

# NOTION DE PROBABILITÉ

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

## I- Introduction :

1°) Exemple :

On lance 2 fois en l'air un dé non pipé (normal), x et y font un pari.  
Si 6 apparaît alors x gagne 600Fr. Si 4 ou 5 apparaît alors y gagne 300Fr.  
Qui est favorisé dans ce jeu ?

On constate que x a « une chance » sur 6 de gagner 600Fr. Par contre y a  
« deux chances » sur 6 de gagner 300Fr.

6 numéros peuvent apparaître quand on lance un dé en l'air : c'est ce qu'on appelle les **cas possibles**. L'ensemble des cas possibles forment l'**Univers de probabilité**  $\Omega$  ;  
 $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ . Dans le cas de y, 2 numéros lui permettent de gagner 300Fr. On dit qu'il y'a 2 **cas favorables** pour y.

Conclusion :

Dans cet exemple l'issue de l'opération « lancer le dé en l'air » n'est pas certaine, on dit que c'est une **opération aléatoire**.

2°) Définitions ou vocabulaire :

- **Cas possibles** = résultats d'une épreuve ;
- **Univers de probabilité** = ensemble de cas possibles ;
- **Cas favorables** = situation qui est favorable ;
- **Évènement** = sous-ensemble de l'univers de probabilité ;

Exemple1 : Dans le lancé de dé  $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$  un évènement  $A = \{ 1 ; 3 ; 6 \}$ . Pour y les cas favorables sont : 4 et 5 ;  $B = \{ 4 ; 5 \}$  est un **évènement favorable** ;  $C = \{ 4 \}$  est un **évènement favorable**.

- **Évènement élémentaire ou éventualité** = sous-ensemble de  $\Omega$  ayant un seul élément.

Exemple2 : On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie normale. Déterminer le nombre de cas possibles.

Le nombre de cas possible  $\Omega = \{ PPP ; PFP ; FFP ; FFF ; FPF ; PFF ; FPP ; PPF \}$

Un cas possible est : { 3 lancers }  $\rightarrow$  { P, F } le nombre d'application :  $2^3 = 8$  ;

$X = \{ PFP \}$  est une éventualité.

- **Évènement impossible** = c'est un évènement qui ne peut pas se réaliser ; il est noté  $\phi$ .

**Exemple :** On tire au hasard 2 cartes d'un jeu normal de 32 cartes. Le nombre de cas favorables est  $C_{32}^2$ . « Avoir 2 As de cœur » est un évènement impossible.

- **Évènement certain** = évènement qui se réalise à coup sûr au cours d'une épreuve  
Par exemple « Avoir Pile (P) ou bien Face (F) en lançant une pièce de monnaie en l'air ».

- **Évènements équiprobables** = évènements ayant les mêmes chances de réalisation.

**Exemple :** On lance en l'air une pièce de monnaie 2 fois. Le nombre de cas possibles est  $2^2=4$ .  $\Omega = \{PP ; PF ; FF ; FP\}$ . Les évènements **A** = « avoir 0 fois P » et **B** = « avoir exactement 2 fois F » sont 2 évènements équiprobables.

## II- Probabilité :

Soit un  $\Omega$  univers d'éventualités équiprobables (on ne peut pas discerner les éventualités qu'après l'épreuve). Posons Card  $\Omega = n$ .

Soit A un évènement de  $\Omega$  tel que cardA = k .

- Définition :

La probabilité de réalisation de A est k réel notée P(A) définie par :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Nombre de cas Favorables}}{\text{Nombre de cas Possibles}}$$

$$k \leq n \Rightarrow \frac{k}{n} \leq \frac{n}{n}=1 \Rightarrow P(A) \leq 1 ; k \geq 0 \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{0}{n} = 0 \quad (n \neq 0) \Rightarrow P(A) \geq 0 \text{ d'où}$$
$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

## Remarques :

R<sub>1</sub>) La probabilité d'un évènement certain est égal à 1 ;  $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$ .

R<sub>2</sub>) La probabilité d'un évènement impossible est égal à 0.

## Exemple :

Dans un jeu normal de 32 cartes, on tire au hasard sans remise 3 cartes. Calculer la probabilité d'avoir exactement 2 Rois et 1 As parmi les 3 cartes tirées.

Réponse : le nombre de cas possibles est  $C_{32}^3$  et le nombre de cas favorable est :  $C_4^2 \times C_4^1$ . La probabilité de A = « d'avoir deux Rois et un As » est :

$$P(A) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_{32}^3} = \frac{24}{32 \times 155} = \frac{3}{620} = 0,004.$$

### III– Probabilité conditionnelle :

Soit  $\Omega$  un univers d'éventualités, A et B 2 évènements de  $\Omega$ .

#### 1°) Évènement Somme :

a) Définition 1 :

L'évènement somme de A, B est l'évènement noté :  $A \cup B$  « A ou B » qui est réalisé si et seulement si l'un au moins des évènements A ou B est réalisé.

Exemple : On lance en l'air un dé normal. C= « avoir 5 ou 4 » est la somme des évènements A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; C =  $A \cup B$ .

b) Définition 2 : On dit que 2 évènements A et B sont incompatibles si et seulement si ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple : Dans le lancé d'un dé, A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; A et B sont incompatibles,  $A \cap B = \phi$ .

c) Théorème 1 :

Soient A et B 2 évènements incompatibles d'un univers  $\Omega$ .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

#### Démonstration

Le nombre de cas possibles est  $\text{card } \Omega = n ; n \neq 0$ .

