

Résistance des matériaux

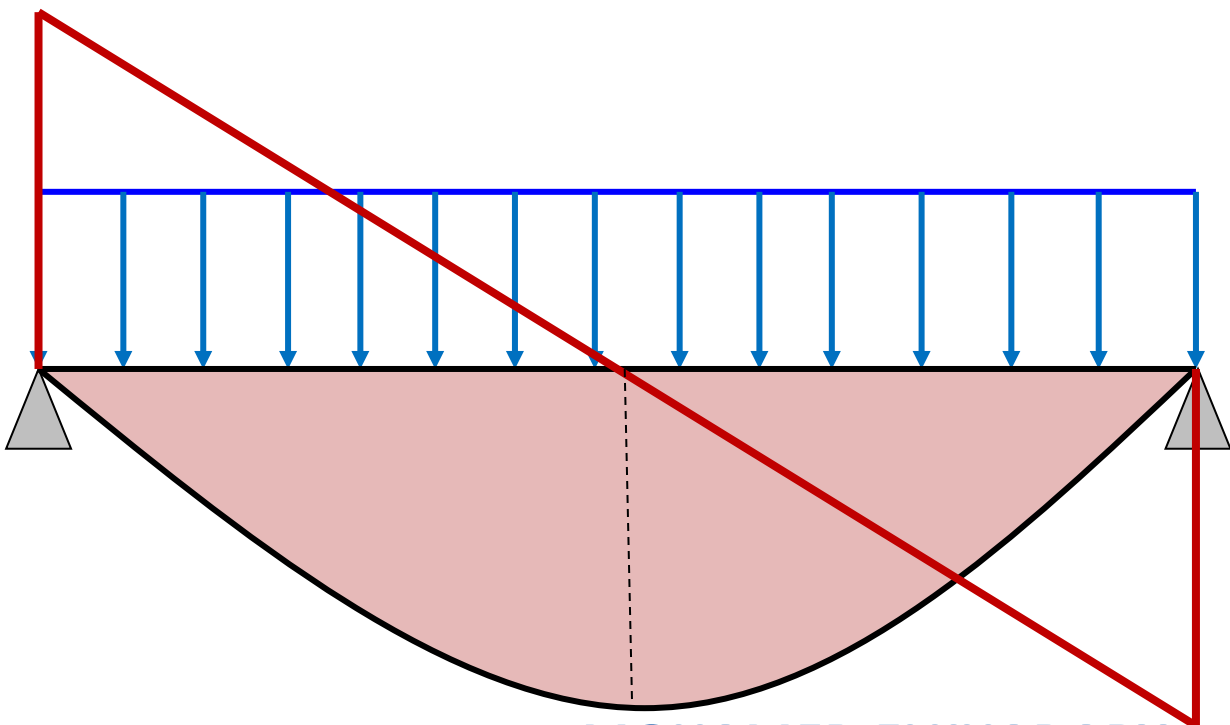
SYSTEMES ISOSTATIQUES

SOLLICITATIONS SIMPLES

SYSTEMES ISOSTATIQUES

RESUME DU COURS ET EXERCICES CORRIGES

METHODES SIMPLES AVEC FORMULAIRES DE CALCUL



Première édition

MOHAMED ELKHADARY
INGENIEUR FORMATEUR

Résistance des matériaux

SYSTEMES ISOSTATIQUES SOLLICITATIONS SIMPLES

MOHAMED ELKHADARY

Cet ouvrage est la première partie du cours sur la résistance des matériaux (RDM) avec exercices corrigés et avec tous les détails pour une bonne assimilation et maîtrise des calculs RDM.

L'ouvrage est destiné pour les formateurs comme un support complet du cours et pour les étudiants débutants en RDM.

Cet ouvrage contient un résumé précis du cours en se basant sur les différents ouvrages réalisés par des grands auteurs et aussi un nombre très important d'exercices et d'exemples d'application, avec corrigés complets, en utilisant des méthodes simples et des formulaires de calcul démontrés.

La maîtrise de ces calculs en résistance des matériaux est un grand pas vers la maîtrise des calculs de structures hyperstatiques.

La maîtrise de ces calculs est indispensable pour mener les calculs des poutres en béton armé et en métaux.

La deuxième partie attendue prochainement traitera les calculs des poutres hyperstatiques en utilisant des méthodes simples avec des exercices pratiques.

L'Auteur :

MOHAMED ELKHADARY, est un ingénieur d'état en génie civil et en génie urbain de l'Ecole Mohammedia des ingénieurs, et Formateur des techniciens spécialisés en génie civil et des conducteurs de travaux à l'Institut Spécialisé dans les métiers de bâtiment et Travaux publics OFPPT à CASABLANCA. Il a élaboré plusieurs cours pour les techniciens spécialisés en génie civil.

L'Auteur :

MOHAMED ELKHADARY,

Première édition

Résistance des matériaux

SYSTEMES ISOSTATIQUES

SOLLICITATIONS SIMPLES

RESUME DU COURS ET EXERCICES CORRIGES

Résistance des matériaux

SYSTEMES ISOSTATIQUES

SOLLICITATIONS SIMPLES

RESUME DU COURS ET EXERCICES CORRIGES

METHODES SIMPLES AVEC FORMULAIRES DE CALCUL

Mohamed ELKHADARY

Introduction

Cet ouvrage est la première partie du cours sur la résistance des matériaux (RDM) avec des exercices corrigés et avec tous les détails nécessaires pour une bonne assimilation et maîtrise des calculs RDM des poutres isostatiques.

L'ouvrage est destiné pour les formateurs comme un support complet du cours et pour les étudiants débutants en RDM.

Cet ouvrage contient un résumé précis du cours en se basant sur les différents ouvrages réalisés par des grands auteurs, et aussi un nombre très important d'exercices et d'exemples d'application, avec corrigés complets, en utilisant des méthodes simples et des formulaires de calcul démontrés.

La maîtrise de ces calculs en résistance des matériaux est un grand pas vers la maîtrise des calculs de structures hyperstatiques. Ces calculs sont indispensables pour mener les calculs des poutres en béton armé et en métaux.

Les méthodes adoptées dans ce livre sont simples pour éviter les calculs complexes. C'est pour cela, nous avons travaillé sur l'utilisation des formulaires simples à utiliser.

La chronologie des chapitres a été conçu d'une manière pédagogique pour que le lecteur ne se perde pas. Nous allons d'abord commencer par les notions de la statique avant de passer à l'étude d'équilibre statique des poutres. Ensuite, nous traiterons le calcul des efforts internes par des méthodes simples en intégrant un nombre très important d'exemples et d'exercices.

Avant d'étudier les différentes sollicitations simples, nous déterminerons d'abord les caractéristiques géométriques des sections avec des exercices types en utilisant des méthodes simples à pratiquer.

Ce modeste travail est un outil pour découvrir la résistance des matériaux d'une façon méthodique et pédagogique que nous jugeons simple et pratique.

Mohamed ELKHADARY

**J'ai le plaisir de recevoir vos remarques, vos questions et vos propositions
sur mon adresse e-mail : moham85@gmail.com**

Sommaire

I)	Rappel sur les unités usuelles :.....	9
1)	Distances-longueurs :.....	9
2)	Surfaces-Aires- Sections :.....	9
3)	Forces-poids :.....	9
4)	Pressions contraintes :.....	9
II)	Différents types des charges et surcharges :.....	10
1)	Charges permanentes et variables.....	10
2)	Charges concentrées et charges réparties.....	10
3)	Comment convertir une charge répartie en charge concentrée ?.....	12
III)	Calcul des réactions aux appuis des poutres isostatiques.....	13
1)	Différents types d'appuis.....	13
a)	Appui simple ou libre :.....	13
b)	Appui double ou à rotule :.....	13
c)	Appui triple ou encastrement:.....	14
2)	Systèmes de forces.....	15
a)	Système hypostatique :.....	15
b)	Système isostatique:.....	15
c)	Système hyperstatique :.....	15
3)	Equations de la statique.....	16
4)	Rappel : Moment d'une force par rapport à un point :.....	16
5)	Exemples de calcul des réactions aux appuis des poutres isostatiques.....	18
IV)	Calcul des efforts internes dans une poutre :.....	24
1)	Forces extérieures :.....	24
2)	Efforts internes.....	24
a)	Effort Normal.....	24
b)	Efforts tranchants.....	24P
c)	Moments Fléchissants.....	25
3)	METHODE DES SECTIONS POUR CALCULER LES EFFORTS INTERNES.....	25
4)	DIAGRAMMES DES EFFORTS ET DES MOMENTS M,N,T.....	26
5)	EXEMPLES DE CALCUL DES EFFORTS INTERNES DANS DES POUTRES ISOSTATIQUES.....	26
a)	Exemple 1 : cas d'une charge concentrée.....	26
b)	Formulaire de calcul des efforts internes : méthode simplifiée.....	31
6)	Exercices d'application sur le calcul des réactions aux appuis et les efforts internes dans les poutres isostatiques.....	64
V)	Caractéristiques géométriques des sections.....	85
1)	Centre de gravité.....	85

a)	Généralités.....	85
b)	Définition.....	85
c)	Centre de gravité des sections simples.....	85
d)	Détermination du centre de gravité des sections composées.....	87
e)	Exercices d'application.....	89
2)	Moment d'inertie ou moment quadratique.....	93
a)	Définition.....	93
b)	Moments d'inertie des sections simples.....	94
c)	Théorème de HYGENS :.....	97
d)	Détermination du moment d'inertie des sections composées.....	99
e)	Module d'inertie d'une section.....	102
3)	Exercices d'application : Détermination des caractéristiques géométriques des sections.....	103
VI)	Différentes sollicitations simples.....	111
1)	Compression et traction.....	111
a)	Définition.....	111
b)	Contrainte normale de compression/traction.....	112
c)	Condition de résistance à la compression/ traction.....	112
d)	Essai de Traction.....	112
e)	Exercices d'application :.....	115
4)	Cisaillement.....	118
a)	Contrainte tangentielle de cisaillement.....	118
b)	Déformation.....	118
c)	Condition de résistance au cisaillement.....	119
d)	Exemple :.....	119
5)	Flexion simple.....	121
a)	Définition.....	121
b)	Contrainte normale de flexion.....	121
c)	Condition de résistance :.....	122
d)	Exercices d'application.....	122
	Bibliographie.....	134

I) Rappel sur les unités usuelles :

1) Distances-longueurs :

Km	hm		dam	m	dm	cm	mm

$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 100\text{ cm} = 1000\text{ mm}$

$1\text{ mm} = 0,1\text{ cm} = 10^{-3}\text{ m}$

$1\text{ cm} = 0,01\text{ m} = 10\text{ mm}$

2) Surfaces-Aires- Sections :

m ²		dm ²		cm ²		mm ²	

$1\text{ m}^2 = 10^2\text{ dm}^2 = 10^4\text{ cm}^2 = 10^6\text{ mm}^2$

$1\text{ cm}^2 = 10^2\text{ mm}^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$

$1\text{ mm}^2 = 10^{-2}\text{ cm}^2 = 10^{-6}\text{ m}^2$

3) Forces-poids :

MN		t	KN		daN= Kg	N

$1\text{ MN} = 100\text{ t} = 10^3\text{ KN} = 10^5\text{ Kg} = 10^5\text{ daN} = 10^6\text{ N}$

$\text{daN} = 10\text{ N} = 10^{-5}\text{ MN}$

4) Pressions contraintes :

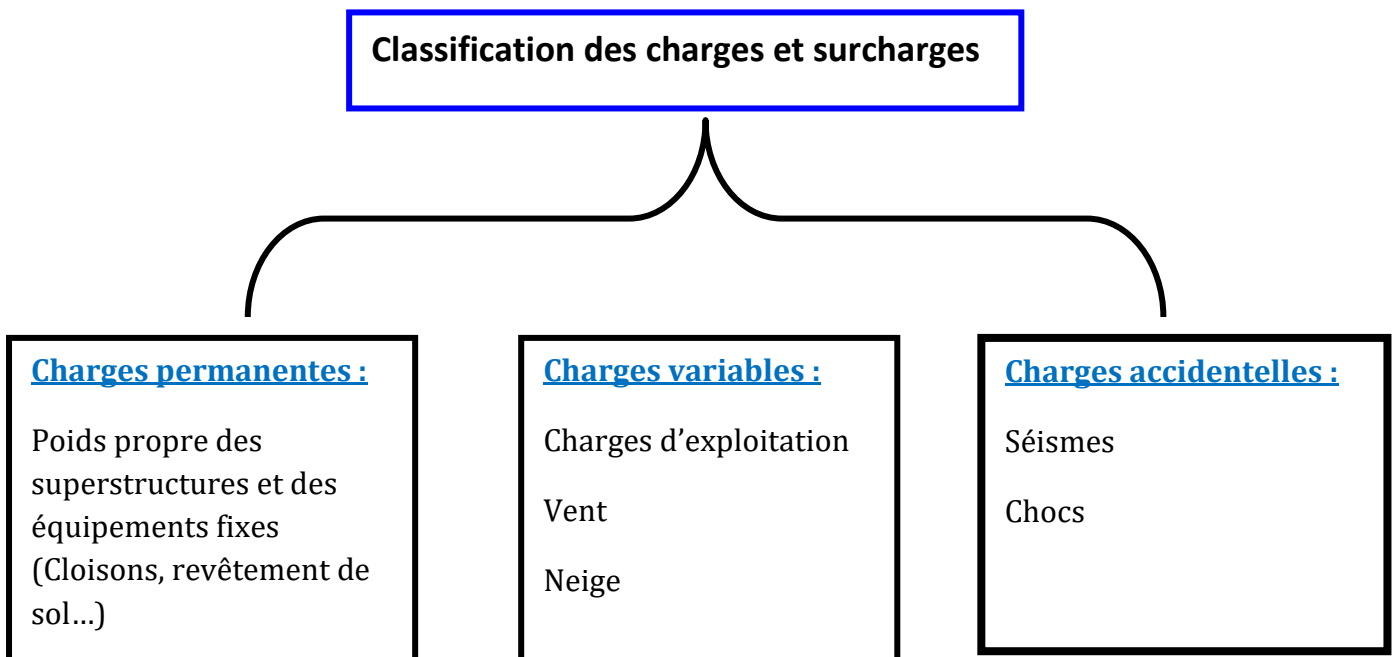
MPa	bar		KPa			Pa

$1\text{ MPa} = 10\text{ bars} = 10^3\text{ KPa} = 10^6\text{ Pa}$

$\text{MPa} = \text{MN/m}^2 = \text{N/mm}^2$

II) Différents types des charges et surcharges :

1) Charges permanentes et variables.



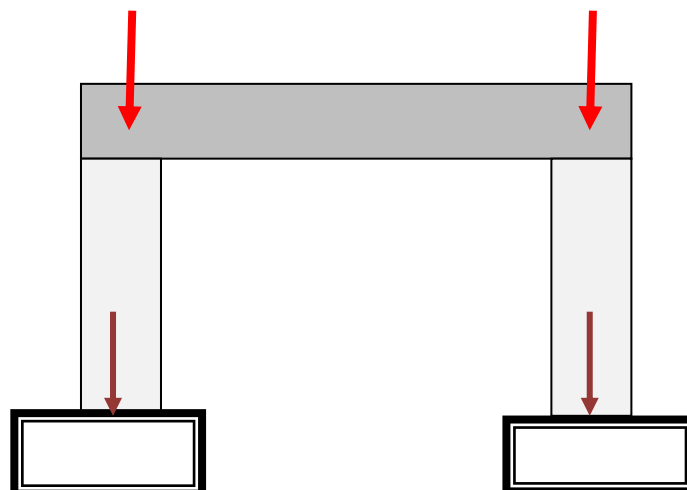
2) Charges concentrées et charges réparties

a) Charges concentrées.

- ❖ Une charge est dite concentrée si sa surface d'application est limitée.
- ❖ Cette surface peut être considérée comme un point.
- ❖ Les charges concentrées sont exprimées en N, MN, daN...

Exemples :

- ✓ Une poutre reposant sur un poteau.
- ✓ Un poteau sur une poutre.
- ✓ Un poteau reposant sur une semelle.



b) Charges réparties.

