EPREUVE DE MATHEMATIQUES BTS GBAT 2013

EXERCICE 1

I- Soit l'équation différentielle (E) : $(x+1)y' + y = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+1}$ où $x > -1$

1) a) Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E).
   b) Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante.
   c) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

2) Déterminer la fonction h solution de (E) telle que $h(0) = 1$.

II- Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \ln(x+1)$.

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.
2) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
3) En déduire le signe de g sur $]-1; +\infty[$.

III- Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1+\ln(x+1)}{x+1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2 cm

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
   c) Montrer que la droite (D) : $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
   d) Etudier la position relative de (C) et (D).

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α
   b) Vérifier que $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

4) a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0
   b) En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 puis la position de (C) par rapport à (T) au voisinage de ce point.

5) a) Représenter (C), (D) et (T) dans un même repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm
   b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C), (D), les droites d'équations $x = -1 + \frac{1}{e}$ et $x = 0$.
   Calculer A.

EXERCICE 2

L'espace euclidien ε est rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On donne les points $\mathrm{A}(-1; 2; 1)$, $\mathrm{B}(-3; 4; 5)$ et $\mathrm{C}(1; 2; 0)$.

1) Soit (P) le plan médiateur du segment [AB].
((P) est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points A et B).
Démontrer qu'une équation du plan (P) est : $x - y - 2z + 11 = 0$.

2) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (P).
c) Soit H le projeté orthogonal de C sur (P).
Calculer la distance du point C au plan (P).
d) Montrer que le triangle ABH est isocèle.

3) a) Déterminer (Γ) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Déterminer le produit scalaire $(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}).\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ en fonction de G.
c) On désigne par (E) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :
$(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}).\overrightarrow{\mathrm{MH}} = 0$.
Déterminer (E).

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ (Unité : 2 cm).
On considère la famille de courbes (C_m) d'équation :
$(1 - m)x^2 + 2my^2 - 8my + 2m - 2 = 0$.

1) Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m).

2) Tracer les courbes (C_0), $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$ et (C_{-1}) sur la même figure.

3) a) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle (C_m) est un cercle ? Justifier.
b) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle (C_m) est une hyperbole équilatère ? Justifier.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES BTS GBAT 2014

EXERCICE 1

PARTIE A

On considère la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x + e^{1-x} = x + \frac{e}{e^x}$ (e désigne la base du logarithme népérien)

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, (C) admet une asymptote (Δ) dont on donnera une équation.

b) Préciser la position de la courbe (C) par rapport à (Δ) sur $[0;+\infty[$.

2) a) Résoudre sur $[0;+\infty[$, l'inéquation d'inconnue x définie par : $1 - e^{1-x} > 0$

b) En déduire le signe de f' (f' désigne la dérivée de f) sur $[0;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f

3) Représenter graphiquement la courbe (C) et l'asymptote (Δ) dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm

4) Soit α un nombre réel positif

a) Exprimer en cm^2, en fonction de α, l'aire $S(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre l'asymptote (Δ), la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

b) Déterminer la limite de $S(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$

PARTIE B

Soit l'équation différentielle (E) définie par (E) : $y'' + 2y' + 5y = x + e^{1-x}$ où y est une fonction de la variable réelle, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction φ définie par $\varphi(x) = ax + b + ce^{1-x}$
Soit une solution particulière de l'équation différentielle (E)

2) a) Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E)

b) Intégrer l'équation différentielle (E).

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

On considère les courbes (C_m) d'équation :

(C_m) : $mx^2 - y^2 - (2m+1)ax - 3(m-1)a^2 = 0.$

(a étant un réel non nul donné et m un paramètre réel)

1) Construire (C_0) et (C_{-1}) lorsque $a = 1$.

2) Dans la suite de l'exercice, on considère que $a \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois fixes A, B et C dont on déterminera les coordonnées en fonction de a.

3) a) Montrer que pour $m \neq 0$, l'on peut écrire l'équation de (C_m) sous la forme :

$$m\left(x - \frac{2m+1}{2m}a\right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{4m}(4m-1)^2$$

b) En déduire la nature de la courbe (C_m) suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}^*$.
[On distinguera les quatre cas : $(m < 0 \text{ et } m \neq -1)$; $m = -1$;
$m = \frac{1}{4}$; $\left(m > 0 \text{ et } m \neq \frac{1}{4}\right)$]

4) a) Pour $m < 0$ et $m \neq -1$,
préciser l'axe focal et l'excentricité de la conique (C_m).

b) Pour $m > 0$ et $m \neq \frac{1}{4}$,
calculer l'excentricité de la conique (C_m) et donner une équation de chacune de ses asymptotes.

