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n + 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n + 5 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 18

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2 + u_n} \end{cases}; n \in \mathbb{N}.$

① \sim Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$

② \sim Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

\hookrightarrow En déduire que (u_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente.

③ \sim Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

\hookrightarrow En déduire la limite de la suite (u_n)

CORRECTION

① $\forall n \in \mathbb{N}$ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 1$

Donc $0 < u_0 \leq 1$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $0 < u_n \leq 1$

et montrons que : $0 < u_{n+1} \leq 1$

Δ On a : $u_n > 0$, d'après la supposition

Donc : $u_n^2 > 0$ et $2 + u_n > 0$

Donc : $\frac{u_n^2}{2 + u_n} > 0$

Donc : $u_{n+1} > 0$ ①

$$\begin{aligned} \Delta \quad u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n^2}{2 + u_n} - 1 \\ &= \frac{u_n^2 - 2 - u_n}{2 + u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - u_n - 2}{2 + u_n} \\ &= \frac{u_n(u_n - 1) - 2}{2 + u_n} \end{aligned}$$

Et on a : $0 < u_n \leq 1$, d'après la supposition

Donc : $u_n > 0$ et $u_n - 1 \leq 0$

Donc : $u_n(u_n - 1) \leq 0$

Et : $-2 \leq 0$

Donc : $u_n(u_n - 1) - 2 \leq 0$

Et on a : $2 + u_n > 0$

Donc : $\frac{u_n(u_n - 1) - 2}{2 + u_n} \leq 0$

Donc : $u_{n+1} - 1 \leq 0$

Donc : $u_{n+1} \leq 1$ ②

D'après ① et ②, on déduit que : $0 < u_{n+1} \leq 1$

Et d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$

② $\forall n \in \mathbb{N}$ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.



$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &= \frac{u_n^2}{2+u_n} - \frac{u_n}{2} \\
 &= \frac{2u_n^2 - u_n(2+u_n)}{2(2+u_n)} \\
 &= \frac{2u_n^2 - 2u_n - u_n^2}{2(2+u_n)} \\
 &= \frac{u_n^2 - 2u_n}{2(2+u_n)} \\
 &= \frac{u_n(u_n - 2)}{2(2+u_n)}
 \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
 رَبَّيْنِي صَغِيرًا

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 2 \leq 0$ Et $2(2+u_n) > 0$
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{u_n(u_n - 2)}{2(2+u_n)} \leq 0$
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \leq 0$
 D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

b_n La monotonie de (u_n)

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$
 Et: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < 1$
 Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
 D'où (u_n) est décroissante.

Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs, alors:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \iff (u_n)$ est décroissante.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff (u_n)$ est croissante

➡ Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 1
 Alors (u_n) est convergente.

③ a_n Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation

Pour $n=0$
 On a: $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Donc: $u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que: $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ~ D'après la supposition ~

Donc : $\frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et puisque : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ d'après le résultat de la question 2 ~ a

Alors : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

En Déterminons $\lim u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ et $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et puisque $\lim 0 = 0$ et $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Alors, d'après les critères de convergence

$\lim u_n = 0$

EXERCICE 19

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 ~ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 2$

2 ~ a ~ Montrer que (u_n) est une suite croissante, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n < 2$

En déduire que (u_n) est une suite convergente.

3 ~ a ~ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c ~ Déterminer \lim

CORRECTION

1 ~ Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 2$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 1$

Donc $0 < u_0 < 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$

On a: $0 < u_n < 2$ d'après la supposition

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 2 &\Rightarrow 2 < 2 + u_n < 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2 + u_n} < \sqrt{4} \\ &\Rightarrow \sqrt{2} < u_{n+1} < 2 \end{aligned}$$

Et comme: $0 < \sqrt{2}$

Alors: $0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$

Donc: $0 < u_{n+1} < 2$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$

□ n a n La monotonie de (u_n)

Pour cela, il suffit de comparer u_{n+1}^2 et u_n^2 avec $0 < u_n < 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1}^2 = \sqrt{2 + u_n}^2 = 2 + u_n$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + u_n - u_n^2 = -u_n^2 + u_n + 2$$

On pose: $x = u_n$

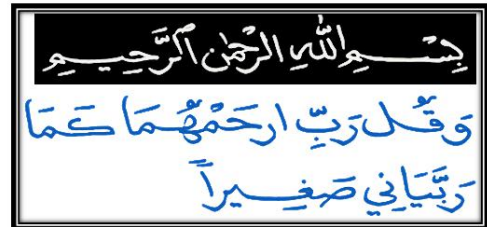
Étudions le signe de $-x^2 + x + 2$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 9$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$-x^2 + 3x - 2$	-	○	+	○	-



D'après le tableau de signe de $-x^2 + x + 2$

On a: $(\forall x \in]0; 2[); -x^2 + x + 2 > 0$

Et comme $u_n \in]0; 2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); -u_n^2 + u_n + 2 > 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n > 0$

D'où (u_n) est une suite croissante

☛ Deducisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < 2$

On a (u_n) est une suite croissante

Donc elle est minorée par son premier terme.

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq u_0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 1$

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 2$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < 2$

En On a (u_n) est une suite croissante et majorée par 2,
Donc (u_n) est convergente.

③ $\forall n$ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 2 - u_{n+1} - \frac{2 - u_n}{2} &= 2 - \sqrt{2 + u_n} - \frac{2 - u_n}{2} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{2 + u_n})(2 + \sqrt{2 + u_n})}{2 + \sqrt{2 + u_n}} - \frac{2 - u_n}{2} \\ &= \frac{2^2 - \sqrt{2 + u_n}^2}{2 + \sqrt{2 + u_n}} - \frac{2 - u_n}{2} \\ &= \frac{4 - (2 + u_n)}{2 + \sqrt{2 + u_n}} - \frac{2 - u_n}{2} \\ &= \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}} - \frac{2 - u_n}{2} \\ &= (2 - u_n) \left(\frac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}} - \frac{1}{2} \right) \\ &= (2 - u_n) \left(\frac{2 - 2 - \sqrt{2 + u_n}}{2(2 + \sqrt{2 + u_n})} \right) \\ &= (2 - u_n) \left(\frac{-\sqrt{2 + u_n}}{2(2 + \sqrt{2 + u_n})} \right) \end{aligned}$$

Ici, il faut simplifier l'expression $2 - u_{n+1}$ et l'a factorisée par $2 - u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < 2$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 2 - u_n > 0 \\ 2(2 + \sqrt{2 + u_n}) > 0 \\ -\sqrt{2 + u_n} < 0 \end{cases}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
رَبَّيْنِي صَغِيرًا

Et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} - \frac{2 - u_n}{2} < 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

En Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Initialisation

Pour $n=0$

On a : $2 - u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que : $2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

et montrons que : $2 - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ Par hypothèse

Donc : $\frac{1}{2}(2 - u_n) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Donc : $\frac{2 - u_n}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et d'après le résultat de la question précédente, on a :

$2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

Donc : $2 - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où, d'après le principe de récurrence :

$(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c_n Déterminons $\lim u_n$

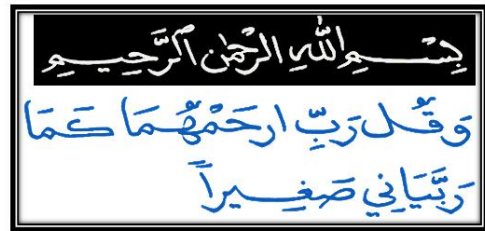
On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $u_n < 2$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et puisque : $\lim 0 = 0$ et $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

Alors, d'après les critères de convergence $\lim 2 - u_n = 0$

D'où : $\lim u_n = 2$



EXERCICE 20

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2n - 1; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq -3n - \frac{3}{2}$

2) Étudier la monotonie de (u_n)

3) Soit (v_n) la suite définie par :

$v_n = 3u_n + 9n - 9$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a_n Montrer que (v_n) est une suite géométrique de de raison $\frac{1}{3}$

b_n Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n
 c_n Déterminons $\lim u_n$

CORRECTION

① Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq -3n - \frac{3}{2}$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 0$ et $-3 \cdot 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

Donc : $u_0 \geq -3 \cdot 0 - \frac{3}{2}$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n \geq -3n - \frac{3}{2}$

et montrons que : $u_{n+1} \geq -3(n+1) - \frac{3}{2}$

Donc on montre que : $u_{n+1} \geq -3n - \frac{9}{2}$

On a : $u_n \geq -3n - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \geq -n - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n - 2n - 1 \geq -n - \frac{1}{2} - 2n - 1$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq -3n - \frac{3}{2}$