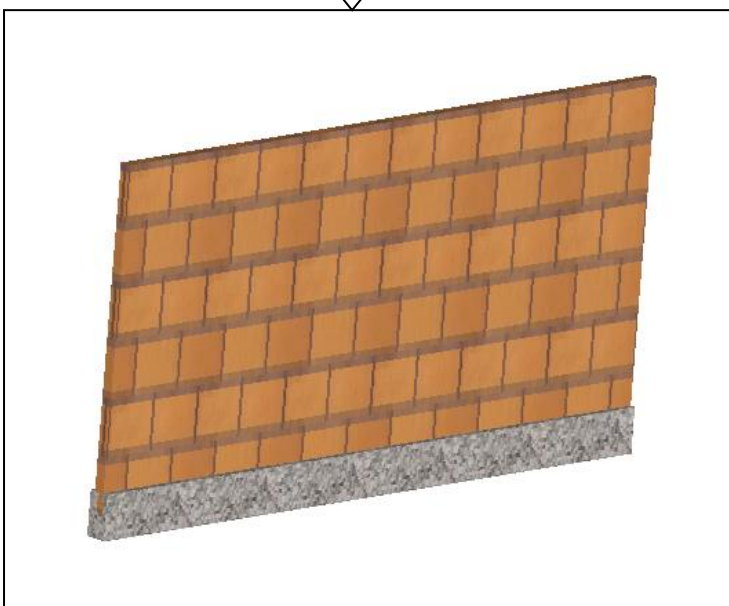
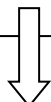
- ❖ Une charge est dite répartie si sa surface d'application est étalée sur une longueur ou sur une surface importante.
- ❖ La charge peut être répartie sur une longueur ou sur une surface.

Charge répartie sur la longueur = charge linéaire exprimée en N/m

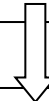


Exemples :

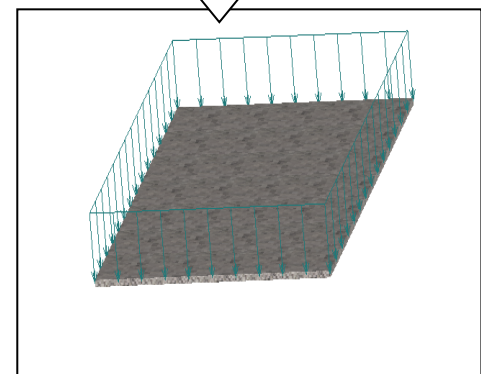
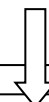
- ❖ Mur sur une poutre
- ❖ Dalle reposant sur une poutre ou sur un voile



Charge répartie sur la surface = charge surfacique exprimée en N/m²

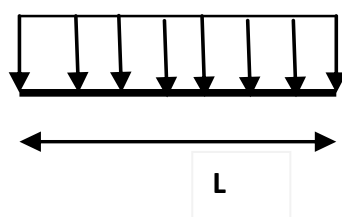


Exemple : Poids du revêtement sur une dalle



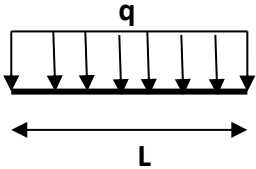
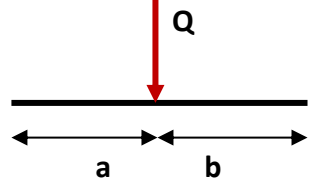
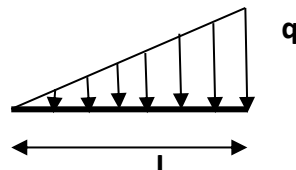
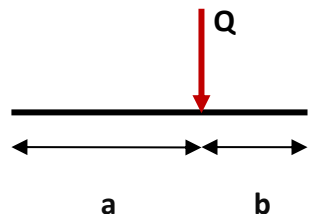
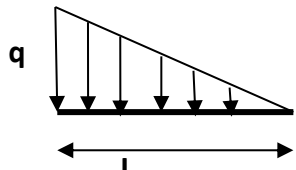
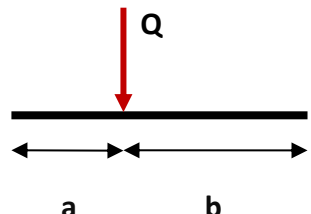
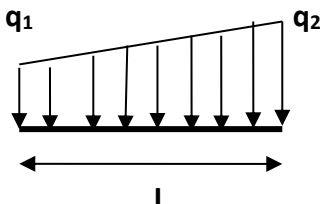
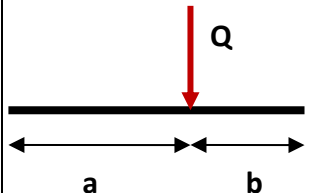
Une charge répartie peut être uniforme ou non.

La charge répartie sur la longueur est schématisée comme suit :

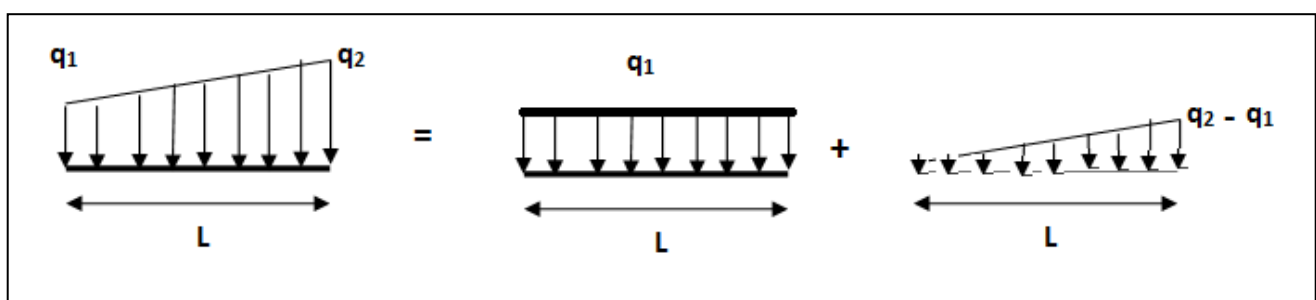


q en N/m

3) Comment convertir une charge répartie en charge concentrée ?

Type de charge	Schéma de la charge répartie	Charge concentrée équivalente et son Point d'application	Schéma final
Charge rectangulaire		$Q = q \cdot L$ $a = b = L/2$	
Charge triangulaire Type 1		$Q = \frac{q \cdot L}{2}$ $a = 2L/3$ $b = L/3$	
Charge triangulaire Type 2		$Q = \frac{q \cdot L}{2}$ $a = L/3$ $b = 2L/3$	
Charge trapézoïdale		$Q = \frac{(q_1 + q_2) \times L}{2}$ $a = \frac{(q_1 + 2q_2) \times L}{3(q_1 + q_2)}$ $b = \frac{(q_2 + 2q_1) \times L}{3(q_1 + q_2)}$	

Remarque :



III) Calcul des réactions aux appuis des poutres isostatiques

1) Différents types d'appuis

On distingue dans la pratique des constructions 3 types fondamentaux d'appuis :

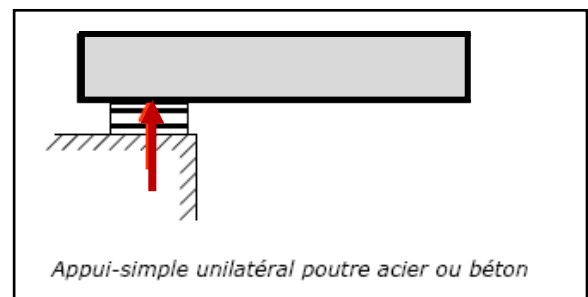
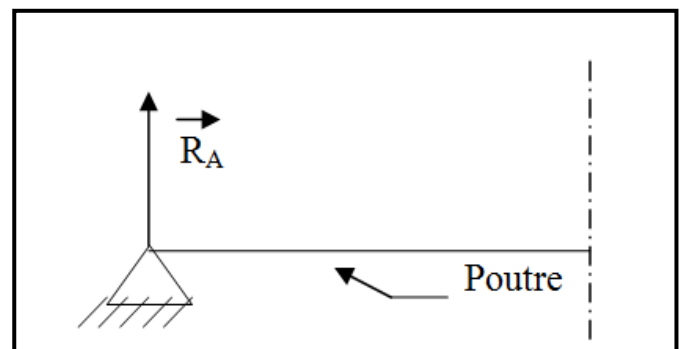
a) Appui simple ou libre :

- Un tel appui est réalisé dans les ouvrages importants tels que les ponts ou dans les constructions (bâtiments).
- Ce genre d'appui donne lieu à une réaction R normale à la surface d'appui et ne s'oppose pas à un effort s'exerçant suivant l'axe longitudinal de la poutre
- On n'aura donc qu'une seule inconnue à déterminer par appui d'où le nom d'appui simple

L'appui correspond donc à :

- Suppression d'un degré de liberté en translation (perpendiculaire à l'appui)
- 1 force (perpendiculaire à l'appui dans la majorité des cas)
- 1 inconnue dans les équations d'équilibre

Dans la pratique, les appuis simples sont réalisés pour laisser libre cours aux dilatations (resp. Rétractions) thermiques des éléments de structure afin de ne pas générer d'efforts de compression (resp. Traction) supplémentaires.

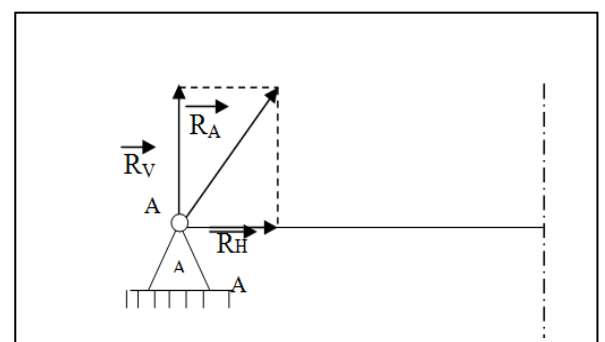


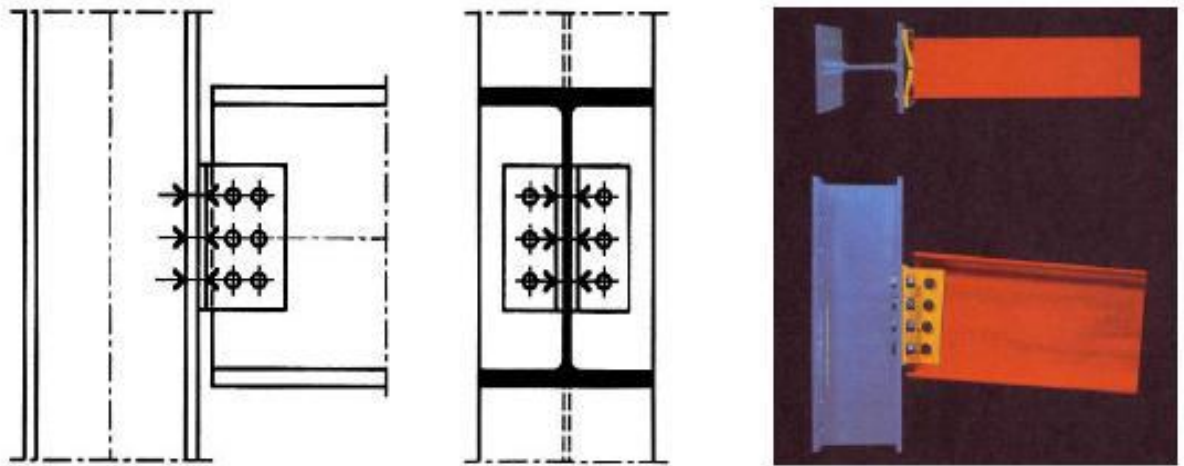
b) Appui double ou à rotule :

- Une rotule est une articulation sphérique qui permet une rotation en tous sens de l'une des pièces par rapport à l'autre.
- Un tel appui donne lieu à une réaction R de direction quelconque que l'on peut décomposer en une composante verticale R_v et une composante horizontale R_H
- Il y a donc dans ce cas 2 inconnues à déterminer R_H et R_v d'où le nom d'appui double qui se représente comme suit :

L'appui correspond donc à :

- Suppression de 2 degrés de liberté en translation
- 2 réactions d'appui : 2 forces
- 2 inconnues dans les équations d'équilibre

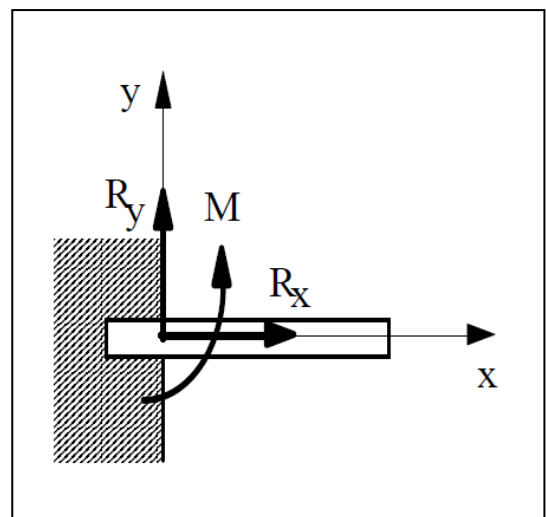
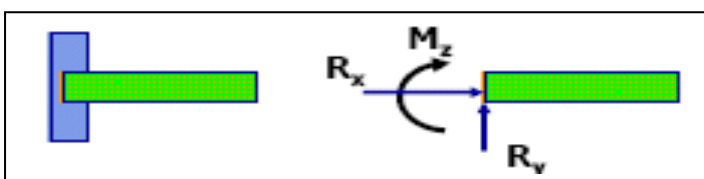
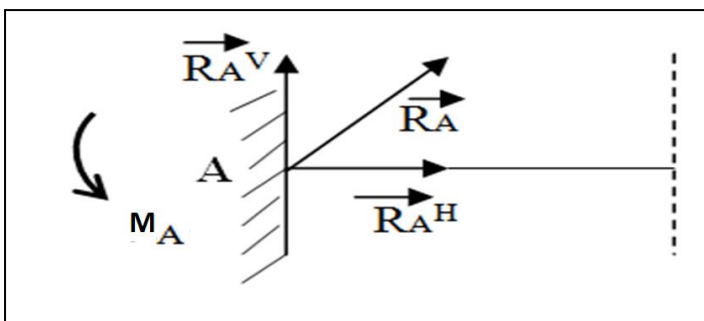




Articulation poteau acier – poutre acier

c) Appui triple ou encastrement:

- Un tel appui donne lieu à une réaction de direction quelconque présentant une réaction verticale et une réaction horizontale et un moment d'encastrement M_A .
- On a donc 3 inconnues à déterminer par appui d'où le nom d'appui triple qui se représente comme suit :



L'appui correspond donc à :

- ❖ Suppression des trois degrés de liberté
- ❖ 3 réactions d'appui : 2 forces + 1 moment
- ❖ 3 inconnues dans les équations d'équilibre

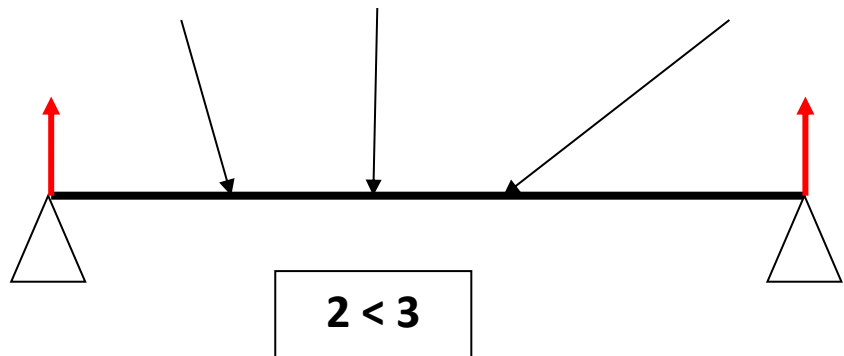
2) Systèmes de forces

a) Système hypostatique :

Si le nombre d'inconnues d'appuis est **inférieur** au nombre d'équation d'équilibre statique, la construction risque de s'écrouler.

Exemple : poutre appuyant sur 2 appuis simples et recevant des charges de direction quelconques.

Nombre d'inconnues = 2
 Nombre d'équation d'équilibre statique = 3

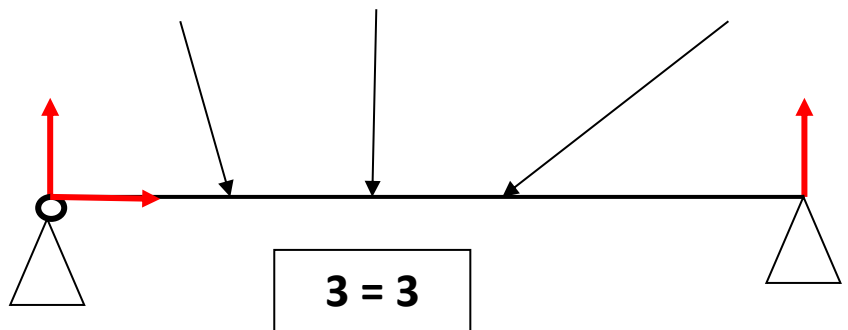


b) Système isostatique:

Si le nombre d'inconnues est **égal** au nombre des équations d'équilibre statique la poutre est stable et calculable par les équations d'équilibre statique seules.