EXERCICE 3

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

1) a) Ecrire le vecteur $\vec{U}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ où $\vec{U} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{CB}}$
(le symbole $\wedge$ désigne le produit vectoriel).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A, B et C.

2) D est le point d'intersection du plan P et de l'axe $(O, \vec{\imath})$.
E est le point d'intersection du plan P et de l'axe $\left(O, \vec{k}\right)$.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

b) Donner la nature du quadrilatère ABED.

3) a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et calculer son aire.

b) Calculer une mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ puis des angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

c) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

4) a) I est le point de l'espace de coordonnées $(0; 2; 0)$.
Calculer la distance de ce point I au plan P noté $d(\mathrm{I}, P)$.

b) Calculer le volume du tétraèdre IBCA.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES BTS GBAT 2015

EXERCICE 1

n est un nombre entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n & \text{si } x \in]0;1] \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 10 cm)

PARTIE A

1) Démontrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2) a) Démontrer que : $0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

b) Résoudre dans $]0;1]$ l'inéquation : $\ln x + \frac{n}{2} < 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

3) a) Démontrer que $\forall\, x \in]0;1],\ f_n'(x) = 2x(\ln x)^{n-1}\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)$

b) Etudier suivant les valeurs de n, les variations de f_n et dresser son tableau de variation.
(On distinguera 3 cas : $n = 1$, n est pair, n est impair et $n \neq 1$).

4) a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on déterminera.

b) Construire (C_1) et (C_2).

PARTIE B

t désigne un réel appartenant à $[0;1]$.

On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)\,dx$ et $L_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

On suppose que $L_n = \lim\limits_{t \to 0} I_n(t)$

1) Soit F la fonction dérivable et définie sur $[0;1]$ par :

$\begin{cases} F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} & \text{si } x \in]0;1] \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) Démontrer que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$

b) Calculer L_1

2) Soit φ_n la fonction définie sur $]0;1]$ par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$

a) Calculer la limite de φ_n en 0.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
$\forall\, t \in [0;1], I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3}\ I_n(t)$

c) En déduire que : $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3}\ L_n$

d) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \geq 1, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$.

3) Calculer en fonction de n, l'aire $A(n)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_n) et l'axe des abscisses.

EXERCICE 2

Le plan P est rapporté à un rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, (unité graphique : 1 cm).
Soit (D) la droite d'équation $x = \frac{9}{4}$.
(ε) est la conique de foyer O, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{4}{5}$.
On rappelle que (ε) est l'ensemble des points M de P tels que $\frac{\text{MO}}{\text{MH}} = \frac{4}{5}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1) a) Déterminer la nature et l'équation réduite de (ε) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   b) Déterminer le centre, les sommets, les foyers et les directrices de (ε) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2) Tracer (ε) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3) Soit M un point quelconque du plan P, distinct de O et t une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{\text{OM}}}\right)$.
   a) Démontrer que si M appartient au demi-plan défini par $x < \frac{9}{4}$, alors la distance de M à (D) est égale à $\frac{9}{4} - \text{OM}\cos t$.
   On distinguera les 2 cas suivants :
   1^{er} cas : M $\notin (O,\vec{\imath})$ et $0 < x < \frac{9}{4}$ 2^e cas M $\notin (O,\vec{\imath})$ et $x < 0$.
   b) Démontrer que M appartient à (ε) si et seulement si $\text{OM}(4\cos t + 5) = 9$.
   c) En déduire que (ε) est l'ensemble des points d'affixe $\frac{9}{4\cos t + 5}e^{it}$ où $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

On donne l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :
$(E) : y'' - 4y' + 3y = 6$
(y est une fonction de la variable x).