Et on a : $-\frac{3}{2} \geq -\frac{9}{2}$

Donc : $-3n - \frac{3}{2} \geq -3n - \frac{9}{2}$

Donc : $u_{n+1} \geq -3n - \frac{9}{2}$

Donc la proposition est vraie pour $(n+1)$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq -3n - \frac{3}{2}$

② La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 2n - 1 - u_n$

$= -\frac{2}{3}u_n - 2n - 1$

$= -\frac{2}{3} \left(u_n - 2n \left(-\frac{3}{2} \right) - 1 \left(-\frac{3}{2} \right) \right)$



$$= -\frac{2}{3} \left(u_n + 3n + \frac{3}{2} \right)$$

Et d'après le résultat de la question précédente

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq -3n - \frac{3}{2}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n + 3n + \frac{3}{2} \geq 0$

Et comme : $-\frac{2}{3} < 0$

Alors : $-\frac{2}{3} \left(u_n + 3n + \frac{3}{2} \right) \leq 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n \leq 0$

D'où (u_n) est une suite décroissante

3) $n \rightsquigarrow$ Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = 3u_n + 9n - 9$

Donc : $v_{n+1} = 3u_{n+1} + 9(n+1) - 9$

$$v_{n+1} = 3 \left(\frac{1}{3} u_n - 2n - 1 \right) + 9n + 9 - 9$$

$$= u_n - 6n - 3 + 9n$$

$$= u_n + 3n - 3$$

$$= \frac{1}{3} (3u_n + 9n - 9)$$

$$= \frac{1}{3} v_n$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et son premier terme : $v_0 = 3u_0 + 9 \cdot 0 - 9 = -9$

6) $n \rightsquigarrow$ Exprimons v_n en fonction de n

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = -3^2 \left(\frac{1}{3} \right)^n = - \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} \left(\frac{1}{3} \right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2}$

L'expression de u_n en fonction de n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 3u_n + 9n - 9$

Donc : $3u_n = v_n - 9n + 9$



Si (v_n) est géométrique de raison q

Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

On prend v_p : le premier terme

$$u_n = \frac{1}{3}v_n - 3n + 3$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \right) - 3n + 3$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3n + 3$

c. Déterminons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3n + 3 \text{ car } \begin{cases} \lim -3n + 3 = -\infty \\ \lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$= -\infty$$

EXERCICE 21

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = u_{n+1} - 9u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que (w_n) est une suite constante.

b. En déduire que : $u_{n+1} = 9u_n + 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit (v_n) la suite telle que : $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n

c. Calculer $\lim u_n$.

CORRECTION

1. a. Montrons que (w_n) est une suite constante.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

Donc : $w_{n+1} = u_{n+2} - 9u_{n+1}$

$$= 10u_{n+1} - 9u_n - 9u_{n+1}$$

$$= u_{n+1} - 9u_n$$

$$= w_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = w_n$

D'où (w_n) est une suite constante.

Pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante, on peut

montrer par récurrence que

$$\forall n \geq n_0; u_n = u_{n_0}$$

montrer que $u_{n+1} = u_n$

6. Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = 9u_n + 1$

On a (w_n) est une suite stationnaire

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = w_0 = u_1 - 9u_0 = 1$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = 1$

Et d'autre part, on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = u_{n+1} - 9u_n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 9u_n = 1$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = 9u_n + 1$

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante
alors: $\forall n \geq n_0; u_n = u_{n_0}$

2. Montrons que (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= 10u_{n+1} - 9u_n - u_{n+1} \\ &= 9u_{n+1} - 9u_n \\ &= 9(u_{n+1} - u_n) \\ &= 9v_n \end{aligned}$$

Pour montrer que (v_n) est
il faut juste calculer
 v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = qv_n$
 q est la raison de (v_n)

D'où, (v_n) est une suite géométrique de raison $q=9$ et son
et son premier terme: $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

6. Exprimons v_n en fonction de n .

On a (v_n) est géométrique de raison $q=9$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot 9^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 9^n$

Si (v_n) est géométrique
de raison q

Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

On prend v_p : le premier
terme

7. Exprimons u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = u_{n+1} - u_n$

Et d'après le résultat de la question 1.6, on a: $u_{n+1} = 9u_n + 1$

Donc: $v_n = 9u_n + 1 - u_n = 8u_n + 1$

Donc: $8u_n = v_n - 1$

Donc: $u_n = \frac{1}{8} (v_n - 1)$

Et puisque: $v_n = 9^n$

Alors: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{8} (9^n - 1)$

Pour écrire u_n en fonction
de n , il faut écrire
 u_n en fonction de v_n ,
puis u_n en fonction
 (v_n) : Suite auxiliaire

8. Déterminons $\lim u_n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} (9^n - 1) \\ &= +\infty \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 9^n = +\infty, \text{ car } 9 > 1 \end{aligned}$$

EXERCICE 22

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n ; n \in \mathbb{N}. \end{cases} \text{ et } v_n = u_{n+1} - u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ en fonction de n
3. En déduire u_n en fonction de n .
4. Calculer $\lim u_n$

CORRECTION

1. Montrons que (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= 10u_{n+1} - 9u_n - u_{n+1} \\ &= 9u_{n+1} - 9u_n \\ &= 9(u_{n+1} - u_n) \\ &= 9v_n \end{aligned}$$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = 9v_n$
 9 est la raison de (v_n)

D'où, (v_n) est une suite géométrique de raison $q=9$ et son et son premier terme : $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

2. Soit : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q=9$

$$\text{Donc : } S = v_0 \cdot \frac{1 - 9^{n-1-0+1}}{1-9} = v_0 \cdot \frac{9^{n-1-0+1} - 1}{9-1} = \frac{9^n - 1}{8}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S = \frac{1}{8}(9^n - 1)$

3. On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = v_n$

On pose $S = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$
Si (v_n) est une suite géométrique de raison q
Alors $S = v_p \cdot \frac{1 - 9^{n-p+1}}{1-9}$
avec $n-p+1$ est le nombre des termes de S

Donc $u_1 - u_0 = v_0$
 $u_2 - u_1 = v_1$
 $u_3 - u_2 = v_2$
 \vdots
 $u_{n-1} - u_{n-2} = v_{n-2}$
 $u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$

 $u_n - u_0 = S$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي كَمَا
 رَحِمْتَنِي صَغِيرًا

Par somme membre à membre

$u_n = S + u_0$ et $u_0 = 0$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{1}{8}(9^n - 1)$

4. Déterminons $\lim u_n$

$\lim u_n = \lim \frac{1}{8}(9^n - 1)$
 $= +\infty$ car $\lim 9^n = +\infty$, car $9 > 1$

EXERCICE 23

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} u_0 = 20 \text{ et } u_1 = 6 \\ u_{n+2} = -\frac{1}{20}u_{n+1} + \frac{1}{20}u_n \end{cases}$

On considère les deux suites (v_n) et (w_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

En Exprimer v_n en fonction de n .

2. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

En Exprimer w_n en fonction de n .

3. En déduire u_n en fonction de n , puis calculer $\lim u_n$

CORRECTION

1. Montrons que (v_n) est une suite géométrique.
 Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } v_{n+1} &= u_{n+2} + \frac{1}{4} u_{n+1} \\
 &= -\frac{1}{20} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n + \frac{1}{4} u_{n+1} \\
 &= -\frac{1}{20} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n + \frac{5}{20} u_{n+1} \\
 &= \frac{-1+5}{20} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n \\
 &= \frac{1}{5} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n \\
 &= \frac{1}{5} \left(u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n \right) \\
 &= \frac{1}{5} v_n
 \end{aligned}$$

Pour montrer que (v_n) est géométrique il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

D'où (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et son premier terme $v_0 = u_1 + \frac{1}{4} u_0 = 6 + 5 = 11$

En exprimons v_n en fonction de n .