Exemple : poutre à 2 appuis dont l'un est simple et l'autre est double.

Nombre d'inconnues = 3
 Nombre d'équation d'équilibre statique = 3



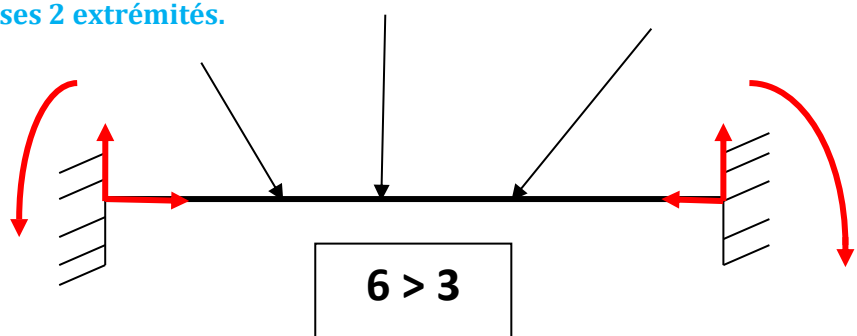
c) Système hyperstatique :

Si le nombre d'inconnus d'appuis est **supérieur** au nombre d'équations d'équilibre statique la porte serait stable.

Mais les équations d'équilibre statique ne permettraient pas de déterminer les inconnus d'appuis.

Exemple : poutre encastrée à ses 2 extrémités.

Nombre d'inconnues = 6
 Nombre d'équation d'équilibre statique = 3



3) Equations de la statique.

Pour calculer les réactions d'appuis, on considère la pièce à étudier comme un solide libre en remplaçant ces appuis par les forces de réactions.

On écrit alors que cette pièce est en équilibre sous l'action des forces directement appliquées que l'on connaît et des réactions d'appuis qui sont inconnues par les équations d'équilibre statique :

$$\sum_{i=1}^n F_{i/Ox} = 0 \rightarrow ; \quad \sum_{i=1}^n F_{i/Oy} = 0 \rightarrow ; \quad \sum_{I=1}^n M_{F_i/O} = 0 \rightarrow$$

On peut simplifier les équations de la statique après la décomposition des forces inclinées en écrivant :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$

EQUATION N°3 $\sum M(F/A) = 0$

4) Rappel : Moment d'une force par rapport à un point :

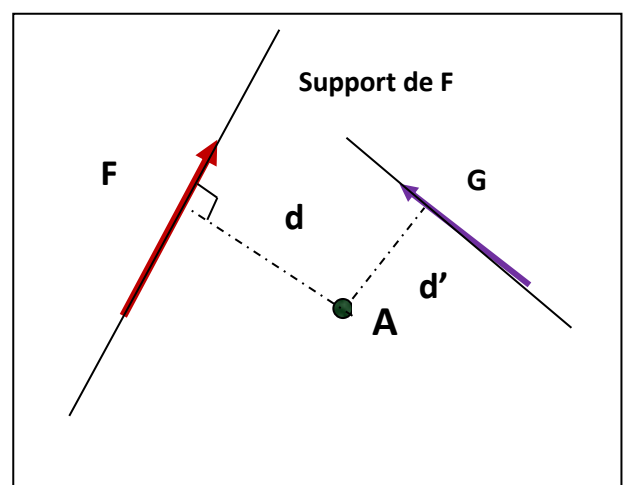
Moment d'une force par rapport à un point A = \pm Force x Distance perpendiculaire entre la force et le point

Par convention, un moment est considéré positif si la force tend à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.

Il est négatif dans le cas contraire

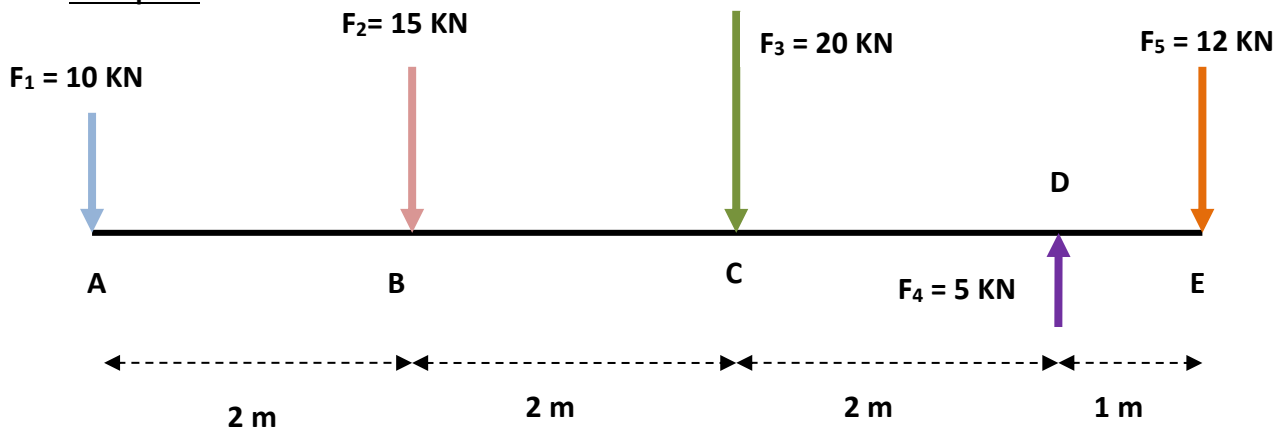
$$M(F/A) = + F \times d$$

$$M(G/A) = - G \times d'$$



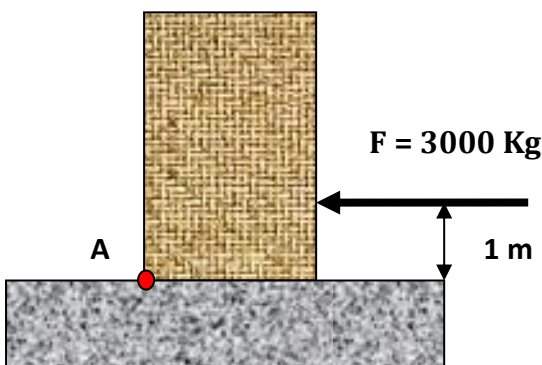
Le moment est exprimé en N.m (KN.m ou MN.m...)

Exemples :



Calculer les moments de toutes les forces par rapport à tous les points en remplissant le tableau suivant :

Force \ Point	$F_1 = 10 \text{ KN}$	$F_2 = 15 \text{ KN}$	$F_3 = 20 \text{ KN}$	$F_4 = 5 \text{ KN}$	$F_5 = 12 \text{ KN}$
A	$= 10 \times 0$ $= 0$	$= + 15 \times 2$ $= + 30$	$= 20 \times 4$ $= + 80$	$= - 5 \times 6$ $= - 30$	$= 12 \times 7$ $= + 84$
B	$= - 10 \times 2$ $= - 20$	$= 15 \times 0$ $= 0$	$= 20 \times 2$ $= + 40$	$= - 5 \times 4$ $= - 20$	$= 12 \times 5$ $= + 60$
C	$= - 10 \times 4$ $= - 40$	$= - 15 \times 2$ $= - 30$	$= 20 \times 0$ $= 0$	$= - 5 \times 2$ $= - 10$	$= 12 \times 3$ $= + 36$
D	$= - 10 \times 6$ $= - 60$	$= - 15 \times 4$ $= - 60$	$= - 20 \times 2$ $= - 40$	$= 5 \times 0$ $= 0$	$= 12 \times 1$ $= + 12$
E	$= - 10 \times 7$ $= - 70$	$= - 15 \times 5$ $= - 75$	$= - 20 \times 3$ $= - 60$	$= 5 \times 1$ $= 5$	$= 12 \times 0$ $= 0$

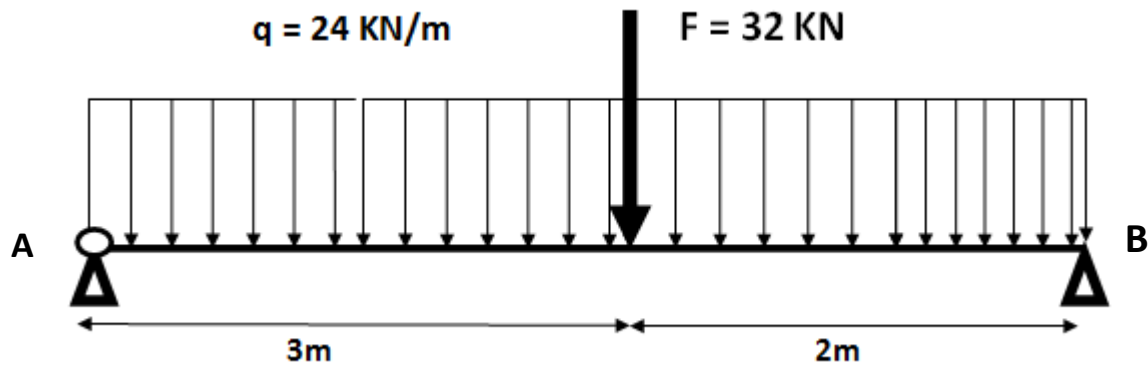


$$\begin{aligned}
 M(F/A) &= - F \times d \\
 &= - 3000 \times 1 \\
 &= - 3000 \text{ Kg.m}
 \end{aligned}$$

5) Exemples de calcul des réactions aux appuis des poutres isostatiques.

Exemple 1 : Calculer les réactions aux appuis de la poutre isostatique représentée sur la figure suivante :

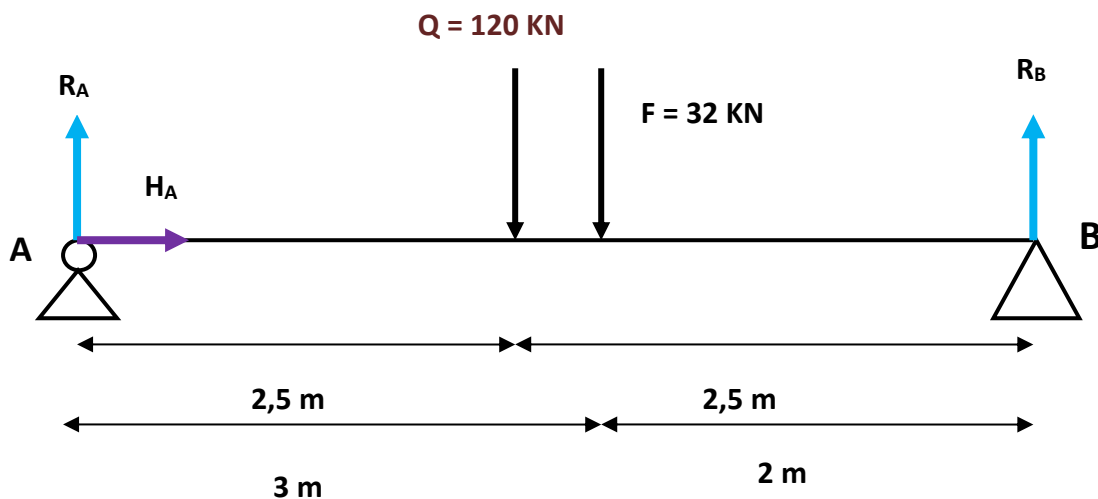
La poutre reçoit une charge répartie q et une charge concentrée F .



Etape 1 : Convertir les charges réparties en charges concentrées :

- On a : $Q = q \times L = 24 \times 5 = 120 \text{ KN}$
- Point d'application : $a = b = L/2 = 5/2 = 2,5 \text{ m}$

Etape 2 : Représentation des réactions aux appuis et des charges concentrées :



Etape 3 : Equations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ $\Rightarrow HA = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ $\Rightarrow RA + RB = Q + F = 120 + 32 = 152 \text{ KN}$

$\Rightarrow RA + RB = 152 \text{ KN}$

Cherchons une deuxième équation pour déterminer les deux inconnues :

$$EQUATION N^{\circ}3 \quad \sum MF/A = 0$$

NB : On peut aussi écrire cette équation par rapport à B.

On a :

Force	RA	HA	Q	F	RB
Moment de la force /A En KN.m	RA x 0 = 0	HA x 0 = 0	+Q x 2,5 = 300	+F x 3 = 96	-RB x 5 = - 5 RB

$$D'où : 0 + 0 + 300 + 96 - 5 RB = 0 \longrightarrow 5 RB = 396 \longrightarrow RB = 396 / 5$$

$$\Rightarrow RB = 79,2 \text{ KN}$$

Puisque : $R_A + R_B = 152 \text{ KN}$, alors : $R_A = 152 - R_B = 152 - 79,2 = 72,8 \text{ KN}$

$$\Rightarrow RA = 72,8 \text{ KN}$$

Conclusion :

$$\left. \begin{array}{l} HA = 0 \\ RA = 72,8 \text{ KN} \\ RB = 79,2 \text{ KN} \end{array} \right\}$$

Si on écrit la troisième équation par rapport à B , on trouvera :

Force	RA	HA	Q	F	RB
Moment de la force /B En KN.m	+RA x 5 = 5 RA	HA x 0 = 0	- Q x 2,5 = -300	-F x 2 = -64	RB x 0 = 0

$$D'où : 5 RA + 0 - 300 - 64 + 0 = 0 \longrightarrow 5 RA = 364 \longrightarrow RA = 364 / 5$$

$$\Rightarrow RA = 72,8 \text{ KN}$$

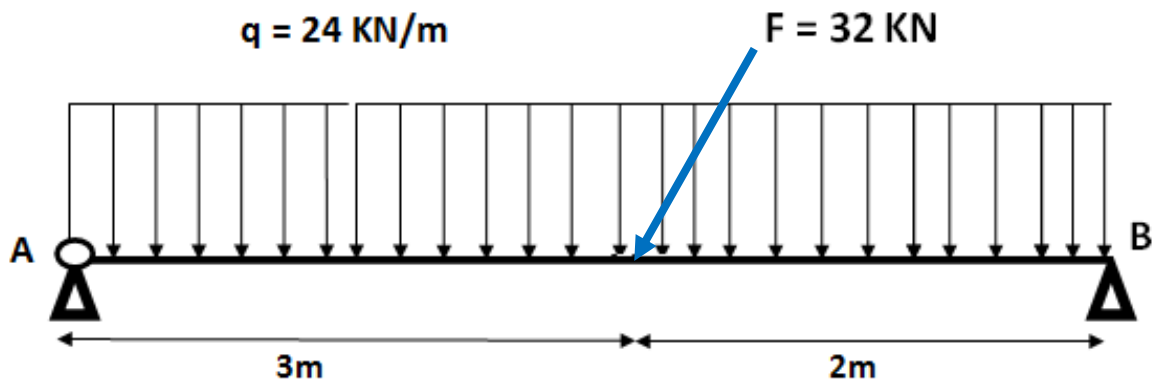
Puisque : $R_A + R_B = 152 \text{ KN}$, alors : $R_B = 152 - R_A = 152 - 72,8 = 79,2 \text{ KN}$

$$\Rightarrow RB = 79,2 \text{ KN}$$

On trouvera bien évidemment les mêmes résultats

Exemple 2 : Calculer les réactions aux appuis de la poutre isostatique représentée sur la figure suivante : charge inclinée.

La poutre reçoit une charge répartie q et une charge concentrée F inclinée d'un angle 60° .



