

## EXERCICES DE PROBABILITÉ

### EXERCICE 1

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s). On définit les événements suivants :

$D_1$  : « le dé indique 1 »       $D_2$  : « le dé indique 2 »  
 $D_3$  : « le dé indique 3 »       $G$  : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que  $p(A) \neq 0$ , on note  $p_A(B)$  la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. (a) Déterminer les probabilités  $p_{D_1}(G)$ ,  $p_{D_2}(G)$ , et  $p_{D_3}(G)$   
 (b) Montrer alors que  $p(G) = \frac{23}{180}$ .
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à  $10^{-2}$  près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

### EXERCICE 2

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  contenant des boules indiscernables au toucher.

$U_1$  contient  $k$  boules blanches ( $k$  entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

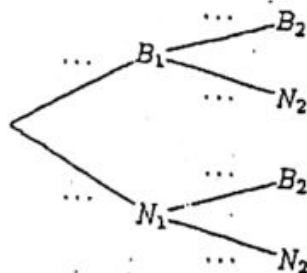
$U_2$  contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans  $U_1$  et on la place dans  $U_2$ . On tire ensuite, au hasard, une boule dans  $U_2$ . L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note  $B_1$  (respectivement  $N_1$ ) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne  $U_1$  ».

On note  $B_2$  (respectivement  $N_2$ ) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne  $U_2$  ».

1. (a) Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement  $B_2$  est égale à  $\frac{3k+6}{4k+12}$ .

Dans la suite on considère que  $k = 12$ .

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.

Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.

Si non, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

(a) Montrer que les valeurs possibles de  $X$  sont 4 et -8.

(b) Déterminer la loi de probabilité de la variable  $X$ .

(c) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

(d) Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe  $n$  fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne  $U_1$  contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne  $U_2$  contient 2 boules blanches et 1 noire.

Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier  $n$  pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement  $B_2$  soit supérieure ou égale à 0,99.

### EXERCICE 3

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

(a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

(b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

(c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne.

(a) Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3<sup>e</sup> boule tirée est noire » vaut  $\frac{1}{4}$ .

(b) Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

### EXERCICE 4

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B. Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B. Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.

On considère les événements suivants :

$A_1$  « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

$A_2$  « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

$B_1$  « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

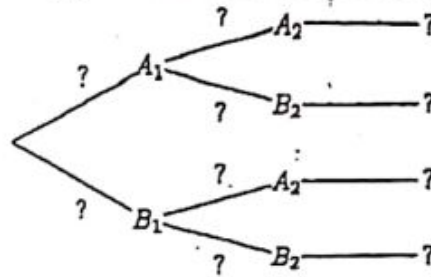
$B_2$  « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. (a) Calculer les probabilités suivantes :  $p(A_1)$  et  $p(A_2)$ .

(b) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :

$$p(A_2/A_1), p(A_2/B_1) \text{ et } p(A_1 \cap A_2)$$

(c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



(d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que  $p(A_2) = \frac{8}{11}$ .

2 Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

(b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .

### EXERCICE 5

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note son numéro  $x$  et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro  $y$  et on la remet dans le sac.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

à chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , le point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ .

On désigne par  $D$  le disque de centre  $O$  et de rayon 1,7.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

- Placer dans le plan muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  les points correspondant aux différents résultats possibles.
- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A « Le point  $M$  est sur l'axe des abscisses » ; B « Le point  $M$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 1 ».
- (a) Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme  $x^2 + y^2$ . Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ . Calculer son espérance mathématique  $E(X)$ .  
(b) Montrer que la probabilité de l'événement « le point  $M$  appartient au disque  $D$  » est égale à  $\frac{4}{9}$ .
- On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan. Quelle est la probabilité de l'événement suivant : C : « Au moins un de ces points appartient au disque  $D$  » ?
- On renouvelle  $n$  fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi  $n$  points du plan.  
Déterminer le plus petit entier  $n$  strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins un de ces points appartient à  $D$  » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

### EXERCICE 6

Une boîte contient 8 cubes :  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ gros rouge et } 3 \text{ petits rouges} \\ 2 \text{ gros verts et } 1 \text{ petit vert} \\ 1 \text{ petit jaune} \end{array} \right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur).