1) a) Intégrer l'équation différentielle homogène (H) associée à (E).
   b) Déterminer la constante K solution particulière de (E).
   c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
   d) Déterminer la solution g de (E) dont la représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, passe par le point A$(0,4)$ et admet en un point une tangente parallèle à $(O,\vec{\imath})$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{x} - e^{3x} + 2$.
   On appelle (C) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $U^3 - 3U - 2 = 0$ sachant que le réel -1 est solution de cette équation.
   c) En déduire l'abscisse du point B d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE (DGESE)

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2016

FILIERES INDUSTRIELLES :

- GENIE CIVIL OPTION GEOMETRE TOPOGRAPHE
- GENIE CIVIL OPTION BATIMENT
- GENIE CIVIL OPTION TRAVAUX PUBLICS

EPREUVE COMMUNE : **MATHEMATIQUES**

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 3

Exercice n° 1

Partie A

1°/ On considère l'équation différentielle (E_0) définie par

$$(E_0) : \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2°/ On considère l'équation différentielles (E) définie par

$$(E) : \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}$$

a) Déterminer les réels α β et γ tels que $f(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^{-x}$ soit une solution particulière de (E).

b) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la fonction g de E satisfaisant les conditions initiales définies par $g'(0) = 0$ et $g(0) = 4$.

Partie B

Soit f, la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par $f(x) = (x+2)^2\, e^{-x}$;
on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1°/ a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2°/ On désigne par f' la dérivée de f.

a) Démontrer que $\forall x \in IR$, $f'(x) = -x(x+2)\, e^{-x}$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3°/ Construire la courbe (C).

Partie C

1°/

a) Justifier que $\forall x \in IR$, $f(x) = -f''(x) - 2f'(x) + 2e^{-x}$

b) En déduire une primitive F de f sur IR.

2°/ Pour tout naturel n, on pose $I_n = \int_0^n f(t)dt$.

a) Exprimer I_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$.

Exercice n° 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.
Soit λ un nombre réel.
On considère l'ensemble C_λ des points M(x, y) du plan tels que :

$$\lambda x^2 - y^2 + 2x + \frac{\lambda}{3} = 0$$

1°/ Discuter suivant les valeurs de λ, la nature de C_λ (on distinguera les cas particuliers où $\lambda \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$).

2°/ On suppose que $\lambda = 3$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre, sommets et asymptotes) de C_3.

b) Construire C_3.

3°/ Soit A, M, M′ trois points du plan d'affixes respectives 1, Z et Z^4, où Z désigne un nombre complexe.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe Z tels que les points A, M et M′ soient alignés.

b) Construire l'ensemble (E).

Exercice n° 3

Soit S la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 + i) z - i$.

1°/ Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2°/ On désigne par A le centre de S.
Soit M un point distinct de A, d'image M′ par S.

a) Construire M′.

b) Déterminer la nature du triangle A M M′.

3°/ Déterminer le lieu géométrique de M′ lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

****

EPREUVE DE MATHEMATIQUES BTS GBAT 2017

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;\ +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in\ ]-1;\ 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[\\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ d'unité graphique 1 cm.

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur $]-1;\ +\infty[$ par
$g(x) = -x + (1+x)\ln(1+x)$.

1) Etudier les variations de g.
2) Calculer $g(0)$ et en déduire que $\forall\ x \in\ ]-1;\ +\infty[,\ g(x) \geq 0$.

PARTIE B

1) Calculer les limites de f à droite en -1 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Ecrire le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.
   b) En déduire que f est continue et dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
   c) Déterminer une équation de la tangente (T) de (C) au point O.
   (O étant l'origine du repère)
   d) Etudier la position de (T) par rapport à (C) au voisinage du point O.

3) a) Démontrer que pour tout nombre réel non nul $x > -1$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x)}$.
   b) En déduire la variation de f et dresser son tableau.

4) Tracer la tangente (T) et la courbe (C).

EXERCICE 2

On se propose de résoudre le système différentiel (S) défini comme ci-dessous

$$(S)\quad \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2\sin t & (E_1) \\ 2x(t) + y'(t) = -2\cos t & (E_2) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions de la variable réelle t deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) a) Montrer en utilisant les équations différentielles (E_1) et (E_2), que la fonction $t \longmapsto x(t)$ vérifie l'équation différentielle (E) définie par $(E) : x''(t) + 4x(t) = -6\cos t$.
   b) Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E).
   c) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2) a) Intégrer l'équation différentielle (E).
   b) En déduire la solution du système (S).