Etape 0 : Décomposer la charge inclinée en deux composantes verticale et horizontale :

La charge inclinée peut être décomposée en deux forces filles :

Composante verticale : F_y

$$F_y = F \sin \alpha$$

Application numérique :

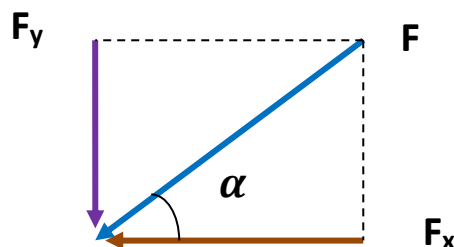
$$F_y = 32 \sin 60 = 27,71 \text{ KN}$$

Composante horizontale : F_x

$$F_x = F \cos \alpha$$

Application numérique :

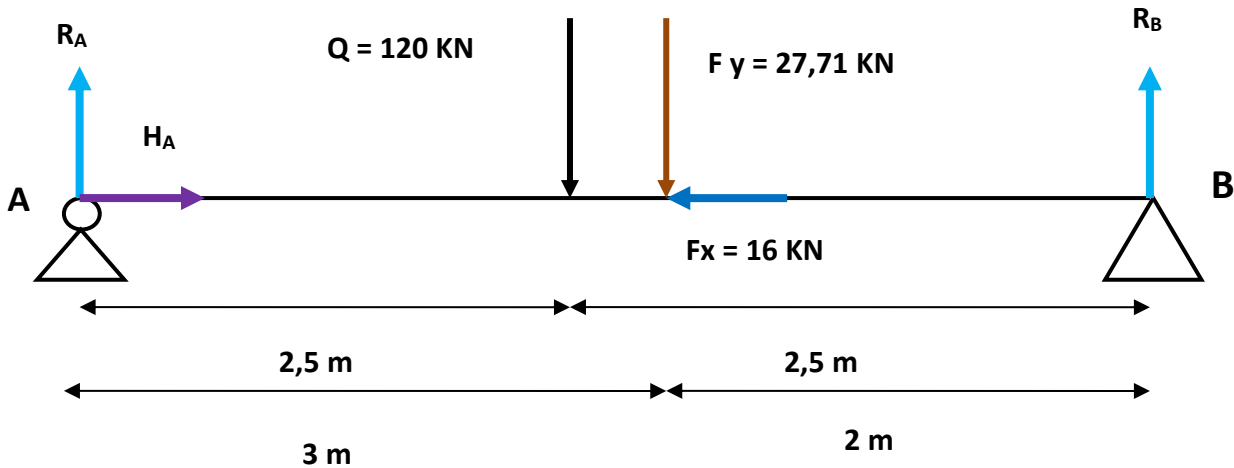
$$F_x = 32 \cos 60 = 16 \text{ KN}$$



Etape 1 : Convertir les charges réparties en charges concentrées :

- On a : $Q = q \times L = 24 \times 5 = 120 \text{ KN}$
- Point d'application : $a = b = L/2 = 5/2 = 2,5 \text{ m}$

Etape 2 : Représentation des réactions aux appuis et les charges concentrées :



Etape 3 : Equations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow \implies HA = Fx = 16 \text{ KN}$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \implies RA + RB = Q + Fy = 120 + 27,71 = 147,71 \text{ KN}$

$RA + RB = 147,71 \text{ KN}$

Cherchons une deuxième équation pour déterminer les deux inconnues :

EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HA	Q	Fx	Fy	RB
Moment de la force /A En KN.m	$RA \times 0 = 0$	$HA \times 0 = 0$	$+Q \times 2,5 = 300$	$Fx \times 0 = 0$	$+Fy \times 3 = 83,13$	$-RB \times 5 = -5 RB$

D'où : $0 + 0 + 300 + 83,13 - 5 RB = 0 \implies 5 RB = 383,13 \implies RB = 383,13 / 5$

$\implies RB = 76,63 \text{ KN}$

Puisque : $RA + RB = 147,71 \text{ KN}$, alors : $RA = 147,71 - RB = 147,71 - 76,63 = 71,08 \text{ KN}$

$\implies RA = 71,08 \text{ KN}$

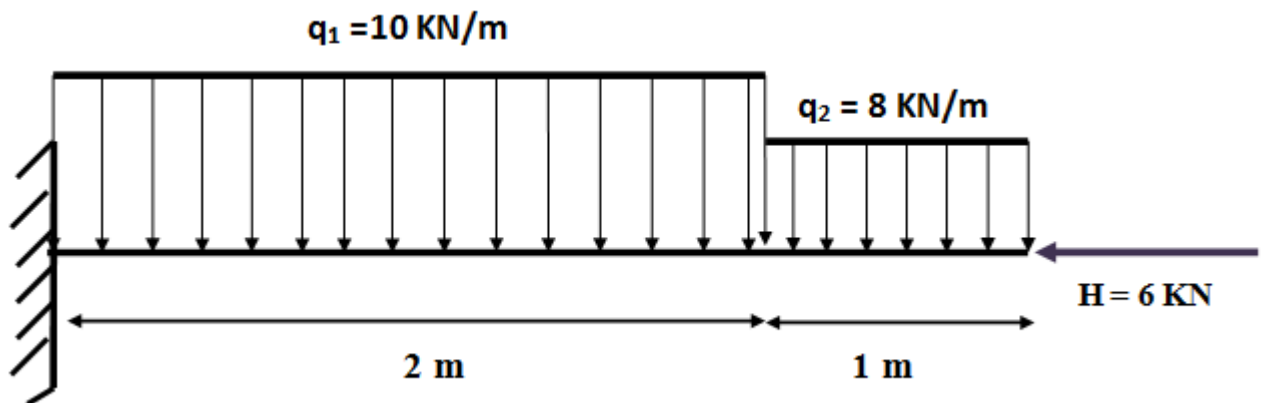
Conclusion :

$$H_A = 16 \text{ KN}$$

$$R_A = 71,08 \text{ KN}$$

$$R_B = 76,63 \text{ KN}$$

Exemple 3 : Calculer les réactions aux appuis de la poutre encastree représentée sur la figure suivante :



Etape 1 : Convertir les charges réparties en charges concentrées :

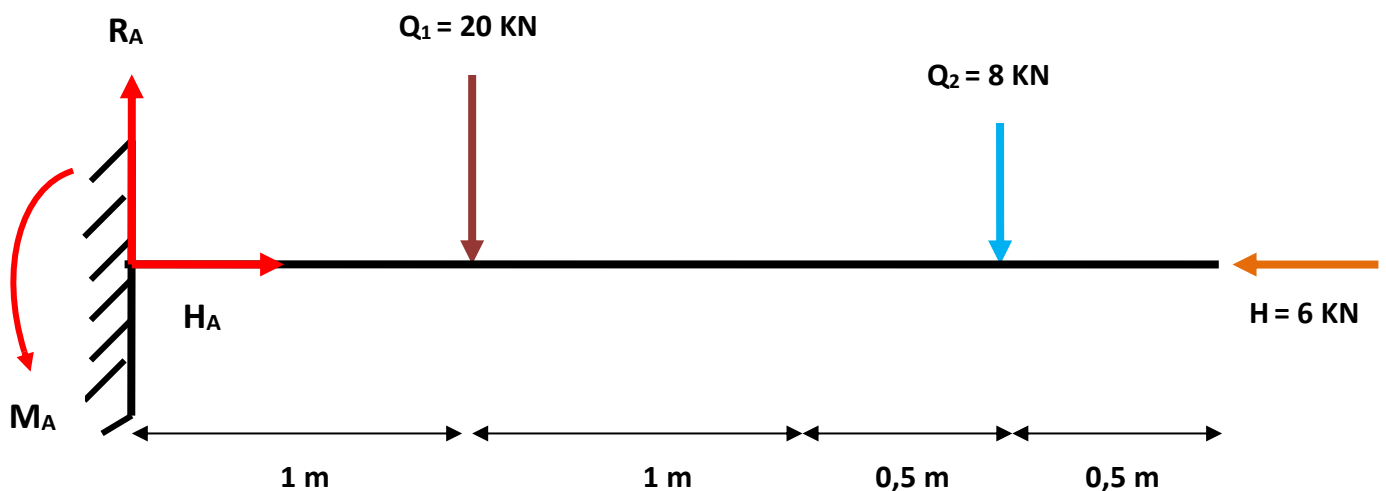
On a : $Q_1 = q_1 \times L_1 = 10 \times 2 = 20 \text{ KN}$

Point d'application : $a_1 = b_1 = 2/2 = 1 \text{ m}$

On a : $Q_2 = q_2 \times L_2 = 8 \times 1 = 8 \text{ KN}$

Point d'application : $a_2 = b_2 = 1/2 = 0,5 \text{ m}$

Etape 2 : Représentation des réactions aux appuis et les charges concentrées :



NB : On peut aussi représenter le moment d'encastrement dans le sens inverse. Il sera donc pris positif dans les calculs.

Etape 3 : Equations de la statique :

EQUATION N°1

$$\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$$

$$HA = H = 6 \text{ KN}$$

EQUATION N°2

$$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$$

$$R_A = Q_1 + Q_2 = 20 + 8 = 28 \text{ KN}$$

$$R_A = 28 \text{ KN}$$

$$EQUATION N°3 \quad \sum MF/A = 0$$

On a:

Force	RA	HA	Q ₁	Q ₂	
Moment de la force /A En KN.m	RA x 0 = 0	HA x 0 = 0	+Q ₁ x 1 = 20	+Q ₂ x 2,5 = 20	-M _A

Le moment d'encastrement est négatif (sens contraire des aiguilles d'une montre)

D'où : $0 + 0 + 20 + 20 - M_A = 0 \quad \longrightarrow \quad M_A = 40 \text{ KN.m}$

$$M_A = 40 \text{ KN.m}$$

Conclusion :

$$HA = 6 \text{ KN}$$

$$RA = 28 \text{ KN}$$

$$M_A = 40 \text{ KN.m}$$

NB : Si on prend le moment d'encastrement dans le sens des aiguilles d'une montre, on trouvera :

$$M_A = - 40 \text{ KN.m}$$

IV) Calcul des efforts internes dans une poutre :

1) Forces extérieures :

- On appelle **forces extérieures ou charges** les forces appliquées **connues** sur une structure donnée.
- Ces charges peuvent-êre :
 - **Réparties avec une densité donnée de volume** (poids propre d'une structure)
 - **Ou concentrées** en un certain nombre de points.
- Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi **les réactions d'appuis**.
- **La poutre se trouve en équilibre sous l'effet de ces forces extérieures. Cet équilibre nous permet de déterminer les réactions aux appuis en écrivant les équations d'équilibre statique (voir chapitre précédent).**

2) Efforts internes

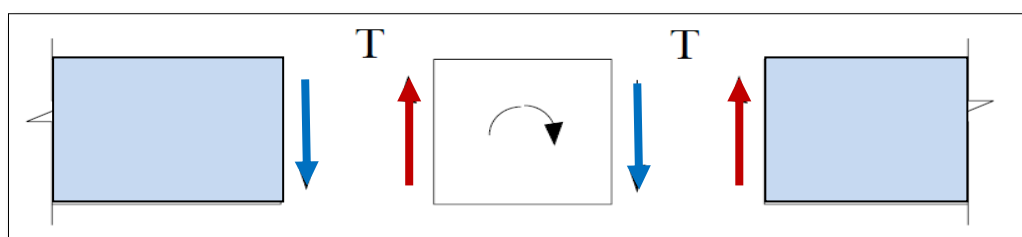
- Sous l'effet des charges extérieures, **les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient.**
- En Résistance des Matériaux (RDM), on appelle souvent cette variation des forces **efforts internes**.

a) Effort Normal

- La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément).
- L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément.
- N est considéré positif s'il s'agit d'une **traction** et négatif dans le cas contraire (**compression**)

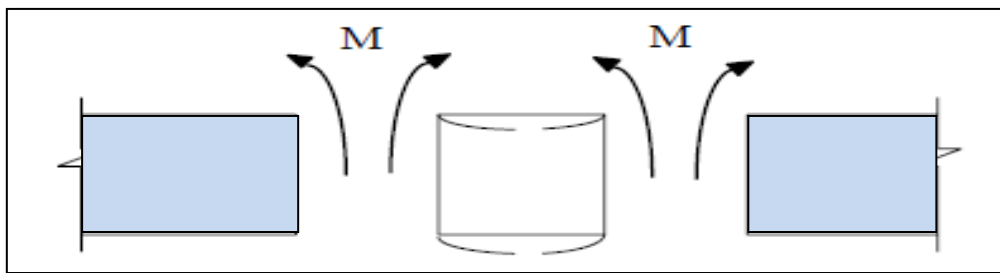
b) Efforts tranchants

- Les forces transversales T_z , et T_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière.



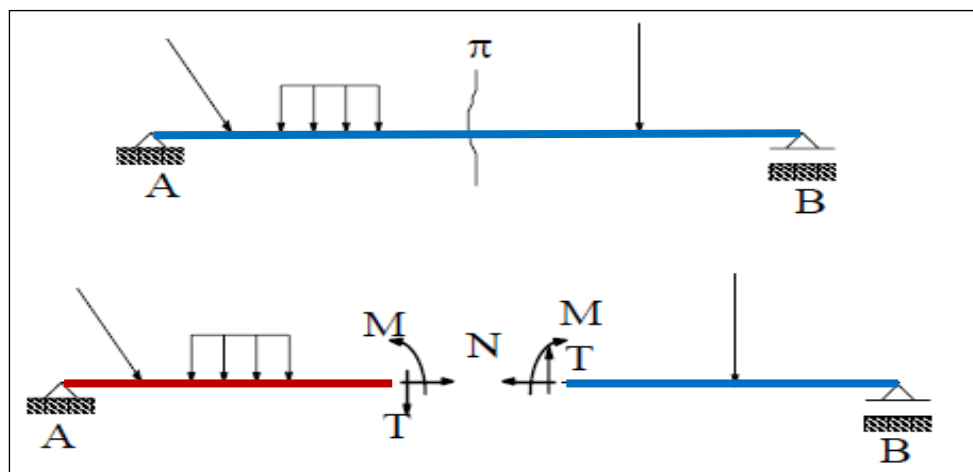
c) Moments Fléchissants

- Les composantes M_y , et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement.



3) METHODE DES SECTIONS POUR CALCULER LES EFFORTS INTERNES

- Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, **de la méthode des sections**.
- Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.
- On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures
- Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties.
- Les valeurs numériques des efforts N, T, et M sont **égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties** (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.



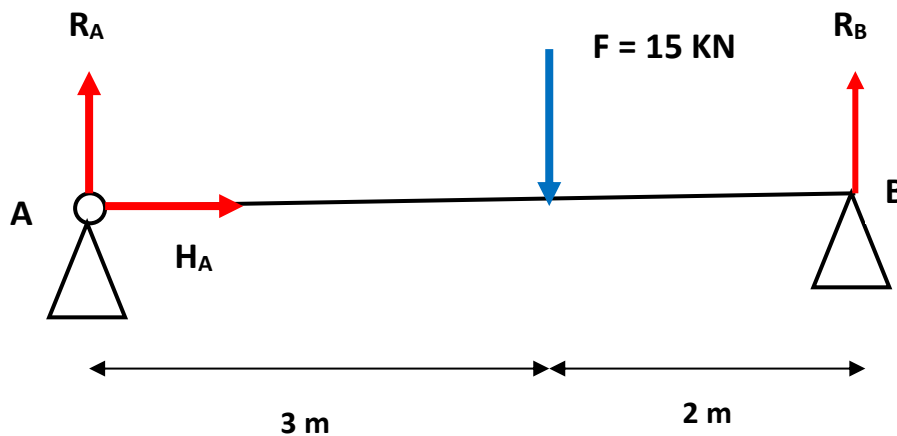
4) DIAGRAMMES DES EFFORTS ET DES MOMENTS M,N,T

- En général, les efforts et moments agissant dans différentes sections varient le long de la poutre. Entre autres les valeurs maximales et minimales de ces efforts et moments sont d'une grande importance pour la sécurité de la poutre, on s'intéresse donc à tracer des courbes qui montrent comment changent les efforts et les moments d'une section à une autre, on appelle ces courbes **les diagrammes des efforts et des moments**.
- On se limite dans cette section à l'étude des diagrammes des efforts et des moments dans les poutres à deux dimensions (plan XOY), ce qui réduit le nombre des efforts et des moments à trois, à savoir un effort normal N, un effort tranchant Ty, et un moment fléchissant Mz

5) EXEMPLES DE CALCUL DES EFFORTS INTERNES DANS DES POUTRES ISOSTATIQUES

a) Exemple 1 : cas d'une charge concentrée

Considérons, sur la figure suivante, une poutre isostatique chargée par une force concentrée F.



Travail demandé : Etablir les équations des efforts internes le long de la poutre et tracer leurs diagrammes pour en déduire leurs valeurs extrêmes.

Etape 1 : Calcul des réactions aux appuis :

Avant de calculer les efforts internes dans une poutre, il est indispensable de calculer d'abord les réactions aux appuis.