On a (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot q^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 11 \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Si (v_n) est géométrique de raison q
 Alors $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$
 On prend v_p : le premier terme

2) na Montrons que (w_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } w_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{5} u_{n+1} \\
 &= -\frac{1}{20} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n - \frac{1}{5} u_{n+1} \\
 &= -\frac{1}{20} u_{n+1} - \frac{1}{5} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n \\
 &= \frac{-1-4}{20} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n \\
 &= -\frac{1}{4} u_{n+1} + \frac{1}{20} u_n \\
 &= -\frac{1}{4} \left(u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n \right) \\
 &= -\frac{1}{4} w_n
 \end{aligned}$$

Pour montrer que (w_n) est géométrique il faut juste calculer w_{n+1} et trouver $w_{n+1} = q w_n$
 q est la raison de (w_n)

D'où (w_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et son premier terme $w_0 = u_1 - \frac{1}{5} u_0 = 6 - 4 = 2$

En exprimons w_n en fonction de n .

On a (W_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); W_n = W_0 \cdot q^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); W_n = 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

Si (W_n) est géométrique de raison q

Alors $W_n = W_p \cdot q^{n-p}$

On prend W_p : le premier terme

③ Dédoublons u_n en fonction de n .

$$\text{On a: } \begin{cases} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n = v_n \\ u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n = W_n \end{cases}$$

Donc: $(u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n) - (u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n) = v_n - W_n$

$$u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n - u_{n+1} + \frac{1}{5} u_n = v_n - W_n$$

$$\frac{9}{20} u_n = 11 \left(\frac{1}{5}\right)^n - 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{20}{9} \left(11 \left(\frac{1}{5}\right)^n - 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right)$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي كَمَا
رَبَّيْنِي صَغِيرًا

Calculons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \frac{20}{9} \left(11 \left(\frac{1}{5}\right)^n - 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right)$$

$$= \frac{20}{9} (0+0) = 0 \quad \text{car } \lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\lim q^n = 0, \text{ si } -1 < q < 1$$

EXERCICE 24

Soit (u_n) la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{1 + u_n^2}; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- ① Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$
- ② Montrer que (u_n) est une suite convergente.
- ③ Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} (u_n - 1)$
- ④ Calculer $\lim u_n$

CORRECTION

① Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = \frac{3}{2}$

Donc $u_0 > 1$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n > 1$

et montrons que: $u_{n+1} > 1$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n + u_n^2}{1 + u_n^2} - 1 \\&= \frac{u_n + u_n^2 - 1(1 + u_n^2)}{1 + u_n^2} \\&= \frac{u_n + u_n^2 - 1 - u_n^2}{1 + u_n^2} \\&= \frac{u_n - 1}{1 + u_n^2}\end{aligned}$$

Or: $u_n > 1 \sim$ d'après la supposition \sim

Donc: $u_n - 1 > 0$ et $1 + u_n^2 > 0$

Donc: $u_{n+1} - 1 > 0$

Donc: $u_{n+1} > 1$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

2) \sim On a (u_n) est minorée par 1

Donc, pour prouver que (u_n) est convergente, il suffit de montrer que (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\text{On a: } u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + u_n^2}{1 + u_n^2} - u_n \\&= \frac{u_n + u_n^2 - u_n(1 + u_n^2)}{1 + u_n^2} \\&= \frac{u_n + u_n^2 - u_n - u_n^3}{1 + u_n^2} \\&= \frac{u_n^2 - u_n^3}{1 + u_n^2} \\&= \frac{u_n^2(1 - u_n)}{1 + u_n^2}\end{aligned}$$

Or: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$, d'après le résultat de la question 1.

Donc: $1 + u_n^2 > 0$, $u_n^2 > 0$ et $1 - u_n < 0$



Pour étudier la monotonie de (u_n) , dans notre cas, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le résultat de récurrence.

Et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} - \mu_n < 0$

D'où (μ_n) est une suite décroissante

Et comme (μ_n) est minorée par 1

Alors (μ_n) est convergente.

③ ~ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(\mu_n - 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \mu_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(\mu_n - 1) \\ &= \frac{\mu_n - 1}{1 + \mu_n^2} - \frac{1}{2}(\mu_n - 1) \\ &= (\mu_n - 1) \left(\frac{1}{1 + \mu_n^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= (\mu_n - 1) \times \frac{2 - 1(1 + \mu_n^2)}{2(1 + \mu_n^2)} \\ &= (\mu_n - 1) \times \frac{1 - \mu_n^2}{2(1 + \mu_n^2)} \end{aligned}$$

On a déjà simplifié $\mu_{n+1} - 1$ en première question

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مَا كُنْتُ
رَبِّيَ بِنِي صَغِيرًا

Et d'après le résultat de la question 1, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_n > 1$

Donc, on aura : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}); \mu_n - 1 > 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); 2(1 + \mu_n^2) > 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); 1 - \mu_n^2 < 0 \end{cases}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); (\mu_n - 1) \times \frac{1 - \mu_n^2}{2(1 + \mu_n^2)} < 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(\mu_n - 1) < 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(\mu_n - 1)$

④ ~ Calculons $\lim \mu_n$

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < \mu_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(\mu_n - 1)$

Donc :

Ici, nous avons sauté une question importante

Si : $0 \leq |\mu_{n+1} - l| \leq q \cdot |\mu_n - l|$

Alors : $0 \leq |\mu_n - l| \leq |\mu_0 - l| \cdot q^n$

Il faut que tous les membres soient positifs, ce qui est réalisé dans

$$0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 1)$$

$$0 < u_2 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_1 - 1)$$

$$0 < u_3 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_2 - 1)$$

$$0 < u_4 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_3 - 1)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$$

$$0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Et puisque $\lim 0 = 0$ et $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Alors, d'après les critères de convergence $\lim u_n - 1 = 0$

D'où $\lim u_n = 1$



EXERCICE 25

Suites adjacentes

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; n \in \mathbb{N}. \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > u_n$
2. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante
 b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $w_n = v_n - u_n$
 a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique
 b. En déduire que $\lim (v_n - u_n) = 0$
4. Soit (t_n) la suite définie par: $t_n = 2u_n + 3v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
 a. Montrer que la suite (t_n) est constante.
 b. En déduire $\lim u_n$ et $\lim v_n$
 c. Exprimer u_n et v_n en fonction de n

CORRECTION

① Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > u_n$

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0=0$ et $v_0=5$

Donc $v_0 > u_0$

Donc, la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $v_n > u_n$

Et montrons que $u_{n+1} > v_{n+1}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{2(u_n + 2v_n) - 3(u_n + v_n)}{6} \\ &= \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} \\ &= \frac{v_n - u_n}{6} \end{aligned}$$



Or $v_n > u_n$, d'après la supposition

Donc: $\frac{v_n - u_n}{6} > 0$

Et par suite: $\frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{6} > 0$

Donc: $v_{n+1} > u_{n+1}$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > u_n$

② $n \in \mathbb{N}$

La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, on a:

$(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > u_n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{v_n - u_n}{2} > 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n > 0$

D'où (u_n) est une suite croissante

La monotonie de (v_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+2} + 2v_n}{3} - v_n \\ &= \frac{u_{n+2} + 2v_n - 3v_n}{3} \\ &= \frac{u_{n+2} - v_n}{3} \end{aligned}$$



Or: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > u_n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} - v_n < 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} - v_n < 0$

D'où (v_n) est une suite décroissante

En Déduisons que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

On a (u_n) est croissante

Donc (u_n) est minorée par son premier terme

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq u_0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 0$

Et on a (v_n) est décroissante

Donc (v_n) est majorée par son premier terme

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n \leq v_0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n \leq 5$

Et on sait que: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > u_n$

Donc, on aura: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n < v_n \leq 5$

On a (u_n) est une suite croissante et majorée par 5

Donc (u_n) est une suite convergente.

On a (v_n) est une suite décroissante et minorée par 0

Donc (v_n) est une suite convergente.

3. Montrons que (w_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{6}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{6}w_n \end{aligned}$$

On a déjà simplifier $v_{n+1} - u_{n+1}$ au question 1.

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$
 et son premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 5$

En Déduisons que $\lim (v_n - u_n) = 0$

Autrement dit $\lim w_n = 0$

On a (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = w_0 \cdot q^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$

Donc $\lim w_n = \lim 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ { car $\lim \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

D'où : $\lim (v_n - u_n) = 0$ { car $-1 < \frac{1}{6} < 1$

Remarque

<p>On a : $\lim (v_n - u_n) = 0$ Donc : $\lim v_n - \lim u_n = 0$ Donc : $\lim v_n = \lim u_n$</p>	<p>Ici, on peut séparer les limites, car (u_n) et (v_n) sont convergentes</p>
---	---

4) Montrons que (t_n) est une suite constante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $t_n = 2u_n + 3v_n$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } t_{n+1} &= 2u_{n+1} + 3v_{n+1} \\ &= 2 \times \frac{u_n + v_n}{2} + 3 \times \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= u_n + v_n + u_n + 2v_n \\ &= 2u_n + 3v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); t_{n+1} = t_n$

D'où (t_n) est une suite stationnaire.

