

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2026

FILIERE INDUSTRIELLE : INFORMATIQUE DÉVELOPPEUR D'APPLICATION

ÉPREUVE : **MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES ET STATISTIQUES**

Durée : 3 H

Coefficient : 3

*Cette épreuve comporte quatre (4) pages numérotées de 1/4 à 4/4.
Calculatrice scientifique autorisée.*

EXERCICE 1

On considère f , la fonction numérique de la variable réelle x , définie par $f(x) = x - \ln|x|$
($|x|$ désigne la valeur absolue du réel x).

On note $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
d'unité graphique 2 cm.

1. a. On désigne par D_f , l'ensemble de définition de la fonction f .
Montrer que $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
b. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.
2. a. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (D) d'équation $y = x$
b. Donner une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1
3. k est un réel strictement positif tel que $0 < k < 1$ et on pose $A(k) = \int_k^1 f(x) dx$
a. On pose $\varphi(x) = x \ln x - x$ pour $x > 0$
Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire une primitive de $\ln x$.
b. Déterminer l'expression de $A(k)$ en fonction de k
c. Déterminer $\lim_{k \rightarrow 0^+} A(k)$
4. α est un réel non nul ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)
On désigne par M , le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse α et on désigne par M' , le point $(\mathcal{C})$ d'abscisse $-\alpha$.
a. Exprimer, en fonction du réel α , une équation de (T) où (T) désigne la tangente à $(\mathcal{C})$ en M
b. Exprimer, en fonction du réel α , une équation de (T') , où (T') désigne la tangente à $(\mathcal{C})$ en M'
c. On pose $N = (T) \cap (T')$
Déterminer, en fonction de α les coordonnées de N .

EXERCICE 2

Considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Pour tout réel m , on définit l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ par le système défini comme ci-dessous.

$$\begin{cases} f_m(-2e_1) = 6e_1 + 2e_2 - 2me_3 \\ f_m(-4e_1 + 3e_2) = 9e_1 + 7e_2 - (6 + 4m)e_3 \\ f_m(e_1 + e_2 + e_3) = (m - 4)e_1 - 2e_2 + (m + 1)e_3 \end{cases}$$

1. a. Exprimer $f_m(e_1)$; $f_m(e_2)$ et $f_m(e_3)$ en fonction de e_1, e_2, e_3 .
 b. A_m désigne la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
 Montrer que ${}^tA_m = \begin{bmatrix} -3 & -1 & m \\ -1 & 1 & -2 \\ m & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (tA_m désigne la transposée de la matrice A_m)
 c. Montrer que l'endomorphisme f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, si et seulement si $m \in E$, où E est une partie de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
2. Dans cette partie, l'endomorphisme f_0 sera noté f (f_0 désigne l'endomorphisme f_m pour $m = 0$) et la matrice A_0 de f_0 sera notée A .
 a. Déterminer le noyau noté N de l'endomorphisme f et donner une base B de N .
 b. Déterminer l'image l'endomorphisme f , image qui sera notée I et donner une base B' de I .
3. Dans cette partie, on considère l'endomorphisme f_2 (f_2 désigne f_m pour $m = 2$)
 a. Montrer que l'endomorphisme f_2 est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$
 b. f_2^{-1} désigne l'automorphisme réciproque de l'automorphisme f_2
 Donner les expressions de $f_2^{-1}(e_1)$; $f_2^{-1}(e_2)$ et de $f_2^{-1}(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3
 c. Donner la matrice inverse A_2^{-1} de la matrice A_2
 d. En déduire la résolution matricielle du système (S) défini comme ci-dessous.

$$(S) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -3x - y - 2z = 2 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = -4 \end{cases}$$

4. On pose $U_1 = e_1$; $U_2 = e_1 + e_2$ et $U_3 = e_1 + e_2 + e_3$
 a. Montrer que la famille $B' = (U_1 ; U_2 ; U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 b. Déterminer la matrice P de passage de la base B à la base B'
 c. En déduire la matrice A_2' de l'endomorphisme f_2 dans la base B'

EXERCICE 3

Une entreprise fabrique des mini- ordinateurs en grande quantité. On pèse le poids de ces mini ordinateurs et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque mini-ordinateur associe sa masse en gramme.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 700 g et d'écart-type 20 g.

1. a. Un mini-ordinateur est accepté à la vente si sa masse en gramme est comprise dans l'intervalle $[666 ; 732]$

Quelle est la probabilité qu'un mini-ordinateur pris au hasard dans la production, soit acceptée à la vente ?

b. On désigne par α un réel strictement positif

Déterminer α pour que l'on ait $P(700 - \alpha < X < 700 + \alpha) \geq 0,95$

2. On s'intéresse à un ordinateur qui doit transmettre des pages de texte et chaque page est représentée par 100 000 bits (cent mille bits)

La probabilité pour qu'un bit soit erroné est 0,0001 (10^{-4}).

On admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'erreur lors de la transmission d'une page.

a. Donner, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X .

b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

c. Déterminer la variance V de la variable aléatoire X .

3. a. Montrer que la variable aléatoire X peut être approchée par une variable aléatoire Y où Y suit la loi normale m et d'écart-type σ .

b. Montrer que $m = 10$ et $\sigma = 3,16$

c. Avec cette nouvelle loi Y .

Déterminer la probabilité pour qu'une page comporte au plus 15 erreurs.

4. Pour corriger les erreurs commises à la suite de la transmission d'une page, on transmet cette page autant de fois qu'il faut jusqu'à l'obtention d'une page sans erreur.

Soit Z , la variable aléatoire égale au nombre de transmissions (d'une même page) nécessaires pour obtenir une page sans erreur.

Soit $P = 0,05$ la probabilité de transmission d'une page sans erreur et $q = (1 - P)$, la probabilité de transmission de la même page avec erreur.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire y est donnée par l'égalité ci-dessous.

$$P(y = k) = pq^{k-1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

a. Calculer $P(Y \leq 5)$

b. Montrer que $P(Y \leq n) = 1 - q^n$

...