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ \Rightarrow $H_A = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ \Rightarrow $R_A + R_B = F = 15 \text{ KN}$

$R_A + R_B = 15 \text{ KN}$

Cherchons une deuxième équation pour déterminer les deux inconnues :

$$EQUATION N^{\circ}3 \quad \sum MF/A = 0$$

On a :

Force	RA	HA	F	RB
Moment de la force /A En KN.m	RA x 0 = 0	HA x 0 = 0	+F x 3 = 45	-RB x 5 = - 5 RB

$$D'où : 0 + 0 + 45 - 5 RB = 0 \longrightarrow 5 RB = 45 \longrightarrow RB = 45 / 5$$

$$\Rightarrow \boxed{RB = 9 \text{ KN}}$$

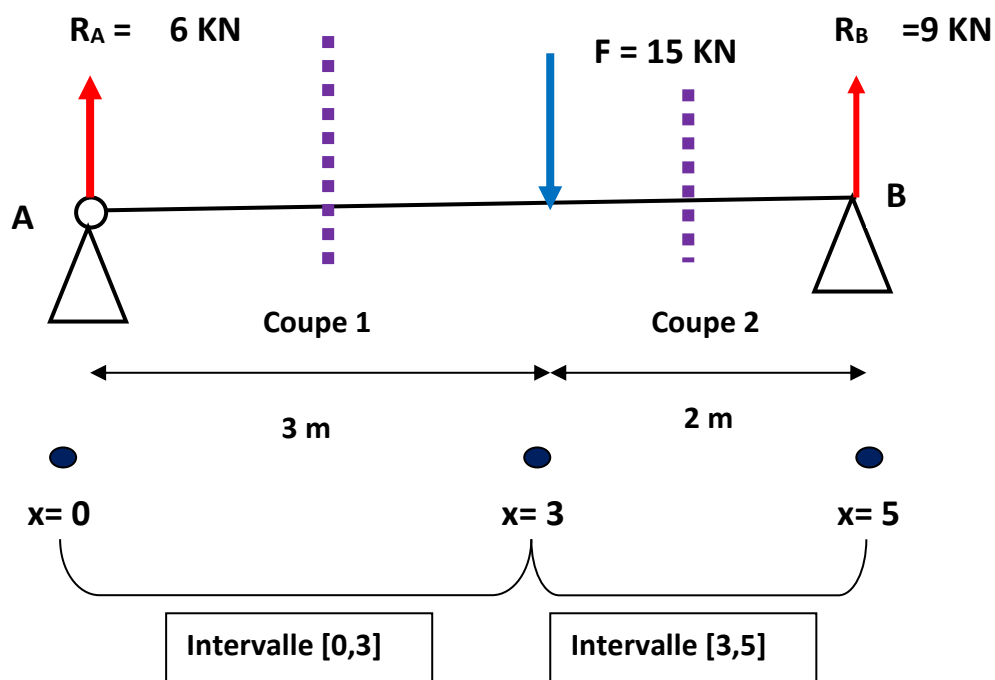
Puisque : $R_A + R_B = 15 \text{ KN}$, alors : $R_A = 15 - R_B = 15 - 9 = 6 \text{ KN}$

$$\Rightarrow \boxed{RA = 6 \text{ KN}}$$

Etape 2 : Calcul des efforts internes dans la poutre.

Dans cette poutre, deux coupes à prévoir : La première coupe avant la force F et la deuxième après F.

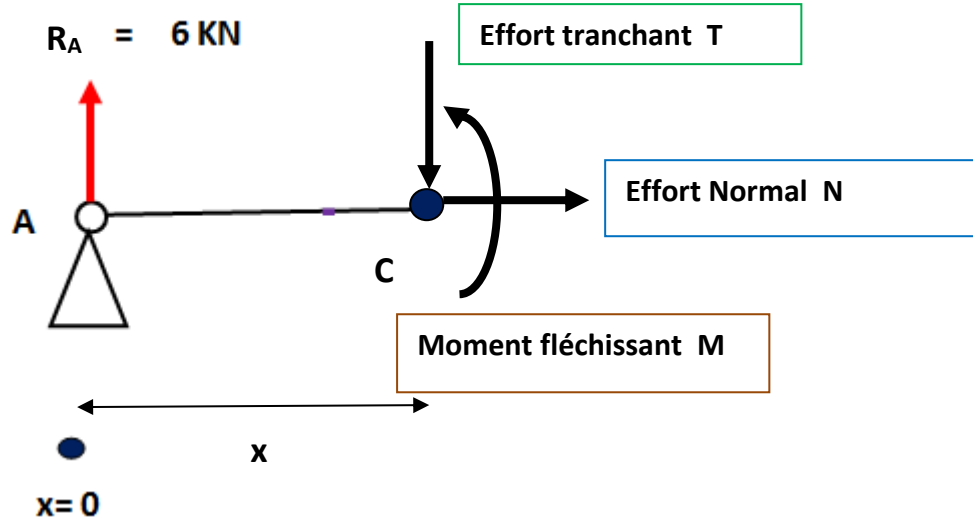
En général, on détermine les bornes d'un intervalle dans les points d'application des forces concentrées et le début ou la fin d'une charge répartie.



Nous avons donc deux intervalles :

- ❖ Intervalle [0,3]
- ❖ Intervalle [3,5]
- a) Si x appartient à [0,3]

On coupe avant la force F , et on obtient le schéma suivant :



Nous écrivons, à nouveau, les équations de la statique

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ \Rightarrow $N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ \Rightarrow $R_A = T$

$T(x) = 6 \text{ kN}$

L'effort tranchant est constant dans l'intervalle [0,3]

On écrit la troisième équation par rapport à C :

EQUATION N°3 $\sum MF/C = 0$ C : Point de coupe d'abscisse x

On a :

Force	R_A	T	N	
Moment de la force /C En KN.m	$R_A \cdot x = 6x$	$T \times 0 = 0$	$N \times 0 = 0$	-M

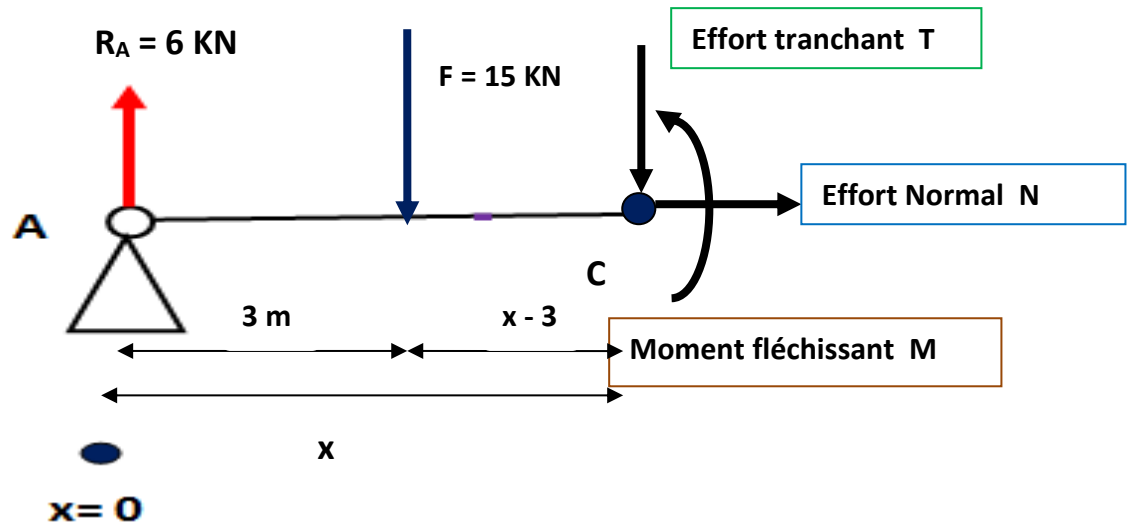
D'où : $6x + 0 + 0 - M = 0 \Rightarrow M = 6x \Rightarrow$ $M(x) = 6x$

Le moment fléchissant varie en fonction de x dans l'intervalle [0,3]

$M(0) = 6 \times 0 = 0 \text{ KN.m}$
 $M(3) = 6 \times 3 = 18 \text{ KN.m}$

b) Si x appartient à $[3,5]$

On coupe après la force F , et on obtient le schéma suivant :



Nous écrivons, à nouveau, les équations de la statique

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow \implies N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \implies R_A = T + F \implies T = R_A - F$

$T(x) = -9 \text{ KN}$

L'effort tranchant est constant dans l'intervalle $[3,5]$

On écrit la troisième équation par rapport à C :

EQUATION N°3 $\sum MF/C = 0$ C : Point de coupe d'abscisse x

On a :

Force	RA	F	T	N	
Moment de la force /C En KN.m	$RA \cdot x$ $= 6x$	$-F(x-3)$ $= -15x + 45$	Tx $= 0$	Nx $= 0$	-M

D'où : $6x - 15x + 45 - M = 0 \implies M = -9x + 45 \implies M(x) = -9x + 45$

Le moment fléchissant varie en fonction de x dans l'intervalle $[3,5]$

$M(3) = -9 \times 3 + 45 = 18 \text{ KN.m}$
 $M(5) = -9 \times 5 + 45 = 0 \text{ KN.m}$

Remarques importantes :

- L'effort tranchant n'est pas toujours une fonction continue. Un point peut avoir deux images différentes dans deux intervalles différents. (Point d'application d'une charge concentrée).
- La fonction $M(x)$ est continue. Les images d'un point commun entre deux intervalles sont identiques.
- Le moment fléchissant est nul dans les extrémités de la poutre :

$$M(0) = 0 \text{ KN.m}$$

$$M(5) = 0 \text{ KN.m}$$

- La dérivée de la fonction $M(x)$ n'est que la fonction $T(x)$:

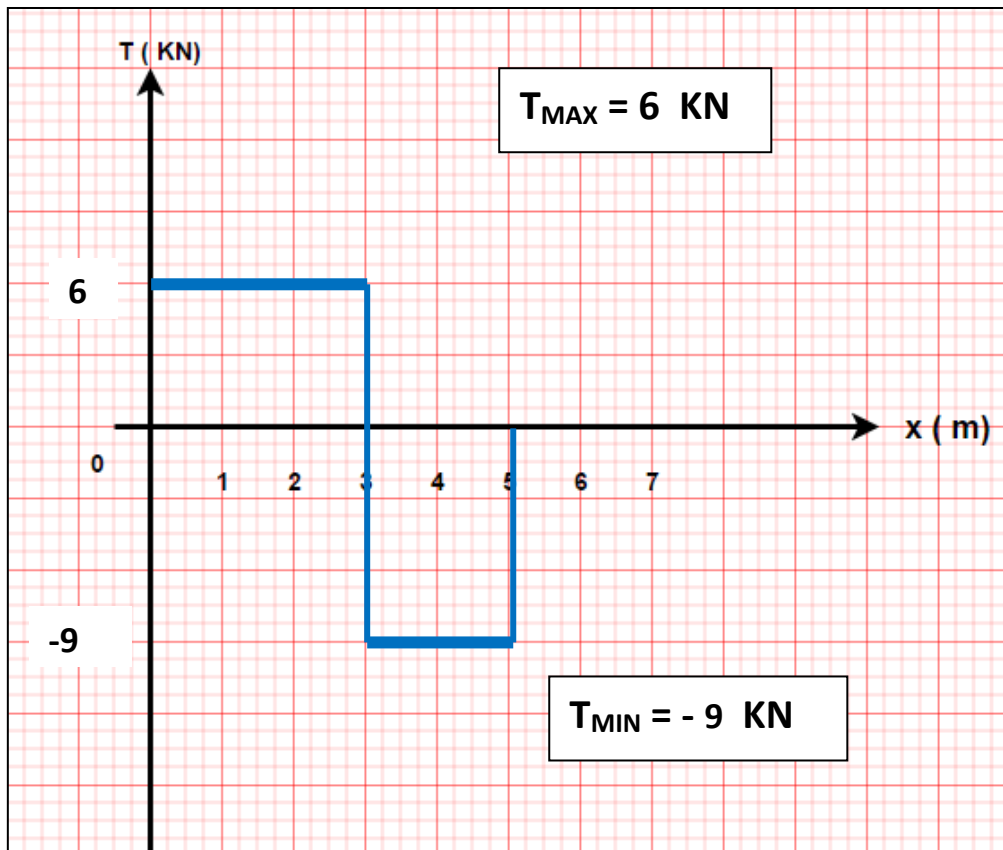
$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x)$$

❖ Intervalle $[0,3]$ $M(x) = 6x$; $T(x) = 6 \text{ KN}$

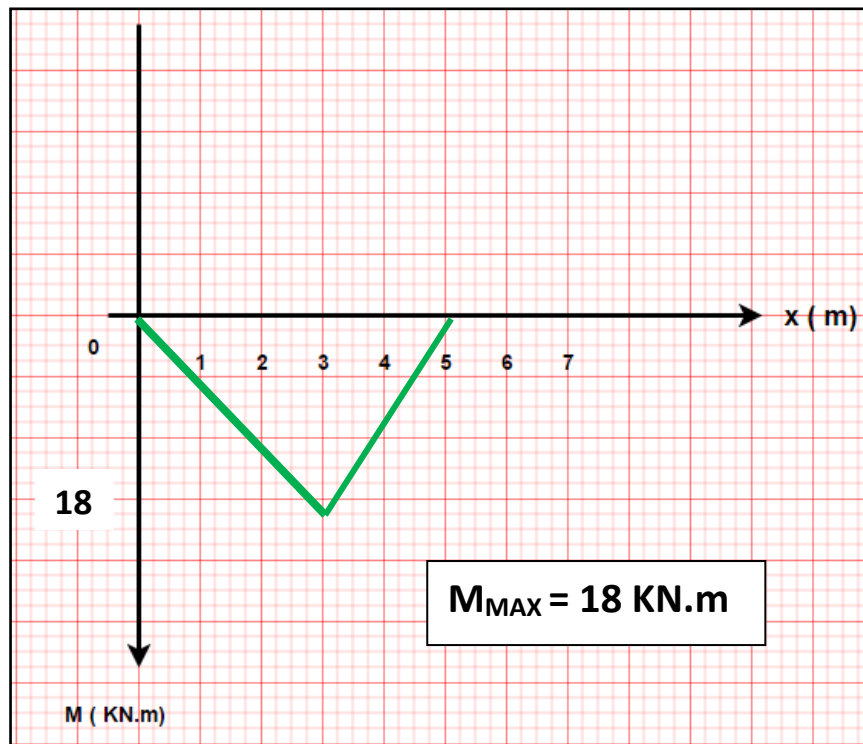
❖ Intervalle $[3,5]$ $M(x) = -9x + 45$; $T(x) = -9 \text{ KN}$

Diagrammes des efforts internes :

a) Effort tranchant



a) Moment fléchissant :

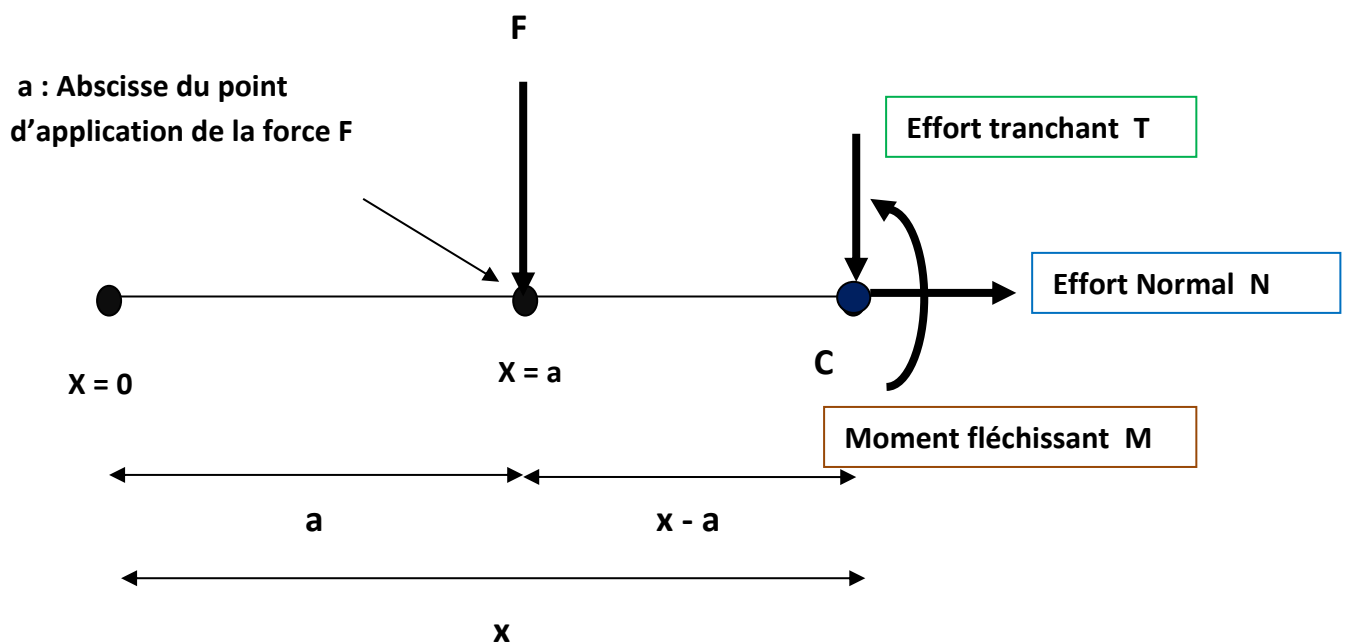


b) Formulaire de calcul des efforts internes : méthode simplifiée

Pour éviter d'établir à chaque fois les mêmes équations des efforts internes, on peut traiter le cas général et établir un formulaire simple à utiliser pour tous les cas.

i) Cas d'une charge concentrée.