En Déduisons $\lim u_n$ et $\lim v_n$

On a (t_n) est une suite constante.

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); t_n = t_0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); t_n = 2u_0 + 3v_0 = 15$

Et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2u_n + 3v_n = 15$

Par passage à la limite, on aura : $\lim (2u_n + 3v_n) = 15$

Donc : $2 \lim u_n + 3 \lim v_n = 15$



Et comme : $\lim v_n = \lim u_n$ D'après la remarque précédente

Donc : $2 \lim u_n + 3 \lim u_n = 15$

Donc : $5 \lim u_n = 15$

D'où $\lim u_n = \lim v_n = 3$

c_n Exprimons u_n et v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :
$$\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3v_n + 2u_n = t_n \end{cases} \iff \begin{cases} 2v_n - 2u_n = 2w_n & \textcircled{1} \\ 3v_n + 2u_n = t_n & \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow 2v_n - 2u_n + 3v_n + 2u_n = 2w_n + t_n$

Donc : $5v_n = 2w_n + t_n$

$= 2 \cdot 5 \left(\frac{1}{6}\right)^n + 15$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 3$

Et comme : $v_n - u_n = w_n$

Alors : $u_n = v_n - w_n$

Donc : $u_n = 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 3 - 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 3 - 3\left(\frac{1}{6}\right)^n$



EXERCICE 26

I/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$f(x) = \frac{3x}{x+1}$

$\textcircled{1}$ \sim Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;2]$

\hookrightarrow En déduire la monotonie de f

$\textcircled{2}$ \sim Étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0;2]$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu

$\textcircled{3}$ \sim Vérifier que : $\forall x \in [0;2]; f(x) \in [0;2]$

II/ Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\textcircled{1}$ \sim Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$

$\textcircled{2}$ \sim Montrer que (u_n) est une suite croissante

3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

CORRECTION

1. On a f est dérivable sur $[0;2]$ fonction rationnelle

Soit $x \in [0;2]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3x}{x+1}\right)' \\ &= \frac{(3x)'(x+1) - (x+1)'(3x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

D'où : $\forall x \in [0;2]; f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

6. La monotonie de f sur l'intervalle $[0;2]$

On a : $\forall x \in [0;2]; f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

Or : $\forall x \in [0;2]; (x+1)^2 > 0$ et $3 > 0$

Donc : $\forall x \in [0;2]; f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$

2. Étudions le signe de $f(x) - x$ sur $[0;2]$

Soit $x \in [0;2]$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) - x &= \frac{3x}{x+1} - x \\ &= \frac{3x - x(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{3x - x^2 - x}{x+1} \\ &= \frac{2x - x^2}{x+1} \\ &= \frac{x(2-x)}{x+1} \end{aligned}$$

On a : $x \in [0;2]$

Donc : $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

D'où : $\forall x \in [0;2]; f(x) - x \geq 0$

Interprétation graphique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي كَمَا
رَبَّيْنِي صَغِيرًا

On a : $\forall x \in [0; 2]; f(x) - x \geq 0$

Donc la courbe représentative de f est au dessus de la droite (D) d'équation $y=x$

③ ~ Vérifions que : $\forall x \in [0; 2]; f(x) \in [0; 2]$

Soit $x \in [0; 2]$

On a f est continue et strictement croissante sur $[0; 2]$

Donc $x \in [0; 2] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$$

D'où : $\forall x \in [0; 2]; f(x) \in [0; 2]$

On écrit : $\forall x \in [0; 2]; f(x) \in [0; 2]$
ou bien : $f([0; 2]) \subset [0; 2]$

II/

① ~ Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 1$

Donc $0 < u_0 < 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $0 < u_n < 2$

et montrons que : $0 < u_{n+1} < 2$

On a : $0 < u_n < 2$ d'après la supposition

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[0; 2]$

Alors $0 < u_n < 2 \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(2)$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 2$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f(u_n) = u_{n+1} \end{cases}$$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$

② ~ La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

Or d'après le résultat de la question 2 de la partie I/

on a : $\forall x \in [0; 2]; f(x) - x \geq 0$

Et puisque : $u_n \in [0; 2];$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ici, pour étudier la monotonie de la suite (u_n) , il faut juste connaître le signe de $f(x) - x$ sur $[0; 2]$

Alors: $f(u_n) - u_n \geq 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n \geq 0$

D'où (u_n) est une suite croissante.

Remarque

On peut aussi et aisément étudier la monotonie de (u_n) en utilisant la récurrence et le fait que la fonction doit être strictement croissante sur l'intervalle I contenant les termes de la suite (u_n) .

3. On a (u_n) est croissante et majorée par 2

Donc (u_n) est une suite convergente.

🐦 Déterminons $\lim u_n$

On a $u_0 \in [0; 2]$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Puisque : $\left\{ \begin{array}{l} \text{👉 } f \text{ est continue sur } [0; 2] \\ \text{👉 } f([0; 2]) \subset [0; 2] \\ \text{👉 } (u_n) \text{ est convergente.} \end{array} \right.$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ **Point fixe**

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff \frac{x(2-x)}{x+1} = 0 \\ &\iff x(2-x) = 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \\ &\iff (x=0 \text{ ou } (2-x)=0) \text{ et } x+1 \neq 0 \\ &\iff (x=0 \text{ ou } x=2) \text{ et } x \neq -1 \end{aligned}$$

Et puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$ et (u_n) est croissante

Alors: $\lim u_n = 2$

EXERCICE 27

A/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle

$$I = [4; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b_n Étudier la continuité de f sur l'intervalle I

1) a_n Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in I$

b_n En déduire que f est strictement croissante sur I

c_n Vérifier que : $(\forall x \in I); f(x) \in I$

2) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) d'équation $y=x$.

B) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

2) Montrer que (u_n) est une suite décroissante

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

CORRECTION

1) a_n Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{\infty}{\infty}$
Dans ce cas, il suffit de factoriser

b_n La continuité de f sur I

On a : $x \mapsto x$ est continue sur l'intervalle I
Comme étant polynôme.

Et : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle I

Car elle est sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x}-1$ est continue sur l'intervalle I

Et puisque : $(\forall x \in I); \sqrt{x}-1 \neq 0$ (s'annule en 1 et $1 \notin I$)

Alors f est continue sur l'intervalle I

Comme étant quotient de deux fonctions

2) a_n Calculons $f'(x)$

On a f est dérivable sur l'intervalle I

Car elle est sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Soit $x \in I$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x}-1} \right)' \\
 &= \frac{x' \times (\sqrt{x}-1) - x \times (\sqrt{x}-1)'}{(\sqrt{x}-1)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1 - x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1 - \frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}-1)^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-1)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x-4}{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

Ici, ça sera mieux de multiplier par le conjugué, pour avoir $(\sqrt{x}+2)$ qui est strictement positif et pour enlever la racine au numérateur.

D'où : $(\forall x \in I); f'(x) = \frac{x-4}{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$

b. La monotonie de f sur I .

On a : $(\forall x \in I); f'(x) = \frac{x-4}{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$

Et puisque : $(\forall x \in I); 2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2 > 0$ et $x-4 \geq 0$

Alors $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$

D'où f est strictement croissante sur I

c. Vérifions que : $(\forall x \in I); f(x) \in I$

Soit $x \in I$

On a f est strictement croissante sur I

Donc $x \in I \Rightarrow x \geq 4$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(4)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 4$$

$$\Rightarrow f(x) \in I$$

D'où : $(\forall x \in I); f(x) \in I$

3. La position relative de (C_f) et la droite $(D): y=x$

Étudions le signe de $f(x) - x$ sur I

Soit $x \in I$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x; y) \in I^2); x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{\sqrt{x}-1} - x \\ &= \frac{x - x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x(1-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مِثْلَ مَا كَرِهْتُمَا
رَبِّي إِنِّي صَغِيرٌ

On a : $x \geq 4$

Donc : $x > 0$, $2 - \sqrt{x} \leq 0$ et $\sqrt{x} - 1 > 0$

Donc : $\frac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} \leq 0$

D'où : $(\forall x \in I); f(x) - x \leq 0$

Et par suite (C_f) est au dessous de (D) sur l'intervalle I

B/

① Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 5$

Donc $u_0 > 4$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n > 4$

et montrons que : $u_{n+1} > 4$

On a : $u_n > 4$ d'après la supposition

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$

Alors $u_n > 4 \Rightarrow f(u_n) > f(4) \quad \begin{cases} f(4) = 4 \\ f(u_n) = u_{n+1} \end{cases}$
 $\Rightarrow u_{n+1} > 4$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

Ici, il faut toujours que f soit croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$

② La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

Or d'après le résultat de la question ③ de la partie I/

on a : $\forall x \in [4; +\infty[; f(x) - x \leq 0$

Et puisque : $u_n \in [4; +\infty[; \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

Ici, pour étudier la monotonie de la suite (u_n) , il faut juste connaître le signe de $f(x) - x$ sur $[4; +\infty[$

Alors: $f(u_n) - u_n \leq 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n \leq 0$

D'où (u_n) est une suite décroissante.

