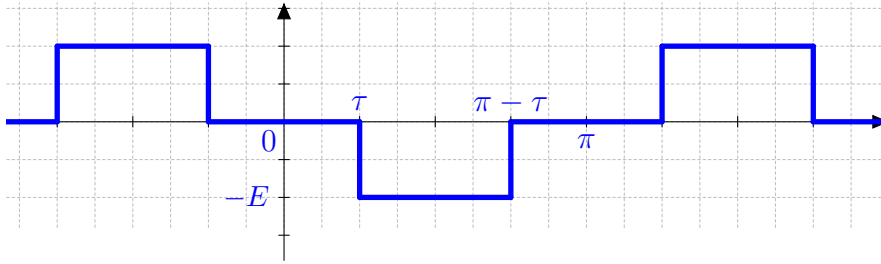


EXERCICE

1. Dessin



2. Puisque f est impaire, tous les coefficients a_n sont nuls

$$\text{De même, } b_n = \frac{2}{2\pi} \times 2 \times \int_{\tau}^{\pi-\tau} -E \times \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{-2E}{\pi} \times \int_{\tau}^{\pi-\tau} \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \times \left[\cos(nt) \right]_{\tau}^{\pi-\tau}$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \times \left(\cos(n(\pi - \tau)) - \cos(n\tau) \right)$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \times \left(\cos(n\pi - n\tau) - \cos(n\tau) \right)$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \times \left(\cos(n\pi) \cos(n\tau) - \sin(n\pi) \sin(n\tau) - \cos(n\tau) \right)$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \times \left((-1)^n \cos(n\tau) - \cos(n\tau) \right) \quad \text{car } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ et } \sin(n\pi) = 0$$

Si n est pair alors $n = 2p$ donc $(-1)^n = (-1)^{2p} = 1$

$$\text{donc } b_n = b_{2p} = \frac{2E}{(2p)\pi} \times \left(\cos((2p)\tau) - \cos((2p)\tau) \right) = 0$$

Si n est impair alors $n = 2p + 1$ donc $(-1)^n = (-1)^{2p+1} = -1$

$$\begin{aligned} \text{donc } b_n = b_{2p+1} &= \frac{2E}{(2p+1)\pi} \times \left(-\cos((2p+1)\tau) - \cos((2p+1)\tau) \right) \\ &= \frac{-4E}{(2p+1)\pi} \times \cos((2p+1)\tau) \end{aligned}$$

3. On a : $u_3 = a_3 \cos(3t) + b_3 \sin(3t) = \frac{-4E}{3\pi} \times \cos(3\tau) \sin(3t)$

pour que cette fonction soit toujours nulle il suffit de choisir τ pour que $\cos(3\tau) = 0$

c'est à dire $3\tau = \frac{\pi}{2}$ donc $\tau = \frac{\pi}{6}$

4. Là où la fonction est continue, il n'y a pas de différence entre $S(t)$ et $f(t)$

or $f(0) = 0$ donc $S(0) = 0$

et $f(\frac{\pi}{2}) = -E$ donc $S(\frac{\pi}{2}) = -E$

Là où f n'est pas continue, $S(t)$ est égal à la moyenne du saut :

ici $S(\tau) = \frac{0 + (-E)}{2} = \frac{-E}{2}$

5. (a) Le carré de la valeur efficace est égal à :

$$f_e^2 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (-E)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times E^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2E^2}{3}$$

(b) $k = 0^2 + \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^5 0^2 + b_n^2$

or on sait que $b_2 = b_4 = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi} \times \cos((2p+1)\tau)$

donc $b_1 = \frac{-4E}{\pi} \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{2E\sqrt{3}}{\pi}$

de même $b_3 = \frac{-4E}{3\pi} \cos \frac{3\pi}{6} = 0$

et enfin $b_5 = \frac{-4E}{5\pi} \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{2E\sqrt{3}}{5\pi}$

donc $k = \frac{1}{2} \times \left(\frac{12E^2}{\pi^2} + 0 + \frac{12E^2}{25\pi^2} \right) = \frac{156E^2}{25\pi^2}$

Le rapport $\frac{k}{f_e^2} = \frac{156E^2}{25\pi^2} \times \frac{3}{2E^2} \approx 0,948$