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
  - Calculer la probabilité de A.
  - Vérifier que la probabilité de B est égale à  $\frac{2}{7}$ .
- Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
  - Déterminer la loi de probabilité de X.
  - Calculer l'espérance mathématique de X.
- L'enfant répète  $n$  fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note  $P_n$  la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
  - Déterminer  $P_n$  en fonction de  $n$ .
  - Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $P_n \geq 0,99$ .

### EXERCICE 7

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». à la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon.

On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.

Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

- Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».
  - Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
  - Calculer la probabilité qu'exactly 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
  - Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
- Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac. On prélève au hasard une pièce du sac. On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».
  - Déterminer  $P(S)$ ,  $P_S(E)$  ; en déduire  $P(S \cap E)$ .
  - Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
  - Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».
- Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16. Le collectionneur prélève  $n$  pièces ( $n$  entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise. Calculer  $n$  pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

### EXERCICE 8

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- 4 jetons blancs marqués 0 ;
- 3 jetons rouges marqués 7 ;
- 2 jetons blancs marqués 2 ;
- 1 jeton rouge marqué 5 .

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les événements suivants :
  - A : « Les quatre numéros sont identiques ».
  - B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
  - C : « Tous les jetons sont blancs ».
  - D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
  - E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».
  - (a) Montrer que la probabilité de l'événement B, est  $\frac{4}{105}$ .
  - (b) Calculer la probabilité des événements A, C, D, E.
  - (c) On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B. On établit la règle de jeu suivante :
    - Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
    - Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
    - Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
    - Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.
 Pour tous les autres tirages, il perd 5 F. G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

### EXERCICE 9

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. Dans les questions 1. et 2. on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants :
  - A « Les trois boules sont rouges. »
  - B « Les trois boules sont de la même couleur. »
  - C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »
  - (a) Calculer les probabilités  $p(A)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .
  - (b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer  $E(X)$ .
2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc n + 5 boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants : D « Tirer deux boules rouges. » E « Tirer deux boules de la même couleur. »
  - (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

- (b) Calculer la probabilité de l'événement E,  $p(E)$  en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on  $p(E) \geq \frac{1}{2}$  ?

### EXERCICE 10

On considère plusieurs sacs de billes  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  tels que :

- le premier,  $S_1$ , contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants,  $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante

- on tire au hasard une bille dans  $S_1$  ;
- on place la bille tirée de  $S_1$  dans  $S_2$ , puis on tire au hasard une bille dans  $S_2$  ;
- on place la bille tirée de  $S_2$  dans  $S_3$ , puis on tire au hasard une bille dans  $S_3$  ;

- etc.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $E_n$  l'événement : « la bille tirée dans  $S_n$  est verte » et on note  $p(E_n)$  sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

(a) D'après l'énoncé, donner les valeurs de  $p(E_1)$ ,  $p_{E_1}(E_2)$ ,  $p_{\overline{E_1}}(E_2)$ .

En déduire la valeur de  $p(E_2)$ .

(b) à l'aide d'un arbre pondéré, exprimer  $p(E_{n+1})$  en fonction de  $p(E_n)$ .

2. étude d'une suite

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par 1.

(b) Démontrer que  $(u_n)$  est croissante.

(c) Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

3. évolution des probabilités  $p(E_n)$

(a) à l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités  $p(E_n)$ .

(b) Pour quelles valeurs de l'entier  $n$  a-t-on :  $0,49999 \leq p(E_n) \leq 0,57$

Un élève en Terminale Scientifique  
s'applique régulièrement et proprement.

Il ne s'adonne pas aux futilités et  
gère efficacement son temps.

Seul le travail assidu est gage de  
la réussite en Terminale Scientifique.

SEGBEGEE et SOKOU