Remarque

On peut aussi et aisément étudier la monotonie de (u_n) en utilisant la récurrence et le fait que la fonction doit être strictement croissante sur l'intervalle I contenant les termes de la suite (u_n) .

③ Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 4
Alors (u_n) est convergente.

👉 Déterminons $\lim u_n$

On a $u_0 \in [4; +\infty[$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Puisque: $\begin{cases} \text{👉 } f \text{ est continue sur } [4; +\infty[\\ \text{👉 } f([4; +\infty[) \subset [4; +\infty[\\ \text{👉 } (u_n) \text{ est convergente.} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ **Point fixe**

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff \frac{x(2 - \sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1} = 0 \\ &\iff x(2 - \sqrt{x}) = 0 \text{ et } \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } 2 - \sqrt{x} = 0) \text{ et } \sqrt{x} \neq 1 \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 2) \text{ et } x \neq 1 \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } x = 4) \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

Et puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

Alors: $\lim u_n = 4$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي كَمَا
رَبَّيْنِي صَغِيرًا

EXERCICE 28

I/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$$

① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

\mathcal{E}_n Étudier la continuité de f sur $[0; +\infty[$

② \mathcal{N} α_n En utilisant la définition, montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

\mathcal{E}_n Montrer que : $f(I) \subset I$

\mathcal{C}_n Montrer que : $(\forall x \in I); f(x) \geq 2x$

II/ Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

① \mathcal{N} Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 0$

② \mathcal{N} Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq 2u_n$

③ \mathcal{N} En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 2^n$

④ \mathcal{N} Déterminer $\lim u_n$

CORRECTION

I/

① \mathcal{N} α_n Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x} = +\infty$$

Il suffit de remplacer.

\mathcal{E}_n La continuité de f

On a : $x \mapsto 4x^2 + x$ est continue sur I

Car c'est la restriction d'un polynôme.

Et $(\forall x \in I); 4x^2 + x \geq 0$

Donc $f: x \mapsto \sqrt{4x^2 + x}$ est continue sur l'intervalle I

② \mathcal{N} α_n La monotonie de f sur

Soient x et y deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x^2 < y^2 \text{ et } x < y \\ &\Rightarrow 4x^2 < 4y^2 \text{ et } x < y \\ &\Rightarrow 4x^2 + x < 4y^2 + y \\ &\Rightarrow \sqrt{4x^2 + x} < \sqrt{4y^2 + y} \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

f est strictement croissante sur I
 si et seulement si
 $(\forall (x; y) \in I^2);$
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

\mathcal{E}_n Montrons que : $f(I) \subset I$

On a f est continue et strictement croissante sur I

Donc: $f(I) = f([0; +\infty[)$
 $= [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$
 $= [0; +\infty[$

D'où: $f(I) \subset I$

c_n Montrons que: $(\forall x \in I); f(x) \geq 2x$

Soit $x \in [0; +\infty[$

On a $4x^2 + x \geq 4x^2$

Donc $\sqrt{4x^2 + x} \geq \sqrt{4x^2}$

D'où: $(\forall x \in I); f(x) \geq 2x$

II/

① Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 0$

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = 1$

Donc $0 < u_0 < 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n \geq 0$

et montrons que: $u_{n+1} \geq 0$

On a: $u_n \geq 0$ d'après la supposition

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Alors $u_n \geq 0 \Rightarrow f(u_n) \geq f(0)$
 $\Rightarrow u_{n+1} \geq 0$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(u_n) = u_{n+1} \end{cases}$$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 0$

② Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq 2u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $(\forall x \in I); f(x) \geq 2x$ d'après le résultat de la question ② c_n de la partie I/

Et puisque: $u_n \in I$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors: $(\forall n \in \mathbb{N}); f(u_n) \geq 2u_n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq 2u_n$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
 رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Remarquons que les deux membres de l'inégalité sont positifs

$$\sqrt{0} = |0| = \begin{cases} 0 & ; 0 \geq 0 \\ -0 & ; 0 \leq 0 \end{cases}$$

Ici; il faut toujours que f soit croissante sur l'intervalle $[0; 2]$

3) Déduisons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 2^n$

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$

Donc $u_0 \geq 2^0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $u_n \geq 2^n$

Et on montre que $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$

On a $u_n \geq 2^n$, d'après la supposition

Donc $2u_n \geq 2 \cdot 2^n$

Donc $2u_n \geq 2^{n+1}$

Et puisque $u_{n+1} \geq 2u_n$

Alors : $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 2^n$

4) Déterminons $\lim u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 2^n$

Et puisque $\lim 2^n = +\infty$ car $2 > 1$

Alors $\lim u_n = +\infty$



EXERCICE 29

I/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+12}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Étudier la monotonie de f sur $[4; +\infty[$

3) Vérifier que : $f(I) \subset I$

II/ Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 24 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

2) Montrer par récurrence que (u_n) est une suite décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

- ③ ~ Déterminer $\lim u_n$
- III/ ① ~ Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$
- ② ~ En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8} (u_n - 4)$
- ③ ~ Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$
- ④ ~ En déduire la limite de la suite (u_n)

CORRECTION

① ~ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+12}$$

$= +\infty$

② ~ La monotonie de f sur l'intervalle $[4; +\infty[$

Soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x + 12 < y + 12 \\ &\Rightarrow \sqrt{x + 12} < \sqrt{y + 12} \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$

③ ~ Vérifions que: $f(I) \subset I$

On a f est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$

$$\begin{aligned} f(I) &= f([4; +\infty[) \\ &= [f(4); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [4; +\infty[\end{aligned}$$

Donc: $f(I) = I$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

II/

① ~ Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = 24$

Donc $u_0 > 4$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n > 4$

Ici, il faut toujours que f soit croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$

et montrons que: $u_{n+1} > 4$

On a: $u_n > 4$ d'après la supposition

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u_n > 4 &\Rightarrow f(u_n) > f(4) && \begin{cases} f(4) = 4 \\ f(u_n) = u_{n+1} \end{cases} \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 4 \end{aligned}$$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

2. Montrons par récurrence que (u_n) est décroissante

Pour cela, il faut montrer que $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = 24$

$$\text{et } u_1 = f(u_0) = \sqrt{u_0 + 12} = \sqrt{36} = 6$$

Donc $u_1 \leq u_0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_{n+1} \leq u_n$

et montrons que: $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Cette méthode est toujours valable dans le cas $u_{n+1} = f(u_n)$

On a: $u_{n+1} \leq u_n$ d'après la supposition

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u_{n+1} \leq u_n &\Rightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n) && \begin{cases} f(u_{n+1}) = u_{n+2} \\ f(u_n) = u_{n+1} \end{cases} \\ &\Rightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie pour $n+1$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq u_n$

Et par suite (u_n) est une suite décroissante

Puisque (u_n) est une suite décroissante et minorée par 4

Alors (u_n) est convergente.

