

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2026

FILIERES INDUSTRIELLES : - HYGIENE ET SECURITE AU TRAVAIL
- SECURITE - INCENDIE - PREVENTION

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

Durée : 3 H

Coefficient : 3

Cette épreuve comporte quatre (4) pages numérotées de 1/4 à 4/4.
Calculatrice scientifique autorisée.

EXERCICE 1

Dans un atelier de traitement de surface, le niveau instantané de danger lié à l'exposition d'un solvant est modélisé par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - kx$ où :

- x est le temps d'exposition (en heures)
- k est le coefficient de prévention lié aux dispositifs de sécurité mis en place
- $0 < k < 1$. (C) La représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

I. On considère la fonction g définie sur $[0 + \infty[$ par : $g(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x} - k$

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- a) On admet que la fonction g est dérivable sur $[0 + \infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
 Calculer $g'(x)$.
 b) Etudier les variations de la fonction g sur $[0 + \infty[$ puis dresser son tableau de variation.
 c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $[0 + \infty[$.

II. On donne $k = \frac{1}{e}$ et on suppose que la fonction f est dérivable sur $[0 + \infty[$.

- Déterminer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f . Vérifier que $f'(x) = g(x)$
- a) Etudier les variations de la fonction f sur $[0 + \infty[$ puis dresser son tableau de variation.
 b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que : $\alpha \in]1,85 ; 1,9[$.
- a) Donner le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$.
 b) Justifier que le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre de 2 de f est :

$$f(x) = 1 - \left(1 + \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

- Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
 - Préciser la position relative de (T) et (C) au voisinage de 0.
4. Montrer que la fonction F définie sur $[0 + \infty[$ par $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x} - \frac{1}{2e}x$ est une primitive de la fonction f sur $[0 + \infty[$.

5. a) Calculer l'intégrale $\int_0^r f(x) dx$ où r représente la durée d'exposition (en heures).
b) Interpréter cette intégrale comme une quantité totale de danger cumulée pour un opérateur.
6. Tracer la tangente (T) et la courbe (Cf) dans le même repère orthonormé ($O ; I ; J$).
(unité graphique : 1 cm pour 1 unité)

EXERCICE 2

Dans une entreprise, trois types de risques sont identifiés dans un service : Incendie (x), chutes (y) et produits chimiques (z). On représente l'eau de prévention de ces risques par un vecteur $X = (x ; y ; z)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On définit un endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ qui modélise l'évolution annuelle de l'efficacité des mesures de prévention selon un paramètre $m \in \mathbb{R}$ par :

$f_m(x ; y ; z) = (mx + y ; x + my + z ; y + mz)$. On note A_m la matrice de f_m dans la base canonique $B = (e_1 ; e_2 ; e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Démontrer que $t_{A_m} = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ où t_{A_m} désigne la matrice transposée de A_m

(NB : Toute matrice placée est nulle)

b) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On donne $m = 1$

a) Déterminer le noyau N_1 de f_1 et donner une base de N_1 .

b) Déterminer l'image $I_m(f_1)$ de f_1 et donner une base de $I_m(f_1)$.

3. On considère l'endomorphisme f_0 obtenu pour $m = 0$ et les vecteurs :

$u_1 = (1 ; \sqrt{2} ; 1) ; u_2 = (1 ; 0 ; -1)$ et $u_3 = (1 ; -\sqrt{2} ; 1)$

a) Démontrer que $B' = (u_1 ; u_2 ; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' .

c) Montrer que P est inversible puis déterminer P^{-1} .

d) Montrer que la matrice D de f_0 relativement à la base B' est :

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e) On admet que $D^n = P^{-1}A_0^n P = \begin{pmatrix} (\sqrt{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$ où A_0 est la matrice f_0 relativement

à la base B .

f) En déduire A_0^n en fonction de n .

EXERCICE 3

Dans une entreprise, les casques de sécurité sont livrés par cartons de 50 casques. Les statistiques des services HST indiquent que 2% des casques présentent un défaut de conformité.

D'un carton à l'autre, le nombre de casques défectueux varie, mais on admet que les conditions de fabrications et transport sont identiques.

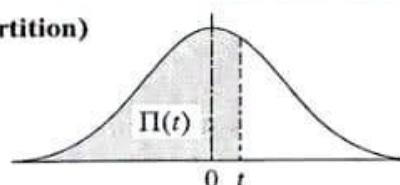
1. On considère l'épreuve : « contrôler un casque de sécurité » répétée 50 fois lors du contrôle d'un carton. On suppose ces épreuves indépendantes. Démontrer que l'épreuve « contrôler un casque » est une épreuve de Bernoulli.
2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de casques défectueux trouvés dans un carton.
 - a) Indiquer la loi de probabilité suivie par X , en désignant comme succès l'événement : « le casque contrôlé est défectueux ».
 - b) Préciser, en justifiant quelle loi permet d'approcher la loi de X .
3. Déterminer, avec l'approximation, la probabilité des événements suivants :
 - A « un carton contient exactement un casque défectueux ».
 - B « un carton contient moins de 4 casques défectueux ».
 - C « un carton contient au moins un casque défectueux ».
4. Un agent HST transporte 8 cartons de casques sur un chariot sans provoquer de dégradation supplémentaire. On note Y la variable aléatoire égale au nombre total de casques défectueux transportés sur un chariot.
 - a) Préciser la loi de probabilité suivie par Y .
 - b) Déterminer la probabilité des événements suivants :
 - A : « le chariot contient exactement un casque défectueux ».
 - B : « le chariot contient moins de 10 casques défectueux ».
 - C : « le chariot contient au moins un casque défectueux ».

N.B : Une table de la loi de poisson est fournie à l'épreuve.

.....

Loi normale centrée réduite (répartition)

$$\text{Probabilité cumulée } \Pi(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = P(T \leq t)$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8366	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9464	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9750	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geq 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.