Si on coupe après une charge concentrée, on se trouvera dans le cas suivant :



On écrit les équations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ \Rightarrow $N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ \Rightarrow $0 = T + F$ \Rightarrow $T = -F$

$T(x) = -F$

On écrit la troisième équation par rapport à C :

EQUATION N°3 $\sum MF/C = 0$

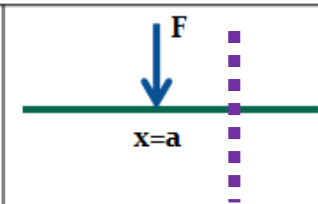
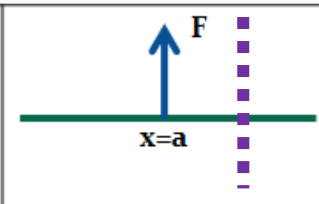
On a :

Force	F	T	N	
Moment de la force /C En KN.m	$-F(x-a)$	$T \times 0 = 0$	$N \times 0 = 0$	$-M$

D'où : $-F(x-a) - M = 0$ \Rightarrow $M(x) = -F(x-a)$

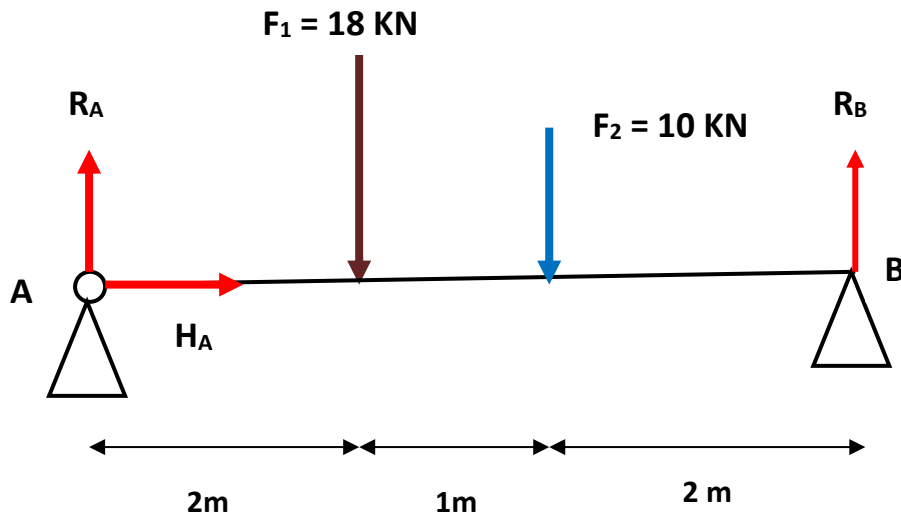
Conclusion :

Si on réalise une coupe après une charge concentrée, cette charge intervient dans l'effort tranchant par une valeur ($\pm F$) et dans le moment fléchissant par ($\pm F(x-a)$).

charges concentrées		
EFFORT TRANCHANT T(x)	$-F$	$+F$
MOMENT FLECHISSANT M(x)	$-F(x-a)$	$F(x-a)$

Exemple d'application :

Soit à calculer les efforts internes dans la poutre représentée sur la figure suivante :



a) Calcul des réactions aux appuis

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow \Rightarrow HA = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \Rightarrow RA + RB = F_1 + F_2 = 18 + 10 = 28 \text{ KN}$

$RA + RB = 28 \text{ KN}$

EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HA	F ₁	F ₂	RB
Moment de la force /A En KN.m	RA x 0 = 0	HA x 0 = 0	+F ₁ x 2 = 36	+F ₂ x 3 = 30	-RB x 5 = - 5 RB

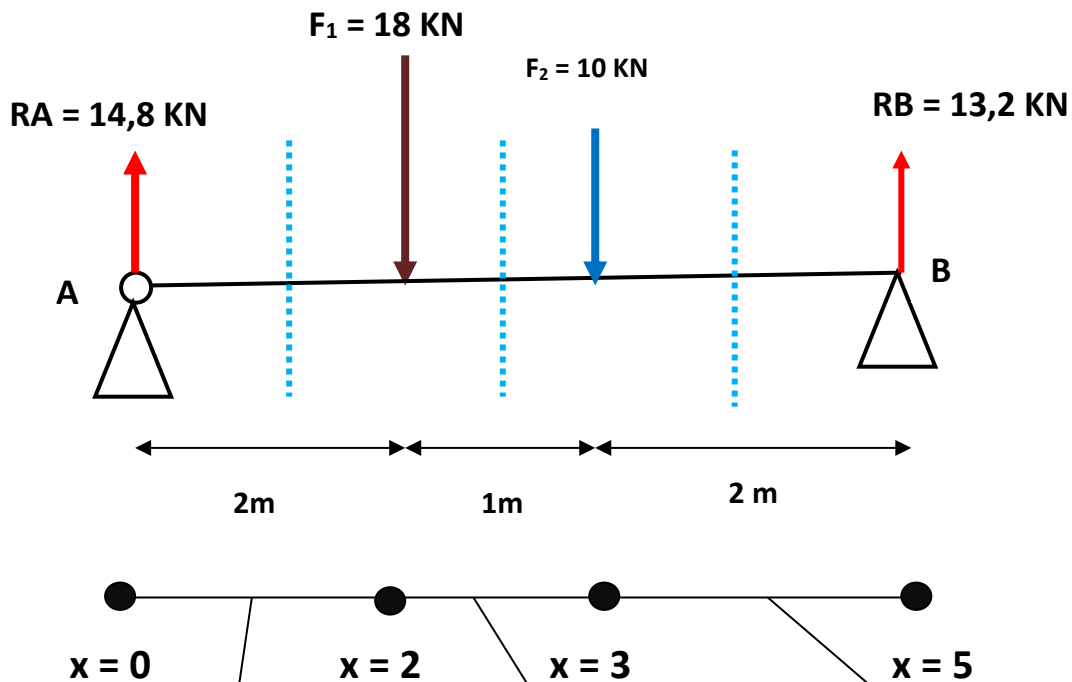
D'où : $0 + 0 + 36 + 30 - 5 RB = 0 \Rightarrow 5 RB = 66 \Rightarrow RB = 66 / 5$

$RB = 13,2 \text{ KN}$

Puisque : $RA + RB = 28 \text{ KN}$, alors : $RA = 28 - RB = 28 - 13,2 = 14,8 \text{ KN}$

$RA = 14,8 \text{ KN}$

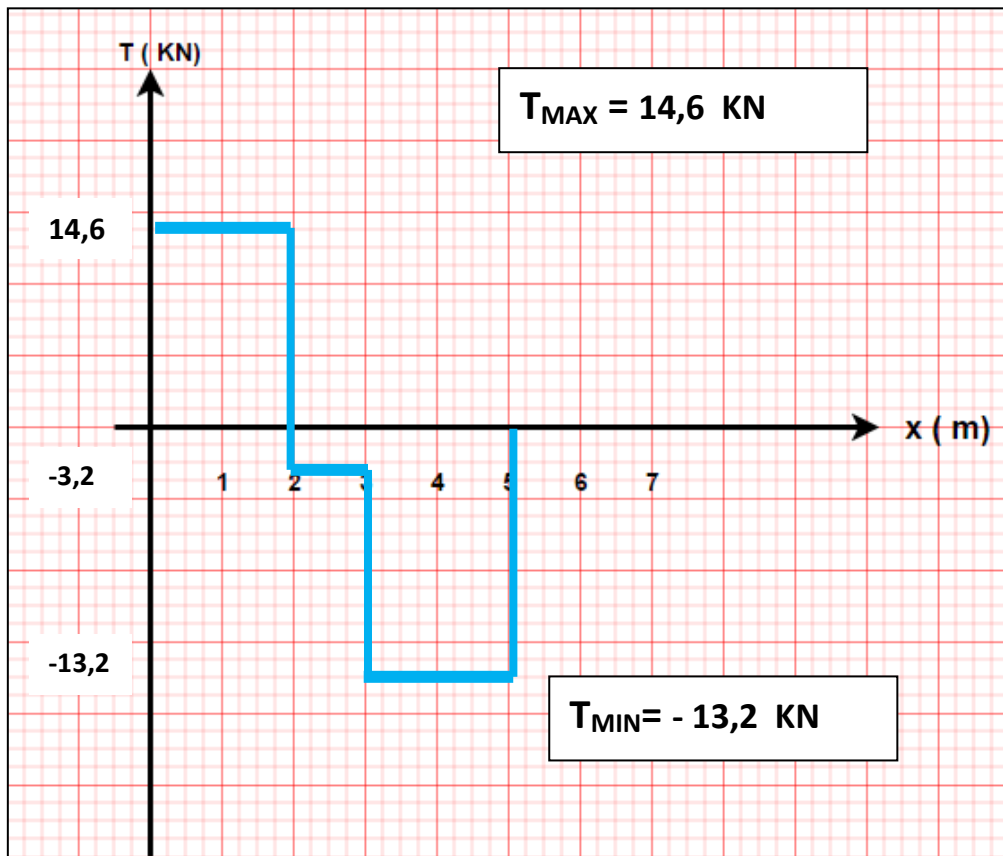
b) Calcul des efforts internes en utilisant le formulaire établi.



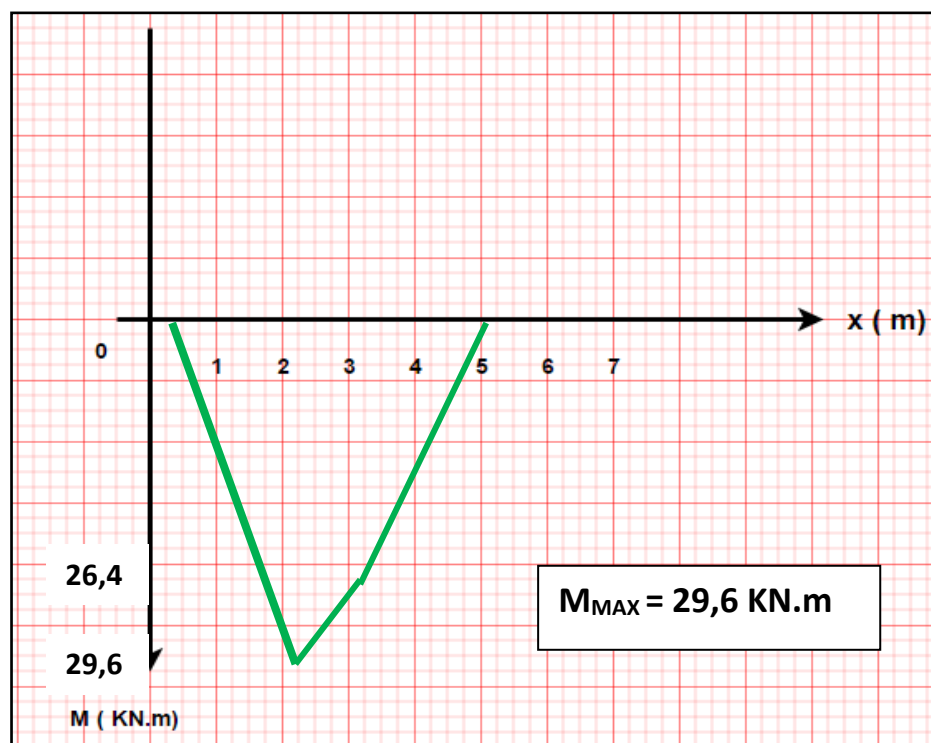
	$[0,2]$	Intervalle $[2,3]$	Intervalle $[3,5]$
Schéma			
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= + R_A$ $= 14,8$	$= + R_A - F_1$ $= + 14,8 - 18$ $= -3,2$	$= + R_A - F_1 - F_2$ $= + 14,8 - 18 - 10$ $= -13,2$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= + R_A (x - 0)$ $= 14,8 x$ $M(0) = 0$ $M(2) = 29,6$	$= R_A (x - 0) - F_1 (x - 2)$ $= 14,8 (x - 0) - 18 (x - 2)$ $= -3,2 x + 36$ $M(2) = 29,6$ $M(3) = 26,4$	$= R_A (x - 0) - F_1 (x - 2) - F_2 (x - 3)$ $= + 14,8 x - 18 (x - 2) - 10 (x - 3)$ $= -13,2 x + 66$ $M(3) = 26,4$ $M(5) = 0$

c) Diagrammes des efforts internes :

i) Effort tranchant



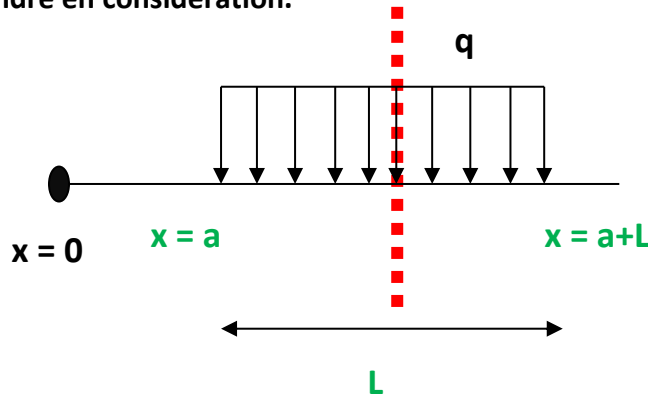
ii) Moment fléchissant :



ii) Cas d'une charge uniformément répartie (Rectangulaire).

Deux cas à traiter :

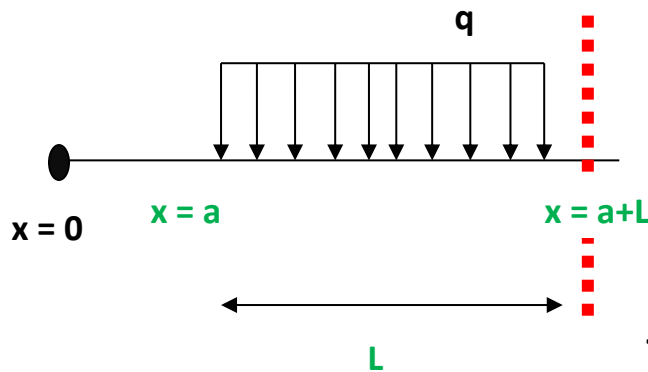
- a) Si on coupe au niveau de la charge répartie, donc une partie de la charge à prendre en considération.



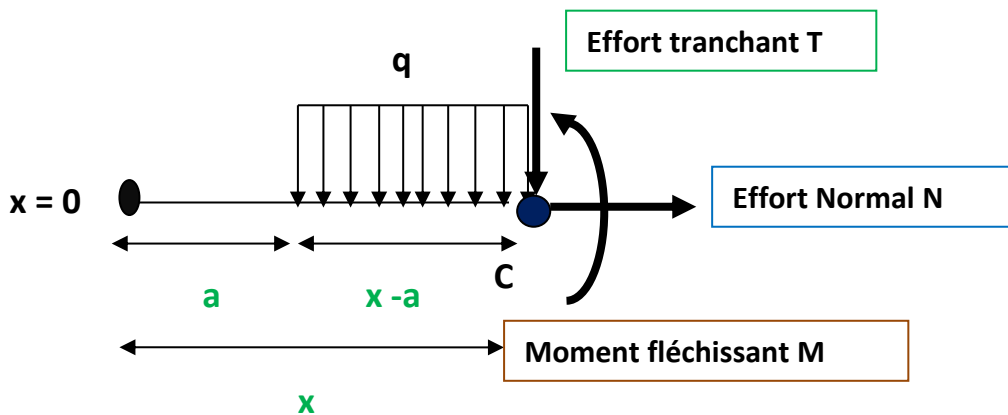
a : Point de commencement de la charge répartie q .

L : la longueur d'application de la charge répartie q .

- b) Si on coupe après la charge répartie q , on prendra en compte la totalité de la charge.