3) a) En utilisant les équations différentielles (E_1) et (E_2), donner l'équation différentielle du second ordre (E') vérifiée par y.

b) Intégrer (E').

c) Déterminer la solution du système (S) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

EXERCICE 3

L'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A$\left(\frac{2}{3};\ -3; 2\right)$ et B$\left(-\frac{4}{3};\ 0; -4\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1) Soit E le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}; 2)$ et $(\mathrm{B}; 1)$.

a) Calculer les coordonnées de E.

b) Démontrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].

c) Démontrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.

2) a) Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).

b) En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

c) Démontrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est :

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$$

3) Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}; 4\sqrt{3} - 1\right)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

b) En déduire que la droite (D) est sécante à la conique (C) en un point notée F dont on donnera les coordonnées.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES BTS GBAT 2018

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1) On donne l'équation différentielle (E) : $(1+x)y' - xy = e^x$ sur $]-1;+\infty[$.

a) Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E).

b) Montrer que la fonction φ définie par : $\varphi(x) = e^x$ est une solution particulière de (E).

c) Intégrer l'équation différentielle (E).

d) Déterminer la solution h de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère du plan.

2) Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{xe^x}{1+x}$ de courbe représentative $\left(C_f\right)$.

a) Calculer la limite de f à droite au point d'abscisse -1.

b) Interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$.

3) On admet que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

b) Déduire de la question précédente une équation de la tangente (T) à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 0.

c) Déterminer la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (T).

5) Construire $\left(C_f\right)$ et (T) dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ d'unité graphique 1 cm.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

A tout point M d'affixe z, on donne le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - az$ $(a \in \mathbb{R})$.

1) Calculer les coordonnées (x', y') de M$'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M.

2) Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble H_a des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur.

3) Dans cette question, on pose $a = 4$.

a) Préciser les éléments caractéristiques de H_4.
(Centre, sommets, asymptotes, foyers)

b) Construire H_4.

c) Soit N le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$.
Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère OMM$'$N soit un parallélogramme.

EXERCICE 3

Dans le plan (P), on donne un trapèze convexe isocèle ABCD tel que (AB) soit parallèle à (CD). Soit [AH] sa hauteur relativement aux bases [AB] et [CD]. On pose $\mathrm{AB} = a$; $\mathrm{CD} = 3a$; $\mathrm{AH} = 2a$
(a étant un réel strictement positif)

1) a) Représenter graphiquement le trapèze convexe.

b) Rapportons le plan (P) au repère $(\mathrm{H}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{HD}}}{a}$ et $\vec{\jmath} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{HA}}}{2a}$.

Montrer que les sommets du trapèze sont alors les points $\mathrm{A}(0; 2a)$; $\mathrm{B}(-a; 2a)$; $\mathrm{C}(-2a; 0)$ et $\mathrm{D}(a; 0)$.

c) Déterminer les réels α et β pour que H soit le barycentre des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D affectés respectivement des coefficients $\alpha, 1, 1$ et β.

2) Soit G_1 l'isobarycentre, ou milieu du segment [BC].

Soit G_2 le barycentre des points A et D affectés respectivement des coefficients -1 et 3.

a) Placer les points G_1 et G_2 sur la figure et dire comment les obtient-on.

b) Montrer que H est le milieu du segment $[\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2]$.

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan (P) tels que : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right\| = \left\|3\overrightarrow{\mathrm{MD}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right\|$.

4) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $-\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 + 3\mathrm{MD}^2 \leq 24\, a^2$

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION DES EXAMENS ET DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2019

FILIERES INDUSTRIELLES :

- GENIE CIVIL OPTION GEOMETRE TOPOGRAPHE
- GENIE CIVIL OPTION BATIMENT
- GENIE CIVIL OPTION TRAVAUX PUBLICS

EPREUVE COMMUNE : MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 Heures — Coefficient de l'épreuve : 3

EXERCICE 1

Soit (E) l'équation différentielle $(1-x)y' - xy = e^{-x}$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x et dérivable sur$]-\infty\,;1[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1 – Déterminer les nombres réels a et b tels que
$$\frac{x}{1-x} = a + \frac{b}{1-x}$$

2 – Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

3 – Justifier que la fonction g définie sur$]-\infty, +1[$ par $g(x) = \frac{xe^{-x}}{1-x}$ est une solution particulière de (E).

4 – a) Donner l'ensemble des solutions de (E).
b) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = -1$

EXERCICE 2

SK

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique 1 cm).