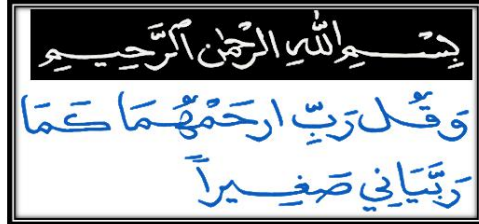
3. Déterminons $\lim u_n$

On a $u_0 \in [4; +\infty[$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Puisque: $\begin{cases} \rightarrow f \text{ est continue sur } [4; +\infty[\\ \rightarrow f([4; +\infty[) \subset [4; +\infty[\\ \rightarrow (u_n) \text{ est convergente.} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ **Point fixe**

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{x+12} = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+12}^2 = x^2 \\ &\Leftrightarrow x+12 = x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \end{aligned}$$



Considérons l'équation : $x^2 - x - 12 = 0$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 49$

On a $\Delta > 0$

Donc l'équation $x^2 - x - 12 = 0$ admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3$$

Donc : $f(x) = x \Leftrightarrow x = 4$ ou bien $x = -3$

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$

Alors $\lim u_n = 4$

III/ ① Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 4 &= \sqrt{u_n + 12} - 4 \\ &= \frac{(\sqrt{u_n + 12} - 4)(\sqrt{u_n + 12} + 4)}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \\ &= \frac{u_n + 12 - 16}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \\ &= \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$$

② Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_n \geq 4 \Rightarrow u_n + 12 \geq 16$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n + 12} \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n + 12} + 4 \geq 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \leq \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$$



Et d'après le résultat de la question précédente

on aura : $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$

3) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$

Initialisation

Pour $n=0$

On a : $u_0 - 4 = 24 - 4 = 20$

Et : $\frac{20}{8^0} = \frac{20}{1} = 20$

Donc : $u_0 - 4 \leq \frac{20}{8^0}$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$

et montrons que : $u_{n+1} - 4 \leq \frac{20}{8^{n+1}}$

On a : $u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$ d'après la supposition

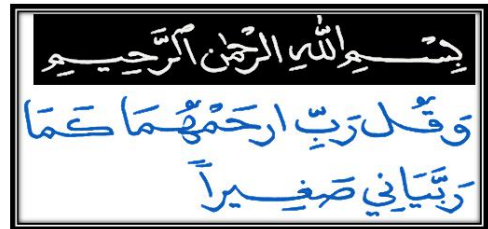
Donc : $\frac{1}{8}(u_n - 4) \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{20}{8^n}$

Donc : $\frac{1}{8}(u_n - 4) \leq \frac{20}{8^{n+1}}$

Et puisque : $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$

Alors : $u_{n+1} - 4 \leq \frac{20}{8^{n+1}}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$



4) D'après le résultat de la question précédente, on a

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 4 > 0$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 4 \leq \frac{20}{8^n}$

Et puisque $\lim 0 = 0$ et $\lim \frac{20}{8^n} = 0$ car $\lim 8^n = +\infty$

Alors, d'après le théorème de gendarme $\lim (u_n - 4) = 0$

D'où : $\lim u_n = 4$

EXERCICE 30

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 + \sqrt{3} \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = (5 + \sqrt{3})u_{n+1} - \sqrt{3}u_n; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) On a Calculer u_2

On vérifie que u_0, u_1 et u_2 , dans cet ordre, sont des termes consécutif d'une suite géométrique.

2) On a Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (2 - \sqrt{3})u_n$

On écrit u_n en fonction de n

On détermine $\lim u_n$

CORRECTION

1) On a : $u_{n+2} = (5 + \sqrt{3})u_{n+1} - \sqrt{3}u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On prend $n=0$

$$\begin{aligned} \text{On aura : } u_2 &= (5 + \sqrt{3})u_1 - \sqrt{3}u_0 \\ &= 5 + \sqrt{3} - \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \\ &= 5 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3 \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

On a : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$

Donc : $u_1 = (2 - \sqrt{3})u_0$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$$

Donc : $u_2 = (2 - \sqrt{3})u_1$

D'où u_0, u_1 et u_2 , dans cet ordre, sont des termes consécutif d'une suite géométrique de raison $q = (2 - \sqrt{3})$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (2 - \sqrt{3})u_n$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_1 = 1$ et $u_0 = 2 + \sqrt{3}$

et $(2 - \sqrt{3})u_0 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1 = u_1$

Donc : $u_1 = (2 - \sqrt{3})u_0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

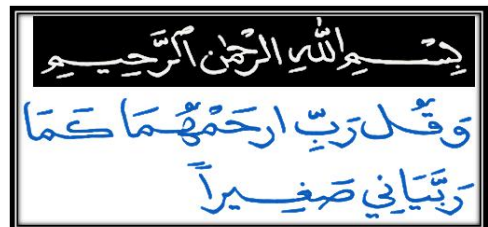
Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_{n+1} = (2 - \sqrt{3})u_n$

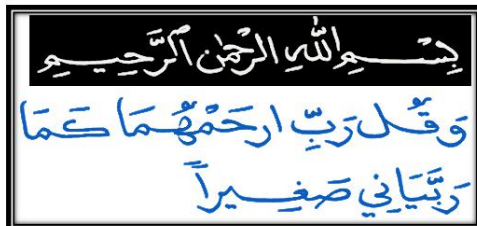
et montrons que : $u_{n+2} = (2 - \sqrt{3})u_{n+1}$

On a : $u_{n+1} = (2 - \sqrt{3})u_n$

Donc : $u_n = \frac{u_{n+1}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})u_{n+1}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{(2 + \sqrt{3})u_{n+1}}{1} = (2 + \sqrt{3})u_{n+1}$



$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } \mu_{n+2} &= (5 + \sqrt{3})\mu_{n+1} - \sqrt{3}\mu_n \\
 &= (5 + \sqrt{3})\mu_{n+1} - \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})\mu_{n+1} \\
 &= ((5 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}))\mu_{n+1} \\
 &= (5 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3)\mu_{n+1} \\
 &= (2 - \sqrt{3})\mu_{n+1}
 \end{aligned}$$



Donc la proposition est vraie pour $n+1$

Et d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} = (2 - \sqrt{3})\mu_n$

b_n Exprimons μ_n en fonction de n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_{n+1} = (2 - \sqrt{3})\mu_n$

Donc (μ_n) est une suite géométrique de raison $q = (2 - \sqrt{3})$

et son premier terme : $\mu_0 = 2 + \sqrt{3}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_n = \mu_0 \cdot q^n$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}); \mu_n &= (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})^n \\
 &= (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})^{n-1}
 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); \mu_n = (2 - \sqrt{3})^{n-1}$

c_n Déterminons $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{3})^{n-1}$$

Or on a : $-1 < 2 - \sqrt{3} < 1$

D'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$

EXERCICE 31

On définit les deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 7 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit (D) une droite munie d'un repère $(O; \vec{v})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n

1. Placer les points A_0, A_1, B_0 et B_1

2. Soit (μ_n) la suite définie par $\mu_n = b_n - a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que (μ_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b. Écrire μ_n en fonction de n .

3. a. Comparer a_n et b_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b_n Étudier la monotonie de (a_n) et de (b_n)

c_n Interpréter géométriquement ces résultats.

4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers la même limite

5. Soit (v_n) la suite définie par: $v_n = a_n + b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 a_n Montrer que (v_n) est une suite constante.

b_n En déduire que les segments $[A_n B_n]$ ont le même milieu

c_n Déterminer la limite commune de (a_n) et (b_n)

d_n Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

CORRECTION

1. Représentation des points A_0, A_1, B_0 et B_1 .

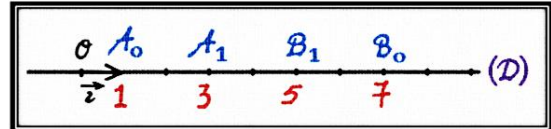
On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$

Donc $A_0(1)$ et $B_0(7)$

Calculons a_1 et b_1

$$a_1 = \frac{2}{3} = 3 \text{ et } b_1 = \frac{15}{3} = 5$$

Donc $A_1(3)$ et $B_1(5)$



2. a_n Montrons que (u_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a } u_n = b_n - a_n$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= \frac{a_n + 2b_n}{3} - \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= \frac{a_n + 2b_n - (2a_n + b_n)}{3} \\ &= \frac{a_n + 2b_n - 2a_n - b_n}{3} \\ &= \frac{b_n - a_n}{3} \\ &= \frac{1}{3} u_n \end{aligned}$$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$
 et son premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

b_n Exprimons u_n en fonction de n .