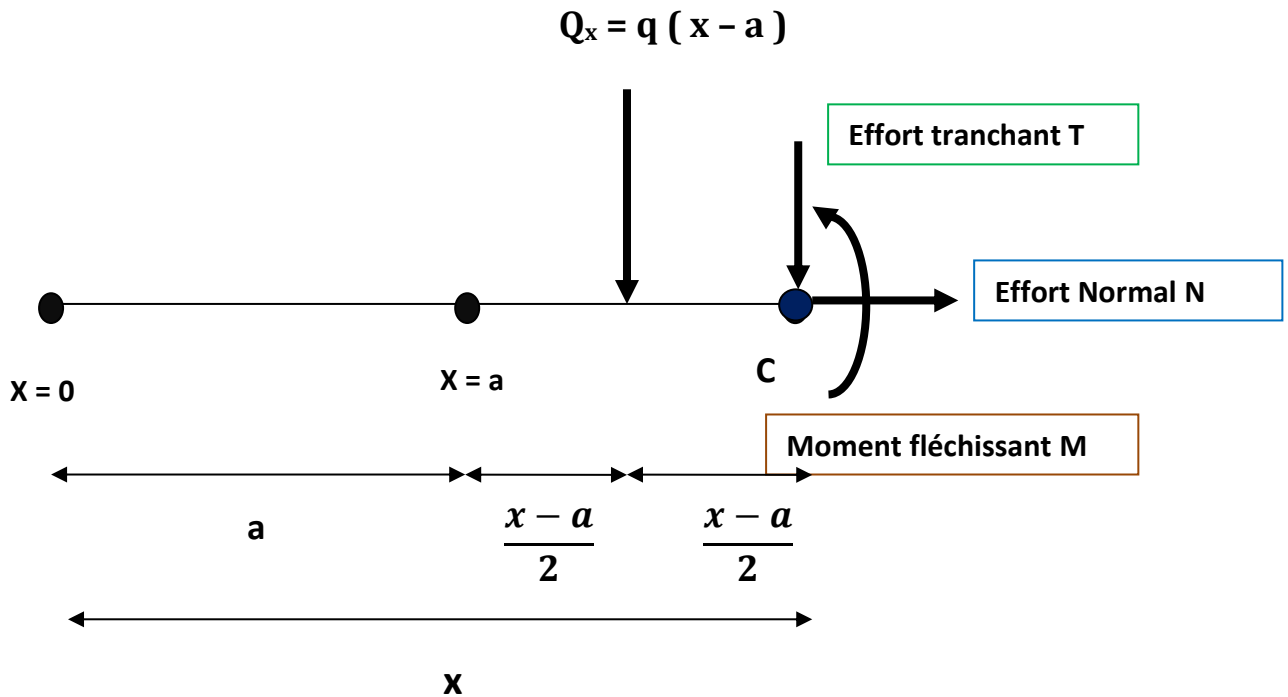


Cas 1 : si x appartient à l'intervalle $[a, a + L]$



On convertit la charge répartie en charge concentrée :

$$Q_x = q (x - a)$$



On écrit les équations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow \implies N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \implies 0 = Q_x + T \implies T = - Q_x$

$T(x) = -Q_x = - q (x - a)$

On écrit la troisième équation par rapport à C :

EQUATION N°3 $\sum MF/C = 0$

Force	Q_x	T	N	
Moment de la force /C En KN.m	$- Q_x (x - a) / 2$ $=$ $-\frac{q(x-a)^2}{2}$	$T \times 0 = 0$	$N \times 0 = 0$	-M

D'où : $-(q(x-a)^2)/2 - M = 0 \implies M(x) = -\frac{q(x-a)^2}{2}$

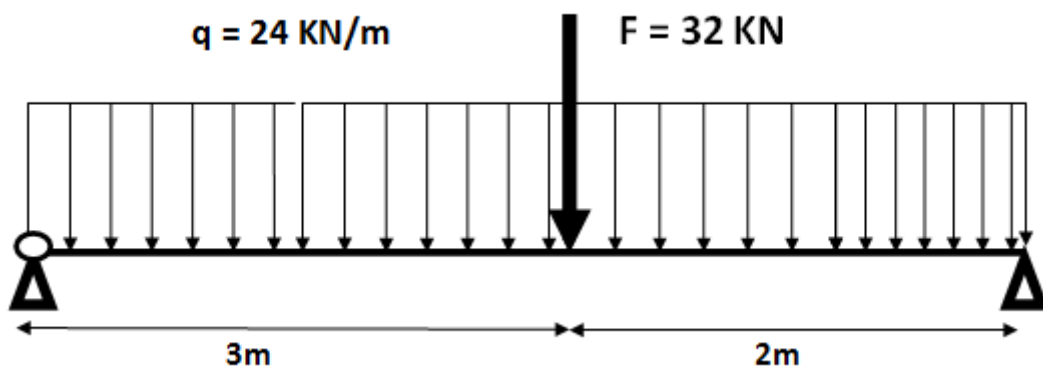
Conclusion :

Si on réalise une coupe dans l'intervalle [a, a + L], la charge q est prise partiellement dans l'équation de T et M avec les valeurs suivantes :

charges uniformément reparties		Cas particulier a = 0
EFFORT TRANCHANT T(x)	<u>Si x appartient à [a, a + L]</u> $- q (x - a)$	<u>Si a = 0</u> $- q (x - 0) = -q x$
MOMENT FLECHISSANT M(x)	<u>Si x appartient à [a, a + L]</u> $-\frac{q(x - a)^2}{2}$	<u>Si a = 0</u> $-\frac{q x^2}{2}$

Exemple d'application :

Reprenons la poutre de l'exemple de la page 12

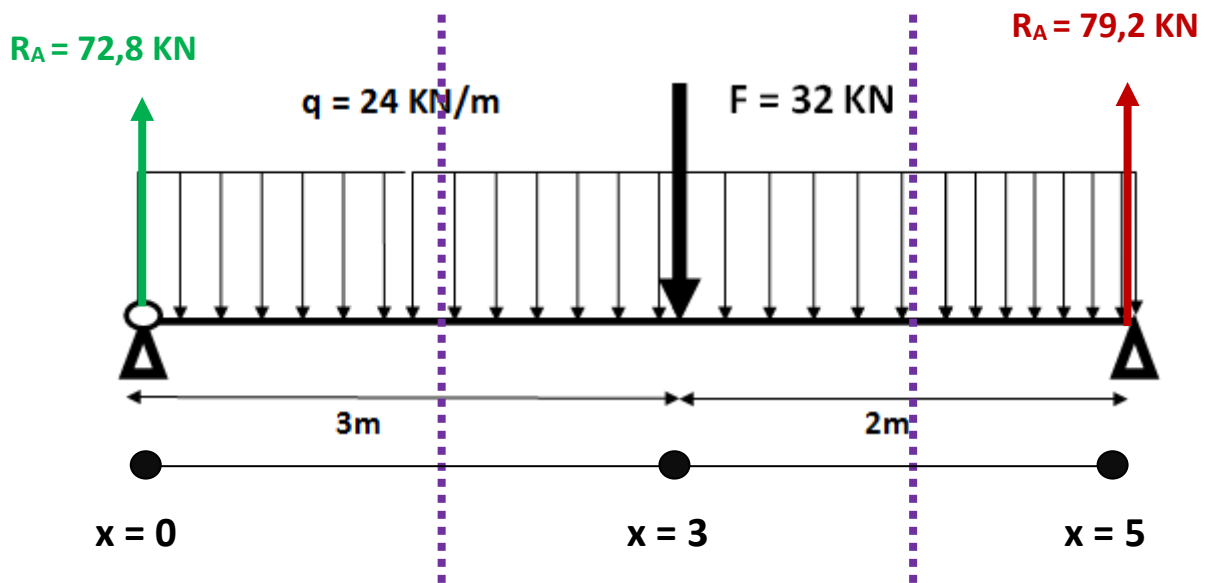


Le calcul des réactions aux appuis a donné :

HA = 0	RA = 72,8 kN	RB = 79,2 kN
---------------	---------------------	---------------------

Calculons maintenant les efforts internes en utilisant le formulaire établi.

On a deux intervalles : $[0 ; 3]$ et $[3,5]$



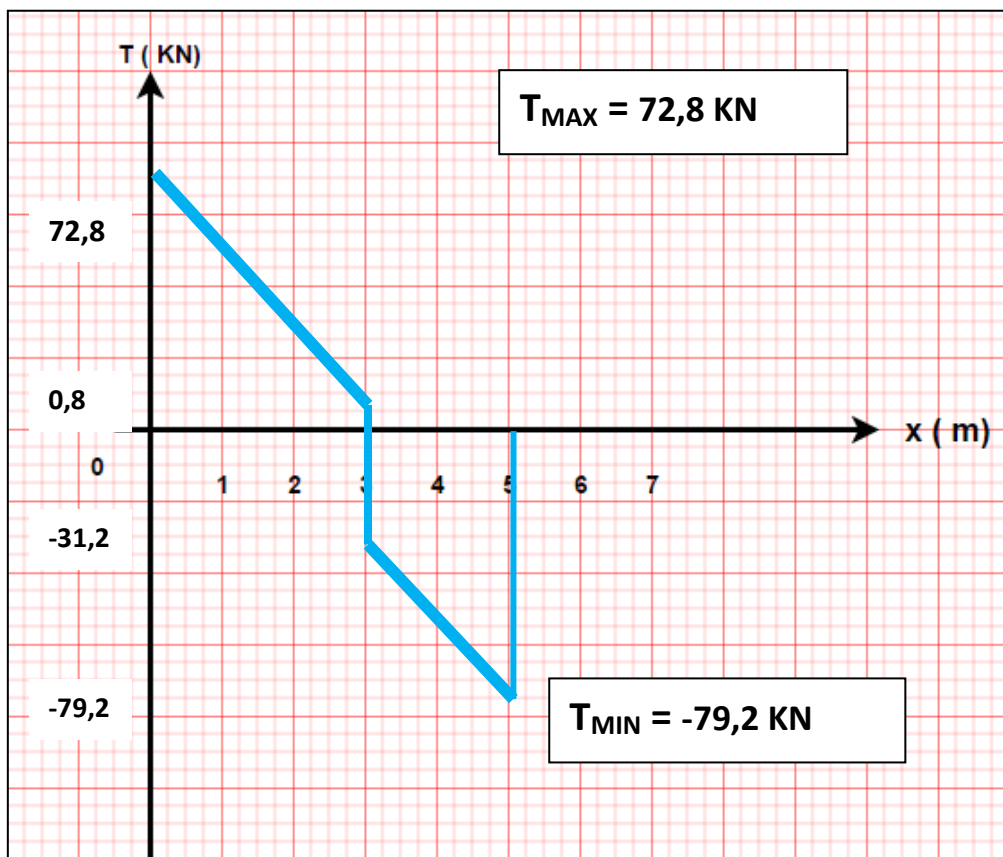
	Intervalle $[0,3]$	Intervalle $[3,5]$
	Dans cet intervalle, on laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q	Mêmes équations de $[0,3]$ pour R_A et q . On laisse la force F à gauche. Elle sera introduite dans cet intervalle.
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= + R_A - q (x - 0)$ $= 72,8 - 24 x$ $T(0) = 72,8$ $T(3) = 0,8$	$= + R_A - q (x - 0) - F$ $= 72,8 - 24 x - 32$ $= 40,8 - 24 x$ $T(3) = -31,2$ $T(5) = -79,2$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= + R_A (x - 0) - q/2 (x - 0)^2$ $= 72,8 x - 12 x^2$ $M(0) = 0$ $M(3) = 110,4$	$= R_A (x - 0) - q/2 (x - 0)^2 - F (x - 3)$ $= 72,8 x - 12 x^2 - 32 (x - 3)$ $= 40,8 x - 12 x^2 + 96$ $M(3) = 110,4$ $M(5) = 0$

On vérifie à chaque fois et pour tous les intervalles que la dérivée de la fonction $M(x)$ n'est que la fonction $T(x)$.

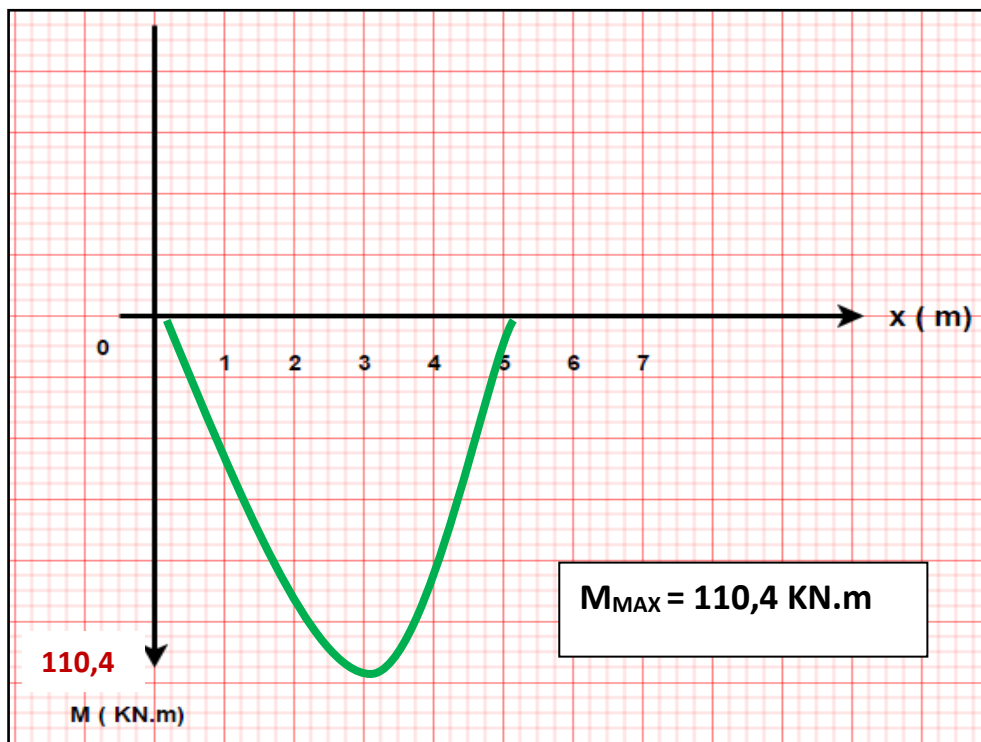
On vérifie aussi que la fonction $M(x)$ est continue.

Diagrammes des efforts internes :

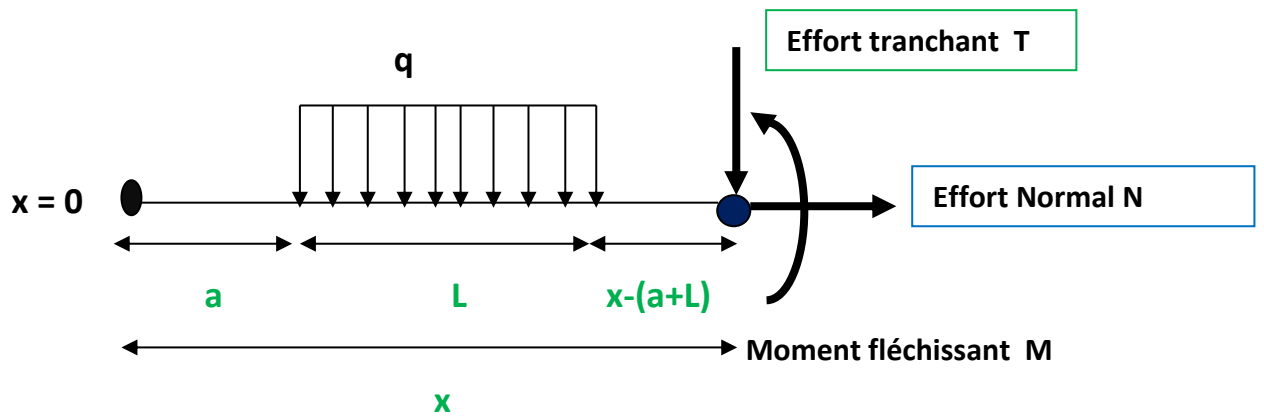
❖ Effort tranchant



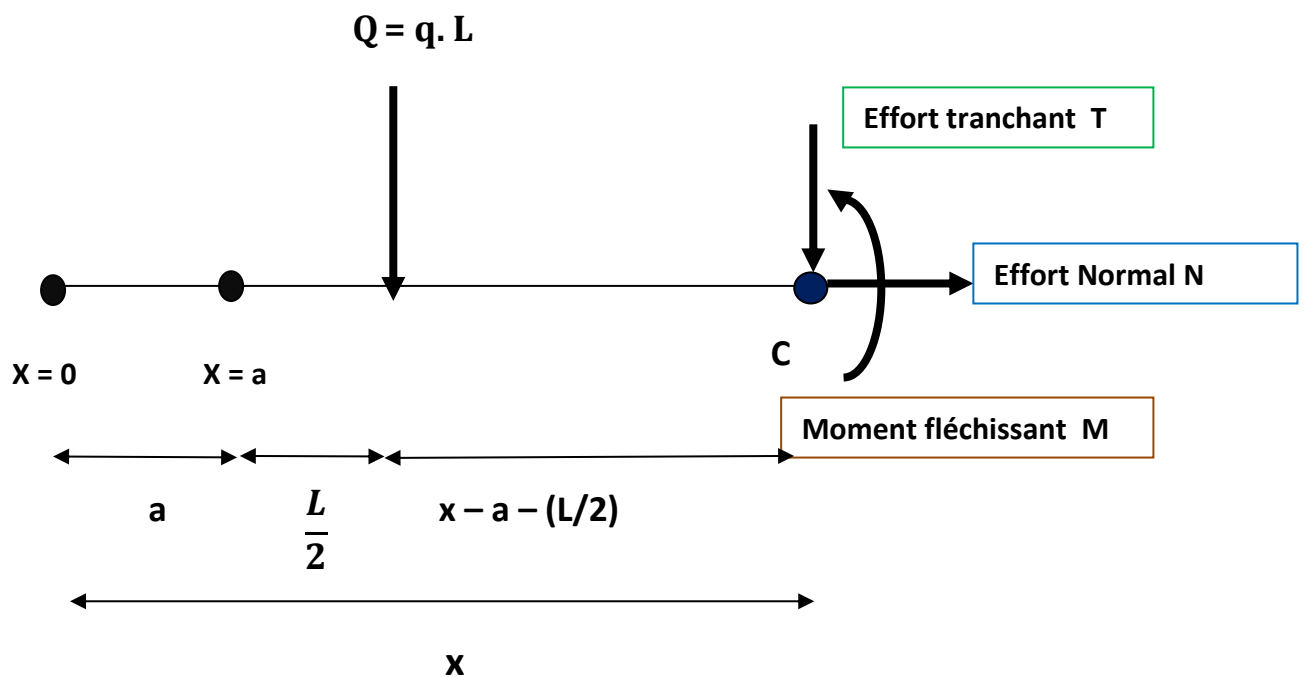
❖ Moment fléchissant :