PARTIE A

Dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère la courbe (H) d'équation $y^2 - x^2 = 16$

1 – Justifier que H est la réunion de deux courbes (C) et (C′) où (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où (C′) est l'image de (C) par une transformation simple que l'on précisera.

2 – a) Etudier la parité de f
b) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

3 – Tracer H dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

4 – On nomme A et B les points de la courbe (C) d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points M(x, y) vérifiant $-3 \leq x \leq 3$ et $\sqrt{x^2+16} \leq y \leq 5$.

Exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale (on ne cherchera pas à la calculer).

PARTIE B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

1- a) Donner l'écriture complexe de r

b) On désigne par x' et y' les coordonnées du point M' image par r du point M(x ; y) du plan.

Justifier que $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$

c) Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par r.

2- Soit (H') l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{8}{x}$

a) Démontrer que (H') est l'image de (H) par la rotation r.

b) Construire (H').

3 – Soit D' l'image du domaine D par r. On admet que D' est l'ensemble des points M(x, y) du plan vérifiant $\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \leq y \leq 5\sqrt{2} - x$

a) Hachurer D'

b) Calculer l'aire de D' exprimée en cm^2.

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de D.

EXERCICE 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$

1 – a) Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique

b) En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

2 - Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle] 0 ; 2π [.
On considère la rotation de centre O et d'angle θ.
On note A' le point d'affixe a', image du point A par la rotation r et B' le point d'affixe b', image du point B par la rotation r.
L'objectif est de démontrer que la droite ($A A'$) coupe le segment [$B B'$] en son milieu.

a) Faire une figure.

b) Exprimer a' en fonction de a et θ puis b' en fonction de b et θ.

3 – Soit P le point d'affixe p milieu de [$A A'$] et Q le point d'affixe q milieu de [$B B'$].

a) Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ

b) Démontrer que $\frac{-p}{q-p}=\frac{-a}{b-a}$

c) En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

d) Démontrer que le point Q appartient à la droite ($A A'$).

****

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

DIRECTION DES EXAMENS ET DES CONCOURS (DEXCO)

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2021

FILIERES INDUSTRIELLES :

- GENIE CIVIL OPTION GEOMETRE TOPOGRAPHE
- GENIE CIVIL OPTION BATIMENT
- GENIE CIVIL OPTION TRAVAUX PUBLICS

EPREUVE COMMUNE : **MATHEMATIQUES**

Durée de l'épreuve : 2 Heures

Coefficient de l'épreuve : 3

EXERCICE 1

I) On considère l'équation différentielle

$(E): y'' + 2y' + y = (x+2)\ell n(-x) + \frac{1}{x} + 2$; $\forall x < 0$

Où y' est la fonction inconnue de la variable réelle, y' la dérivée de y et y'' la dérivée de y', ℓn désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Démontrer que la fonction : $x \longmapsto x\ell n(-x)$ est une solution particulière de (E).
3. Donner la fonction h solution de (E) telle que $h(-1) = 0$ et $h'(-1) = 1$

II) f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{Par} \begin{cases} f(x) = x\ell n(-x) \ \ si\ x < 0 \\ f(x) = x\left(2 - e^{\frac{-1}{x}}\right) \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé direct $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On note g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par

$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$

1. Etudier les variations de la fonction g
2. En déduire que $\forall x > 0$, $0 < g(x) < 1$
3. Démontrer que :

   $\forall x < 0,\ f'(x) = 1 + \ell n(-x)$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = 2 - g(x)$

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
5. a. En utilisant le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction : $x \longmapsto e^x$, montrer qu'au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3, la fonction f peut s'écrire :

   $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(1/x\right)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon\left(1/x\right) = 0$

b. Trouver l'asymptote oblique (Δ) à la courbe (C)au voisinage de $+\infty$

6. Tracer dans le même repère la courbe (C), la droite (Δ) et la courbe (C') symétrique de (C) sur [0 ; 1] par rapport à l'axe des abscisses.

III) Soit α un élément de]-1, 0[et $A\ (\alpha)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par les courbes (C) , (C') et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = -1$

1. A l'aide d'une intégration par parties,

   justifier que $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{2}\alpha^2 \ell n\,(-\alpha) - \frac{1}{4}\,\alpha^2 + \frac{1}{4}$
2. En déduire, en centimètre carré , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$
3. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers 0.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm, on considère la famille des courbes (C_m) définie par :

(C_m) : $4y^2 = \frac{1}{4} ma^2\,(m+1) - m\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ ou a est un réel strictement positif et m un réel quelconque.