Le nombre de cas favorables : posons  $\text{card}A = k$  et  $\text{card}B = m$ .

$\text{Card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$  ;  $A \cap B = \phi \Rightarrow \text{card}(A \cup B) = k + m$ .

$$P(A \cup B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

Exemple: On tire au hasard 2 cartes d'un jeu normal de 32 cartes. Calculer la probabilité d'avoir 2 Dames ou 2 Rois.

Le nombre de cas possibles est  $C_{32}^2$ . Soit C = « avoir 2D ou 2R » et soient les évènements A = « avoir 2D » ; B = « avoir 2R ».

A et B sont incompatibles  $A \cap B = \phi$ . Donc  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} \text{ et } P(B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} ; P(A \cup B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} + \frac{C_4^2}{C_{32}^2} = 2 \frac{C_4^2}{C_{32}^2}.$$

## 2°) Évènement Contraire :

Soit  $\Omega$  un univers d'éventualités, A et B deux évènements de  $\Omega$ .

a) Définition 3 : On dit que l'évènement B est l'évènement contraire de A si et seulement si,  $\begin{cases} B \text{ est réalisé si } A \text{ ne l'est pas} \\ \text{et } A \text{ est réalisé si } B \text{ ne l'est pas} \end{cases}$  Notation :  $B = \overline{A}$ .

– Exemple 1 : Dans le lancé d'une pièce de monnaie, soient A = « avoir P » et B = « avoir F » ;  $B = \overline{A}$  et  $A = \overline{B}$ .

b) Théorème 2 :

Soit A un évènement d'un univers  $\Omega$ .  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .

### Démonstration

$$A \cap \overline{A} = \Phi ; A \cup \overline{A} = \Omega, \quad p(\overline{A} \cup A) = p(A) + p(\overline{A}) = 1 ; d'où \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Exemple 2 :

i) Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité pour qu'un joueur recevant 5 cartes au hasard ait au moins 1 cœur ?

ii) Même question avec au moins 2 cœurs ?

Solution :

i) A = « avoir au moins 1 cœur »  $\overline{A}$  = « avoir 0 cœur parmi les cartes tirées ».

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \text{ Calculons } P(\overline{A})$$

Nombre de cas possibles est  $C_{32}^5$  ; nombre de cas favorables  $C_{24}^5$ .

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}. \text{ Donc } P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}.$$

ii) A = « avoir au moins 2 cœurs »  $\overline{A}$  = « avoir 0 cœur ou 1 cœur ».

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \text{ Calculons } P(\overline{A})$$

B = « avoir 1 cœur parmi les cartes tirées » ; C = « avoir 0 cœur parmi les cartes tirées ».  $B \cup C = \overline{A}$  et  $B \cap C = \Phi$  donc  $P(\overline{A}) = P(B) + P(C)$ .

- P(B) : nombre de cas possibles =  $C_{32}^5$  ; nombre de cas favorables =  $C_8^1 \times C_{24}^4$ .

$$D'où P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4}{C_{32}^5}.$$

- P(C) : nombre de cas possibles =  $C_{32}^5$  ; nombre de cas favorables =  $C_8^0 \times C_{24}^5$ .

$$D'où P(C) = \frac{C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5}. \quad P(\overline{A}) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4 + C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5} \Leftrightarrow P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 0,37.$$

### 3°) Évènement Produit :

Soit  $\Omega$  un univers d'éventualités, A et B deux évènements de  $\Omega$ .

a) Définition 4 :

l'évènement produit des évènements A , B est l'évènement C noté  $A \cap B$  qui est réalisé si et seulement si, A et B sont simultanément réalisés.

Exemple :

un lancé de 2 dés C « avoir 6 et 5 » ; A= « avoir 5 » ; B = « avoir 6 » .  $C = A \cap B$ .

b) Théorème 3 :

Soient 2 évènements quelconques A et B.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Exemple : D'un jeu de 32 cartes on tire au hasard simultanément 2 cartes. Calculer la probabilité d'avoir un Roi ou un Valet parmi les cartes tirées.

### 4°) Probabilité conditionnelle - évènements indépendants :

Soient les évènements A et B d'un univers  $\Omega$  .

a) Définition 5 : La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre réel noté  $P(B/A)$  et définie par :  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  ;  $p(A) \neq 0$  .

Exemple : D'un jeu de 32 cartes on tire successivement 2 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir un as au 2<sup>ème</sup> tirage ?

a) Définition 6 :

Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si,

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) .$$

Remarque : En réalité dans le concret, 2 évènements A et B sont indépendants si la réalisation de A n'a aucune influence sur celle de B et réciproquement.

Exemple : d'un sac contenant des boules blanches et des boules noires on tire au hasard successivement en remettant chaque fois la boule tirée.

A = « avoir une boule blanche au 1<sup>er</sup> tirage »

B = « avoir une boule noire au 2<sup>ème</sup> tirage »

A et B sont indépendants. Deux évènements concrètement indépendants sont indépendants en probabilité.