On a (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n &= u_0 \times q^n \\ &= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 6 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

③ a_n Comparons a_n et b_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après le résultat de la question précédente

$$\text{On a: } u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$$

$$\text{Et puisque: } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = b_n - a_n$$

$$\text{Alors: } (\forall n \in \mathbb{N}); b_n - a_n > 0$$

$$\text{D'où: } (\forall n \in \mathbb{N}); b_n > a_n$$

b_n La monotonie de (a_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n \\ &= \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} \\ &= \frac{b_n - a_n}{3} \end{aligned}$$

Et d'après le résultat de la question précédente

$$\text{on a: } (\forall n \in \mathbb{N}); b_n > a_n$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{b_n - a_n}{3} > 0$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}); a_{n+1} - a_n > 0$$

D'où (a_n) est une suite croissante

🐦 La monotonie de (b_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a Donc Donc

$$\begin{aligned} \text{On a: } b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + 2b_n}{3} - b_n \\ &= \frac{a_n + 2b_n - 3b_n}{3} \\ &= \frac{a_n - b_n}{3} \\ &= \frac{-(b_n - a_n)}{3} \end{aligned}$$

Si (v_n) est géométrique de raison q

$$\text{Alors } v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

On prend v_p : le premier terme

On peut aussi utiliser le raisonnement par récurrence pour prouver que: $(\forall n \in \mathbb{N}); b_n > a_n$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي كَمَا
رَبَّنِي صَغِيرًا

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); b_n > a_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{-(b_n - a_n)}{3} < 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); b_{n+1} - b_n < 0$

D'où (b_n) est une suite décroissante

4. Interprétation graphique

Graphiquement, la suite des points A_n avance vers la droite et la suite des points B_n se déplace vers la gauche, mais les points A_n demeurent en permanence à gauche des points B_n .

4. Montrons que (a_n) et (b_n) sont convergentes vers la même limite

Montrons d'abord que (a_n) et (b_n) sont convergentes.

On a (a_n) est une suite croissante

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n \geq a_0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n \geq 1$

Et on a (b_n) est une suite décroissante

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); b_n \leq b_0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); b_n \leq 7$

Et d'après le résultat de la question 3. $a_n < b_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); b_n > a_n$

Donc, on aura : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq a_n < b_n \leq 7$

Puisque (a_n) est une suite croissante et majorée par 7

Alors (a_n) est convergente.

Puisque (b_n) est une suite décroissante et minorée par 1

Alors (b_n) est convergente.

Montrons que $\lim a_n = \lim b_n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Donc : $\lim u_n = 0$ (Car $-1 < \frac{1}{3} < 1$)

Et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = b_n - a_n$

Donc $\lim (b_n - a_n) = 0$

Et puisque (a_n) et (b_n) sont convergentes

Alors $\lim b_n - a_n = \lim b_n - \lim a_n$

Si (u_n) et (v_n) sont convergentes

Alors :

$\lim (\alpha u_n + \beta v_n) =$

$\alpha \lim u_n + \beta \lim v_n$

avec, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Donc: $\lim b_n - a_n = 0 \iff \lim b_n - \lim a_n = 0$
 $\iff \lim b_n = \lim a_n$

D'où, (a_n) et (b_n) sont convergentes vers la même limite.

5) a_n Montrons que (v_n) est constante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_n = a_n + b_n$

Donc $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$

D'où
$$\begin{aligned} &= \frac{2a_n + b_n}{3} + \frac{a_n + 2b_n}{3} \\ &= \frac{2a_n + b_n + a_n + 2b_n}{3} \\ &= \frac{3a_n + 3b_n}{3} \\ &= \frac{3(a_n + b_n)}{3} \\ &= a_n + b_n \\ &= v_n \end{aligned}$$

D'où (v_n) est constante.

b_n Soit $n \in \mathbb{N}$

Soit I_n le milieu du segment $[A_n B_n]$ et i_n l'abscisse de I_n

Donc: $i_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_n}{2}$

Et puisque (v_n) est constante.

Alors: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 = a_0 + b_0 = 1 + 7 = 8$

Donc $i_n = \frac{v_0}{2} = \frac{8}{2} = 4$

D'où les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu

c_n Déterminons la limite commune de (a_n) et (b_n)

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 8$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n + b_n = 8$

Par passage à la limite, on aura $\lim (a_n + b_n) = 8$

Donc: $\lim a_n + \lim b_n = 8$

Donc: $2 \lim a_n = 8$

Donc: $\lim a_n = 4$

D'où: $\lim b_n = \lim a_n = 4$

d_n Exprimons a_n et b_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que (v_n) est constante il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$ q est la raison de (v_n)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
 رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Car (a_n) et (b_n) sont convergentes et $\lim b_n = \lim a_n$

On a : $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et $u_n = b_n - a_n$

Donc $b_n - a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Et on a $b_n + a_n = 8$

$$\text{Donc } \begin{cases} b_n - a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ a_n + b_n = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = a_n + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ a_n + a_n + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = a_n + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 2a_n = 8 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = a_n + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}); a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); b_n = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا
رَبَّيْنِي صَغِيرًا

EXERCICE 32

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

avec α un réel tel que : $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$

On pose $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = \frac{1}{\alpha^n} u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $\alpha \neq 1$ Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \alpha$

b_n Exprimer v_n en fonction de n

2) $\alpha \neq 1$ Montrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{\alpha}$

b_n Exprimer w_n en fonction de n

c_n En déduire u_n en fonction de n

③ $\alpha > 1$ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{n+1} \leq 2\alpha u_n$
 En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq (2\alpha)^{n-1}$, puis déterminer $\lim u_n$

CORRECTION

① $\alpha > 1$ Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$

Donc : $v_{n+1} = u_{n+2} - \alpha u_{n+1}$
 $= 2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n - \alpha u_{n+1}$
 $= \alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n$
 $= \alpha (u_{n+1} - \alpha u_n)$
 $= \alpha v_n$

Pour montrer que (v_n) est il faut juste calculer v_{n+1} et trouver $v_{n+1} = q v_n$
 q est la raison de (v_n)

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \alpha$ et son premier terme : $v_0 = u_1 - \alpha u_0 = 1$

En exprimons v_n en fonction de n

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \alpha$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \cdot \alpha^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \alpha^n$

② $\alpha > 1$ Montrons que (w_n) est une suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $w_n = \frac{1}{\alpha^n} u_n$

Donc : $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}} u_{n+1} - \frac{1}{\alpha^n} u_n$
 $= \frac{1}{\alpha^{n+1}} (u_{n+1} - \alpha u_n)$
 $= \frac{1}{\alpha^{n+1}} v_n$
 $= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \cdot \alpha^n$
 $= \frac{1}{\alpha}$

Pour montrer que (w_n) est arithmétique il suffit de trouver un réel r tel que $w_{n+1} - w_n = r$
 r est la raison de (w_n)

D'où (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{\alpha}$

et son premier terme : $w_0 = \frac{1}{\alpha^0} u_0 = 0$

$\alpha^0 = 1$ car $\alpha \neq 0$

En exprimons w_n en fonction de n

On a (W_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{a}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); W_n = W_0 + nr$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); W_n = \frac{n}{a}$

C_n Déduisons u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $W_n = \frac{1}{a^n} u_n$

Donc: $u_n = a^n \cdot W_n = a^n \cdot \frac{n}{a} = n \cdot a^{n-1}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = n \cdot a^{n-1}$

Si (W_n) est arithmétique de raison r alors:

$W_n = W_p + (n-p)r$

Et on prend $p=0$

③ $a > 1$ Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{n+1} \leq 2a u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_n = n a^{n-1}$

Donc: $u_{n+1} = (n+1) a^n = n a^n + a^n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} > 0$ ①

Et on a: $u_{n+1} - 2a u_n = n a^n + a^n - 2a \cdot n a^{n-1}$
 $= n a^n + a^n - 2n a^n$
 $= a^n - n a^n$
 $= (1-n) a^n$

$a \cdot a^{n-1} = a^n$

Et puisque $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0; \frac{1}{2}[$

Alors $n \geq 1$

Donc: $(1-n) a^n \leq 0$

Donc: $u_{n+1} - 2a u_n \leq 0$

Donc: $u_{n+1} \leq 2a u_n$ ②

D'après ① et ②, on déduit que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{n+1} \leq 2a u_n$

E_n Déduisons - par récurrence - que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq (2a)^{n-1}$

Initialisation

Pour $n=1$, on a: $u_1 = 1$ et $(2a)^{1-1} = 1$

Donc: $0 < u_1 \leq (2a)^{1-1}$

Donc la proposition est vraie pour $n=1$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $0 < u_n \leq (2a)^{n-1}$

et montrons que: $0 < u_{n+1} \leq (2a)^n$

On a: $u_n \leq (2a)^{n-1}$ d'après la supposition

Donc: $2a u_n \leq 2a (2a)^{n-1}$

$2a > 0$



Donc : $2a u_n \leq (2a)^n$

Et comme : $0 < u_{n+1} \leq 2a u_n$

Alors : $0 < u_{n+1} \leq (2a)^n$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq (2a)^{n-1}$