I) On suppose que $m \in\ ]\ 0; 4\ ]$ et on note $(\mathcal{E})$ la courbe obtenue.

1. Démontrer que $(\mathcal{E})$ peut s'écrire

   $(\mathcal{E})$: $\frac{(x+a/2)^2}{\left(\frac{a}{2}\sqrt{m+1}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{a}{4}\sqrt{m(m+1)}\right)^2} = 1$

2. Montrer que $(\mathcal{E})$ est une ellipse d'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{m}{4}}$

3. Donner les coordonnées des sommets situés sur l'axe non focal de $(\mathcal{E})$.

4. En déduire la valeur de m pour laquelle $(\mathcal{E})$ est un cercle

II) On suppose que $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $m = -4$. On note (H') la courbe obtenue

1. Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) est : $-\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 = 1$
2. En déduire que (H) est une hyperbole équilatère
3. Préciser le centre, l'excentricité, les sommets, les foyers et les asymptotes de (H)
4. Construire la courbe (H) dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

****

DIRECTION DES EXAMENS ET DES CONCOURS (DEXCO)

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2022

FILIERES INDUSTRIELLES :

- GENIE CIVIL OPTION GEOMETRE TOPOGRAPHE
- GENIE CIVIL OPTION BATIMENT
- GENIE CIVIL OPTION TRAVAUX PUBLICS

EPREUVE COMMUNE : **MATHEMATIQUES**

Coefficient de l'épreuve : 3

Durée de l'épreuve : 2 Heures

EXERCICE 1

I) On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = 1 - e^x$ où y est la fonction inconnue dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la dérivée y.

1) Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E).
2) Démontrer que la fonction $x \longmapsto (2-x)e^x - 1$ est une solution particulière de (E).
3) Intégrer l'équation différentielle (E).
4) En déduire la fonction h solution générale de (E) telle que $h\,(o) = 1$

II) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = (2-x)e^x - 1$

1) Calculer les limites de g aux bornes de $\mathbb{R}$.
2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet uniquement deux solutions α et β telles que $\alpha \in]-\infty\,; 1\,[$ et $\beta \in]\,1; +\infty\,[$

   b) En déduire que $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$ et que $1{,}8 < \beta < 1{,}9$

   c) Donner le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$

III) f est la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

(C) est la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$ et conclure
2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$
3) a) Dresser le tableau de variation de f

   b) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et $f(\beta) = \frac{1}{\beta - 1}$
4) Montrer que le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\,\mathcal{E}(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$$

5) a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de 0.

b) En déduire la position relative de (T) et $(\mathcal{C})$ au voisinage de ce point

6) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (T) dans le même repère (O ; I ; J).

On prendra $\alpha = -1{,}2$ et $\beta = 1{,}8$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. On considère pour tout nombre réel m, les courbes (C_m) d'équation : $y^2 + mx^2 + m = 2y + (2m-1)x$.

1. Démontrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe D dont on précisera les coordonnées
2. On suppose que $m = 0$ et on note (P) la courbe obtenue.
   a. Démontrer que (P) est une parabole de sommet D dont on précisera ses coordonnées.
   b. Préciser l'axe focal et le foyer de (P)
3. On suppose que $0 < m < 1$
   a. Montrer que les courbes (C_m) peuvent s'écrire :
   $(C_m) : 4\,m^2\left[x - \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right] + 4m(y-1) = 1$
   b. Expliquer pourquoi (C_m) est une ellipse ?
   c. Donner les coordonnées des sommets et des foyers de (C_m)
   d. Déterminer la valeur de m pour laquelle (C_m) est un cercle. Préciser l'excentricité de (C_1)
   e. Déterminer le vecteur directeur de la droite (T) tangente à la courbe (C_m) au point E (1 ; 1).
4. On suppose que m < 0
   a. Ecrire l'équation réduite de (C_m)
   b. En déduire que les asymptotes de (C_m) sont :
   $(\Delta) : y - 1 = -\sqrt{-m}\left[x - \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right]$ et $(\Delta') : y - 1 = \sqrt{-m}\left[x - \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right]$
   c. Quelle est la nature de (C_m) lorsque $(-\sqrt{-m})(\sqrt{-m}) = -1$?
   d. Préciser l'excentricité de (C_m)