Exercices - Espaces vectoriels de dimension finie : énoncé

Dimension finie et sous-espaces

Exercice 1 - Pour bien démarrer... - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que $F\cap G\neq\{0\}$.

Exercice 2 - Sont-ils supplémentaires ? - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient F,G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F=\{(a,a,a)\in\mathbb{R}^3,\ a\in\mathbb{R}\}\text{ et }G=\{(b+c,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ b,c\in\mathbb{R}\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3 - Autour du théorème des quatre dimensions - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sevs de E. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

1. $F\cap G=\{0\}$;
2. $F+G=E$;
3. $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

Exercice 4 - Suites arithmétiques - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 5 - Une caractérisation de la dimension - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Soit $d:\mathcal{S}\to\mathcal{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Si $F,F'\in\mathcal{S}$ sont tels que $F\cap F'=\{0\}$, alors $d(F+F')=d(F)+d(F')$;

(ii) $d(E)=n$.

1. Soient $F,G\in\mathcal{S}$ avec $\dim(F)=\dim(G)=1$. Démontrer que $d(F)=d(G)$.
2. En déduire que, pour tout $F\in\mathcal{S}$, $d(F)=\dim(F)$.

Exercice 6 - Supplémentaire commun - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p<n$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F\oplus H=G\oplus H=E$.

Dimension finie et application linéaires

Exercice 7 - Noyau ? - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $E=\mathbb{R}^4$ et $F=\mathbb{R}^2$. On considère $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x=y=z=t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 8 - Du local au global... - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x\in E$, il existe un entier $n_x\in\mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x)=0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n=0$.

Exercice 9 - Base donnée par un endomorphisme nilpotent - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Exercice 10 - Très classique... - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im} f \cap \ker(f) = \{0\}.$$
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que
$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im} f \oplus \ker(f) = E \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

Exercice 11 - Noyau égal à l'image - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si E est de dimension paire.

Exercice 12 - Noyau et image choisis - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, G un sous-espace vectoriel de E de dimension q. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endormorphisme f de E avec $\ker(f) = F$ et $\mathrm{Im}(f) = G$.

Exercice 13 - D'un sous-espace sur un autre - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. A quelle condition sur F et G existe-t-il un endomorphisme f de E tel que $f(F) = G$.
2. Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il imposer pour qu'on peut trouver un tel endomorphisme f qui soit de plus bijectif.

Exercice 14 - Un pas vers les noyaux itérés - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim(\ker(f^2)) \leq 2\dim(\ker(f))$.

Exercice 15 - Composée et somme - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - $\star\star$

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$
2. On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est inversible. Prouver que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$.

Exercice 16 - Quand le rang est additif - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - $\star\star\star$

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \iff \left\{\begin{array}{l}\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}\\ \ker(f) + \ker(g) = E\end{array}\right.$$

Exercice 17 - Suite exacte - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soient $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in 0, \dots, n-1$, f_k est une application linéaire et

(i) f_0 est injective ;

(ii) $\ker(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$;

(iii) f_{n-1} est surjective.

Prouver que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = 0$.