Déterminons $\lim u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq (2a)^{n-1}$

Et : $a \in]0; \frac{1}{2}[\iff 2a \in]0; 1[$

Donc $\lim (2a)^{n-1} = 0$ et $\lim 0 = 0$

D'après les critères de convergence - Théorème de gendarme - on aura : $\lim u_n = 0$

Remarque

Vous pouvez poser beaucoup d'exercices de ce type en donnant des valeurs au réel a tel que $a \in]0; \frac{1}{2}[$

EXERCICE 33

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{a^n u_n + a}, n \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } a > 1) \end{cases}$$

On pose : $v_n = \frac{1}{a^n u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$
 b. Étudier la monotonie de la suite (u_n)
 c. En déduire que (u_n) est convergente.
- 2) a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{a}$
 b. Écrire v_n en fonction de n , puis déduire u_n en fonction de n
 c. Déterminer $\lim u_n$

CORRECTION

- 1) a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$

Donc : $u_0 > 0$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n > 0$

et montrons que: $u_{n+1} > 0$

On a: $a > 1$ et $u_n > 0$ d'après la supposition

Donc: $a^n u_n + a > 0$

$$\text{Donc: } \frac{1}{a^n u_n + a} > 0$$

$$\text{Donc: } \frac{u_n}{a^n u_n + a} > 0$$

$$\text{Donc: } u_{n+1} > 0$$

D'où, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

b_n La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_n > 0$

$$\text{Donc: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{a^n u_n + a} \cdot \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a^n u_n + a}$$

On sait que: $u_n > 0$ et $a > 1$

Donc: $a^n u_n > 0$ et $a > 1$

Donc: $a^n u_n + a > 1$

$$\text{Donc: } \frac{1}{a^n u_n + a} < 1$$

$$\text{Donc: } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ et } u_n > 0$$

D'où (u_n) est une suite décroissante

c_n Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 0

Alors (u_n) est convergente

2_n Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a: } v_n = \frac{1}{a^n u_n}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{a^{n+1} u_{n+1}} - \frac{1}{a^n u_n} \\ &= \frac{1}{a^{n+1} \cdot \frac{u_n}{a^n u_n + a}} \\ &= \frac{1}{a^{n+1} u_n} - \frac{1}{a^n u_n} \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مِمَّا كَتَمْتُ
رَبِّيَ بِي صَغِيرًا

Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs, alors:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est décroissante.}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

Pour montrer que (v_n) est arithmétique il suffit de trouver un réel r tel que $v_{n+1} - v_n = r$
 r est la raison de (v_n)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^n u_n + a}{a^{n+1} u_n} - \frac{a}{a^{n+1} u_n} \\
 &= \frac{a^n u_n + a - a}{a^{n+1} u_n} \\
 &= \frac{a^n u_n}{a^{n+1} u_n} \\
 &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{a}$
 et son premier terme $v_0 = \frac{1}{a^0 u_0} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$

b_n Exprimons v_n en fonction de n

On a (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{a}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 + nr$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 1 + \frac{n}{a}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{n+a}{a}$

Si (v_n) est arithmétique
de raison r alors:

$$v_n = v_p + (n-p)r$$

Et on prend $p=0$

c_n Exprimons u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $v_n = \frac{1}{a^n u_n}$

Donc: $u_n = \frac{1}{a^n v_n} = \frac{1}{a^n \cdot \frac{n+a}{a}} = \frac{1}{a^{n-1} \cdot a \cdot \frac{n+a}{a}} = \frac{1}{(n+a)a^{n-1}}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{(n+a)a^{n-1}}$

c_n Déterminons $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{(n+a)a^{n-1}}$$

On a: $\lim (n+a) = +\infty$ et $\lim a^{n-1} = +\infty$ car $a > 1$

Donc: $\lim (n+a)a^{n-1} = +\infty$

D'où: $\lim u_n = 0$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْنِي مَا كُنْتُ
رَبِّيَ ابْنِي صَغِيرًا

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

Principe de raisonnement par récurrence

Pour montrer que la proposition : $(\forall n \geq n_0); P_n$ est vraie, on suit les étapes suivantes :

- 1^{ère} étape : On vérifie que P_{n_0} est vraie pour n_0
- 2^{ème} étape : On suppose que P_n est vraie, et on montre que P_{n+1} est vraie.
- 3^{ème} étape : On donne la conclusion suivante:
D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \geq n_0); P_n$

Suite croissante ~ Suite décroissante

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $(\forall n \geq n_0); u_{n+1} \geq u_n$
 Pour montrer que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante, il suffit de prouver que :
 - $(\forall n \geq n_0); u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou bien
 - $(\forall n \geq n_0); \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, si $(\forall n \geq n_0); u_n > 0$
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $(\forall n \geq n_0); u_{n+1} \leq u_n$
 Pour montrer que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante, il suffit de prouver que :
 - $(\forall n \geq n_0); u_{n+1} - u_n \leq 0$ ou bien
 - $(\forall n \geq n_0); \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, si $(\forall n \geq n_0); u_n > 0$
- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante, alors : $(\forall n \geq n_0); u_n \geq u_{n_0}$
- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante, alors : $(\forall n \geq n_0); u_n \leq u_{n_0}$

Suites numériques

بقلم الأستاذ: البشير الحجلاوي ثانوية الميمنة الخضراء

Suite minorée ~ Suite majorée

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée par un réel m si : $(\forall n \geq n_0); u_n \geq m$
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée par un réel M si : $(\forall n \geq n_0); u_n \leq M$
- Pour montrer que : $(\forall n \geq n_0); u_n \geq m$, ou bien $(\forall n \geq n_0); u_n \leq M$, on utilise :
 - La différence ou bien
 - La récurrence

Suite arithmétique ~ Suite géométrique

Suite arithmétique	Suite géométrique
Une suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique si ; il existe un réel r (raison) tel que : $(\forall n \geq n_0); v_{n+1} = v_n + r$	Une suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique si ; il existe un réel q (raison) tel que : $(\forall n \geq n_0); v_{n+1} = q \times v_n$
Pour montrer que $(v_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique, on calcul $v_{n+1} - v_n$ $v_{n+1} - v_n = \dots = \dots = r$	Pour montrer que $(v_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique, on calcul v_{n+1} $v_{n+1} = \dots = \dots = q \times v_n$
Expression de v_n en fonction de n	
$(\forall n \geq n_0); v_n = v_{n_0} + (n - n_0)r$	$(\forall n \geq n_0); v_n = v_{n_0} \times q^{n - n_0}$
Calcul de : $S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$	
$S_n = \frac{n - p + 1}{2} \times (v_p + v_n)$	$S_n = v_p \times \frac{1 - q^{n - p + 1}}{1 - q}$



Limite d'une suite

- ☛ Toute suite croissante et majorée ($u_n \leq M$) est convergente
- ☛ Toute suite décroissante et minorée ($u_n \geq m$) est convergente

$(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites telles que: $(\forall n \geq n_0); u_n \leq v_n$

☛ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

☛ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$(a_n)_{n \geq n_0}$, $(b_n)_{n \geq n_0}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ trois suites telles que:

$$(\forall n \geq n_0); a_n \leq u_n \leq b_n$$

☛ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , \text{ si } -1 < q < 1 \\ +\infty & , \text{ si } q > 1 \\ 1 & , \text{ si } q = 1 \\ \text{n'existe pas} & , \text{ si } q \leq -1 \end{cases}$$

Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle définie par:

$$u_{n_0} \in I \text{ et } (\forall n \geq n_0); u_{n+1} = f(u_n)$$

- Si: $\begin{cases} \text{☛ } f \text{ est continue sur } I \\ \text{☛ } f(I) \subset I \\ \text{☛ } (u_n) \text{ est convergente vers } l \in I \end{cases}$

Alors l est la solution dans I de l'équation: $f(x) = x$

Suites numériques

Suite de la forme $v_n = f(u_n)$

Si une suite (u_n) est convergente vers l , et f est une fonction continue en l

Alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(l)$

تَسْأَلُكُمْ الدُّعَاءُ

بقلم الأستاذ: المشير العجلاوي ثانوية الميمنة الخضراء