

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2026****FILIERE TERTIAIRE : FINANCES - COMPTABILITE ET GESTION DES ENTREPRISES****EPREUVE : MATHEMATIQUES GENERALES, STATISTIQUES ET PROBABILITE****Durée : 3 H****Coefficient : 2***Cette épreuve comporte trois (3) pages numérotées de 1/3 à 3/3.  
Calculatrice scientifique autorisée.***EXERCICE 1****PARTIE A**On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $f(x) = 1 + (x - 2)e^{x-1}$ 

- On admet que la dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est notée  $f'$ 
  - Pour tout nombre réel  $x$ , déterminer la dérivée  $f'(x)$
  - Etudier les variations  $f$  puis dresser son tableau de variations
- Calculer  $f(1)$
  - En déduire le signe de  $f(x)$

**PARTIE B**Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = \ln(2 - x) + e^{x-1}$ .On désigne par  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité graphique : 2 cm).

- Déterminer le domaine de définition  $D_g$  de la fonction  $g$  sous forme d'intervalle.
- Calculer les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son domaine de définition
- On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur son domaine de définition et on note  $g'$  la dérivée de  $g$ .
  - Démontrer que :  $\forall x \in D_g$ ,
- Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_g)$  au point d'abscisse 1.
- Tracer la tangente  $(T)$  puis construire la courbe  $(C_g)$  dans le même repère  $(O, I, J)$ .
- Soit  $G$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$G(x) = (x - 2) \ln(2 - x) + (2 - x) + e^{x-1}$$

- Démontrer que la fonction  $G$  est une primitive de  $g$ .
- On appelle valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ , le réel  $M$  défini par

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx.$$

Calculer la valeur moyenne de  $g$  sur l'intervalle  $[0,5; 1]$ .

### PARTIE C

Une entreprise fabrique de 500 à 1000 articles par jour. On désigne par  $x$  la production d'articles (en milliers) par jour et par  $g(x)$  les coûts de production par jour de ces articles (en millions de francs), définis par  $g(x) = \ln(2 - x) + e^{x-1}$ .

1. Déterminer le montant du coût de production de 900 articles.
2. Déterminer la quantité d'articles produits par jour correspondant à un coût de production d'un million de francs.
3. Quel est le coût moyen de production des articles fabriqués par jour ?

### EXERCICE 2

Un jeu consiste à tirer simultanément 3 boules d'une urne qui en contient 4 boules vertes et 3 boules rouges.

1. Montrer que le nombre total de tirages différents est de 35.
2. Montrer que la probabilité que l'on obtienne 2 boules vertes et 1 boule rouge est de  $18/35$  soit  $0,514$  ;
3. On désigne par  $X$  la variable aléatoire indiquant le nombre de boules vertes obtenues au tirage simultané des 3 boules.

- a) Quelles sont les valeurs possibles de  $X$  ?
- b) La variable aléatoire  $X$  est-elle continue ? Justifiez votre réponse.
- c) Donner la loi de probabilité de  $X$  puis préciser sa valeur modale.

Les valeurs des probabilités seront données à  $10^{-3}$  près ;

- d) Calculer la valeur moyenne de  $X$ .
4. Soit  $G$  le gain d'un joueur quelconque tel que chaque boule verte obtenue lui fait gagner 1000 F tandis que chaque boule rouge lui fait perdre 500 F.
    - a) Exprimer en fonction de  $X$ , le nombre de boules rouges obtenues.
    - b) Démontrer que le gain  $G$  est défini par  $G = 1500X - 1500$
    - c) Dédire de ce qui précède, le gain moyen
    - d) Quelle est la valeur maximale du gain à une partie de ce jeu ?
    - e) Calculer la probabilité  $P(G < 0)$ .
  5. M. BLI effectue 100 parties de ce jeu. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où il a perdu ( $G < 0$ ), au terme des 100 parties de jeu. On suppose que  $Y$  est une variable binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
    - a) Préciser les paramètres  $n$  et  $p$  de la loi de  $Y$  ;
    - b) Quand il perd à une partie de jeu, quel est le montant que perd M. BLI ?
    - c) Quel est le montant total moyen de la perte, au terme des 100 parties de jeu ?

- d) Par quelle loi de probabilité pourrait-on valablement approximer la loi de  $Y$ ? Justifier votre réponse.
- e) A l'aide de la loi d'approximation, calculer la probabilité que M. BLI ne perde que 3 000 F au terme des 100 parties de jeu.

### EXERCICE 3

#### PARTIE A

On donne les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 135 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

- Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
- Démontrer que  $A^2 - 4A - 5I = 0$
  - En déduire que  $A$  est inversible et donner l'expression de  $A^{-1}$ , la matrice inverse de  $A$  en fonction de  $I$  et  $A$ .
- Ecrire  $A^{-1}$  sous la forme d'une matrice à 3 lignes et 3 colonnes.

#### PARTIE B

Une usine fabrique chaque jour trois produits  $P_1$  ;  $P_2$  et  $P_3$  de quantités respectives  $x$  ;  $y$  et  $z$  à partir de pièces de modèles  $m_1$  ;  $m_2$  et  $m_3$ . Le nombre de pièces de modèles  $m_1$  ;  $m_2$  et  $m_3$  nécessaire à la fabrication d'une unité de chacun des produits  $P_1$  ;  $P_2$  et  $P_3$  est donné par le tableau suivant :

| Libellés | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|----------|-------|-------|-------|
| $m_1$    | 3     | 6     | 6     |
| $m_2$    | 6     | 3     | 6     |
| $m_3$    | 6     | 6     | 3     |

Un programme de production journalier s'exprime par la matrice  $X$  ci-dessus. (partie A)

Pour réaliser ce programme, l'usine utilise 135 pièces de modèle  $m_1$ , 150 pièces de modèle  $m_2$  et 120 pièces de modèle  $m_3$  que l'on représente par la matrice  $C$  ci-dessus. (partie A)

- En considérant les données du problème, écrire le système  $(S)$  des trois équations linéaires à trois inconnues  $x$ ,  $y$  et  $z$ .
- Donner l'écriture matricielle du système d'équations linéaires  $(S)$ .
  - En déduire la résolution du système  $(S)$  en se servant de la question 3 partie A, puis donner les quantités de produits  $P_1$  ;  $P_2$  et  $P_3$  par jour.

.....