Cas 2 : si $x \geq a + L$; on laisse à gauche la totalité de la charge



On convertit la charge répartie en charge concentrée : $Q = q \cdot L$



On écrit les équations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ \Rightarrow $N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ \Rightarrow $0 = Q + T$ \Rightarrow $T = -Q$

$T(x) = -q \cdot L$

On écrit la troisième équation par rapport à C :

$$\text{EQUATION N°3} \quad \sum MF/C = 0$$

On a :

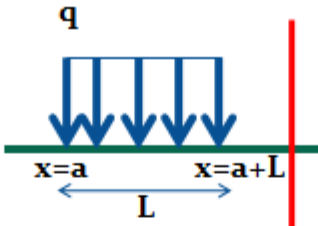
Force	Q	T	N	
Moment de la force /C En KN.m	$- Q \cdot (x - a - (L/2))$ $= - q \cdot L (x - a - (L/2))$	$T \times 0$ $= 0$	$N \times 0$ $= 0$	-M

D'où : $- q \cdot L (x - a - (L/2)) - M = 0 \implies$

$$M(x) = - q \cdot L (x - a - \frac{L}{2})$$

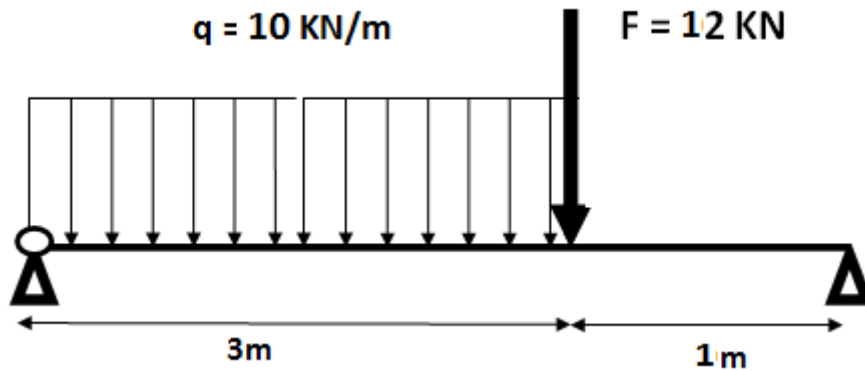
Conclusion :

Si on réalise une coupe après la charge q , cette dernière est prise totalement dans l'équation de T et M avec les valeurs suivantes :

charges uniformément réparties		Cas particulier $a = 0$ q commence à l'extrémité gauche de la poutre
EFFORT TRANCHANT T(x)	<u>Si $x \geq [a + L]$</u> $- q \cdot L$	<u>Si $a = 0$</u> $- q \cdot L$
MOMENT FLECHISSANT M(x)	<u>Si $x \geq [a + L]$</u> $- q \cdot L (x - a - \frac{L}{2})$	<u>Si $a = 0$</u> $- q \cdot L (x - \frac{L}{2})$

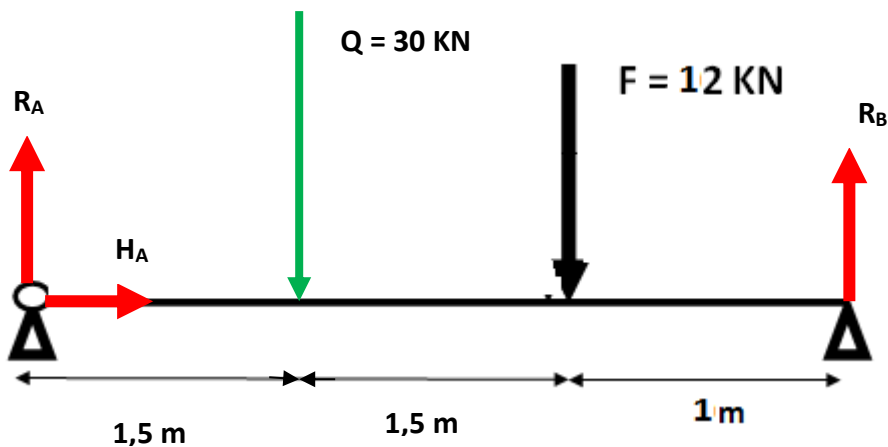
Exemple d'application :

Soit à calculer les efforts internes dans la poutre chargée suivante :



Calcul des réactions aux appuis :

- On a : $Q = q \times L = 10 \times 3 = 30 \text{ KN}$
- Point d'application : $a = b = L/2 = 3/2 = 1,5 \text{ m}$



Equations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ HA = 0

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ RA + RB = Q + F = 30 + 12 = 42 KN

RA + RB = 42 KN

Pour calculer RA et RB , on aura besoin d'une deuxième équation.

On écrit alors la 3^{ème} équation de la statique par rapport à A.

La somme des moments par rapport à A doit être égale à 0. Sinon, la poutre pivotera par rapport au point A. (Même principe par rapport à B)

→ EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HA	Q	F	RB
Moment de la force / A En KN.m	$RA \times 0 = 0$	$HA \times 0 = 0$	$+Q \times 1,5 = 45$	$+F \times 3 = 36$	$-RB \times 4 = -4 RB$

D'où : $0 + 0 + 45 + 36 - 4 RB = 0 \longrightarrow 4 RB = 81 \longrightarrow RB = 81/4$

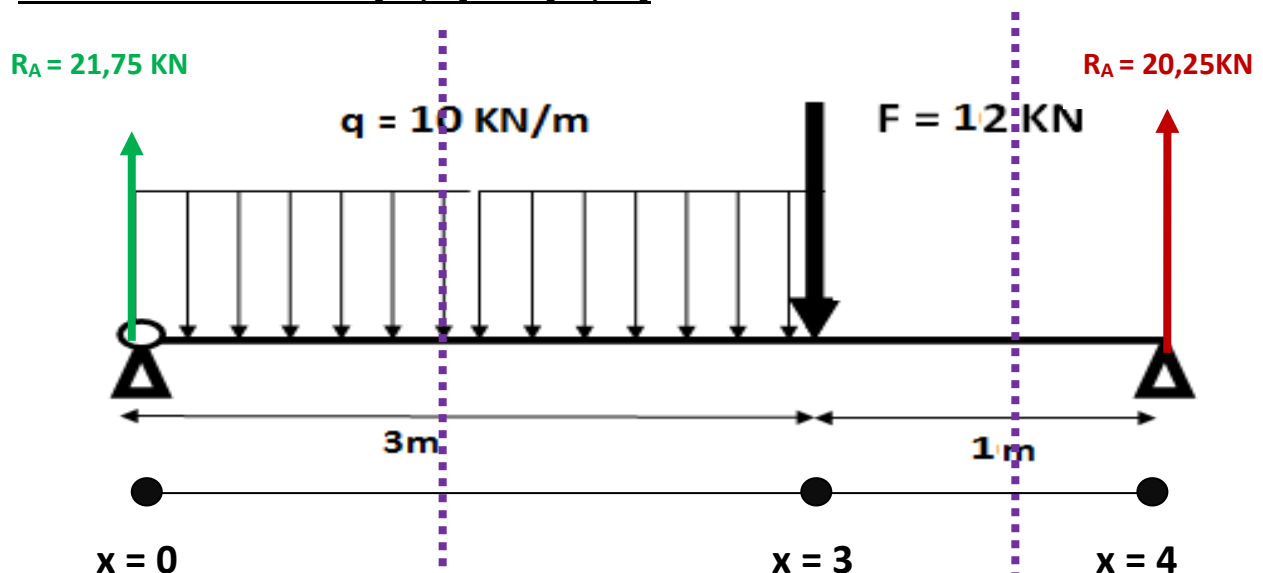
$\Rightarrow RB = 20,25 \text{ KN}$

Puisque : $R_A + R_B = 42 \text{ KN}$, alors : $R_A = 42 - R_B = 42 - 20,25 = 21,75 \text{ KN}$

$\Rightarrow RA = 21,75 \text{ KN}$

Calculons maintenant les efforts internes en utilisant le formulaire établi.

On a deux intervalles : [0 ; 3] et [3 ; 4]



Les bornes des intervalles se situent :

- Aux appuis de la poutre.
- A chaque point d'application d'une charge concentrée.
- Au début ou à la fin d'une charge répartie

	Intervalle [0,3]	Intervalle [3,4]
	Dans cet intervalle, on laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q	On laisse les forces F et V_A à gauche ainsi que la totalité de la charge q .
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= + R_A - q (x - 0)$ $= 21,75 - 10 x$ $T(0) = 21,75$ $T(3) = -8,25$	$= + R_A - q \cdot L - F$ $= 21,75 - 10 \cdot 3 - 12$ $= -20,25$ $T(3) = -20,25$ $T(4) = -20,25$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= + R_A (x - 0) - q/2 (x - 0)^2$ $= 21,75 x - 5 x^2$ $M(0) = 0$ $M(3) = 20,25$	$= R_A (x - 0) - q \cdot L (x - 0 - L/2) - F (x - 3)$ $= 21,75 x - 30 (x - 1,5) - 12 (x - 3)$ $= -20,25 x + 81$ $M(3) = 20,25$ $M(4) = 0$

Dans l'intervalle [0,3], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

Or, $T(x)$ est la dérivée de la fonction $M(x)$, donc la dérivée de $M(x)$ s'annule. C'est-à-dire qu'elle admet une valeur maximale dans cet intervalle.

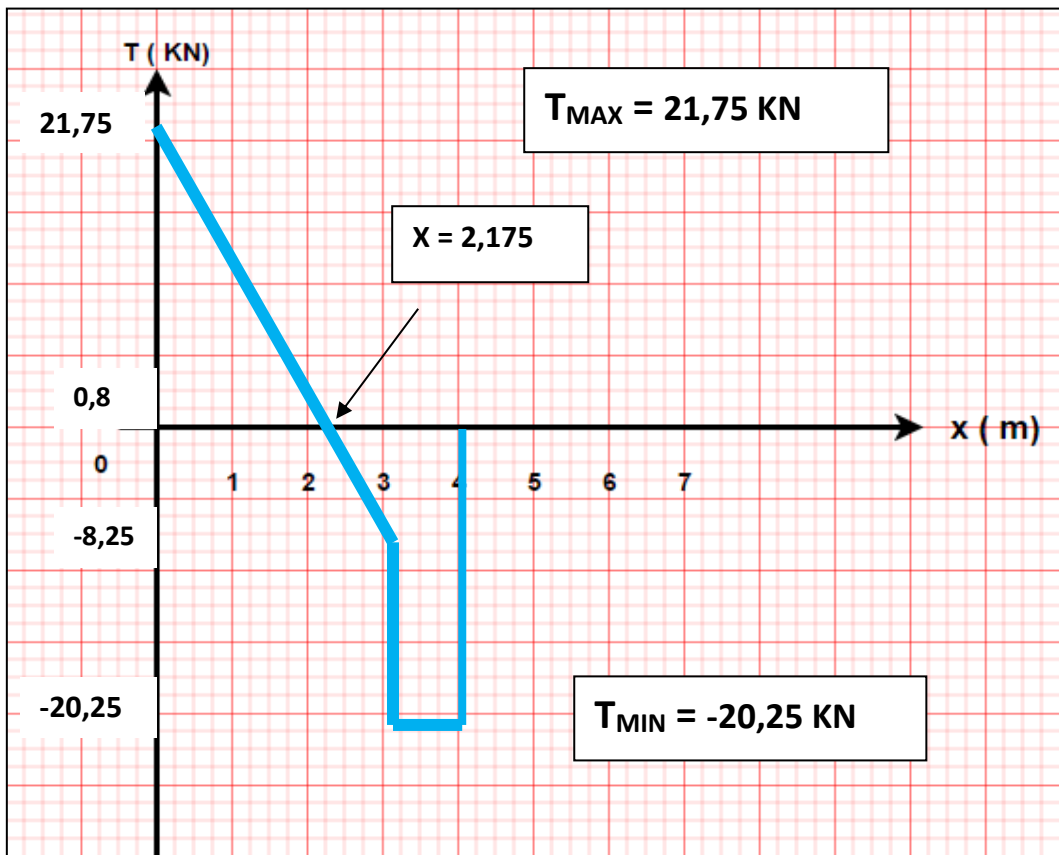
Dans [0,3] $\frac{dM}{dx} = T(x) = 0 \longrightarrow 21,75 - 10 x = 0$
 $x = 2,175 \text{ m}$

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle [0,3] au point d'abscisse $x = 2,175 \text{ m}$

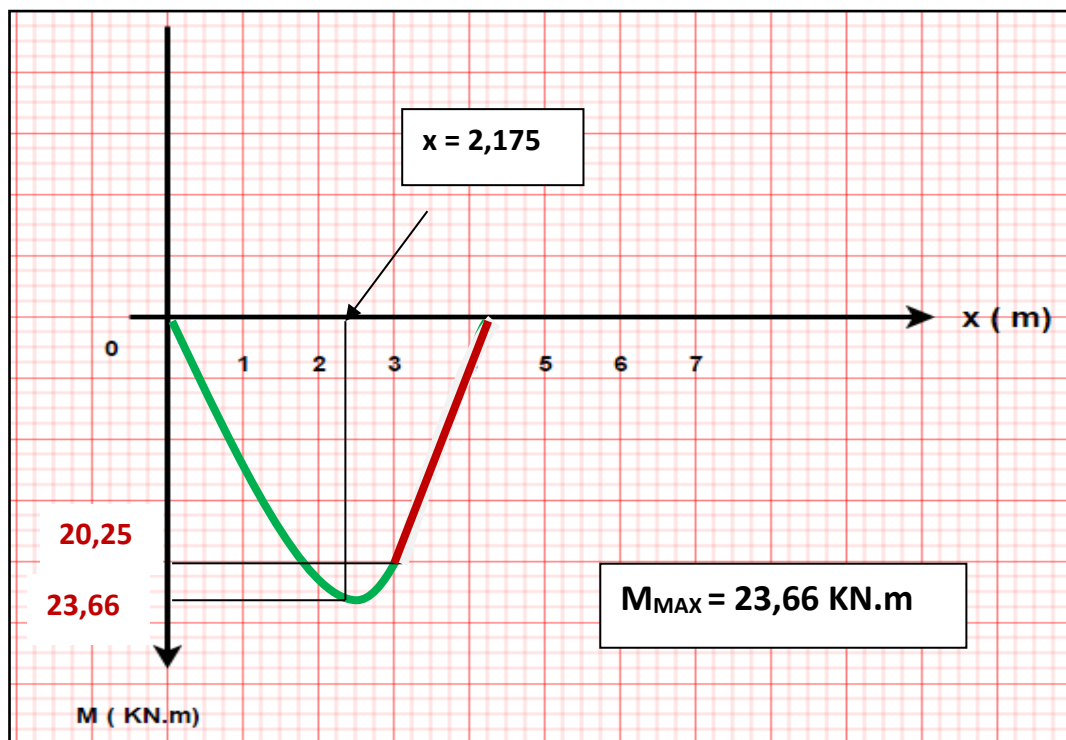
$$M(2,175) = 21,75 \cdot 2,175 - 5 (2,175)^2 = 23,66 \text{ KN.m}$$

Diagrammes des efforts internes :

❖ Effort tranchant



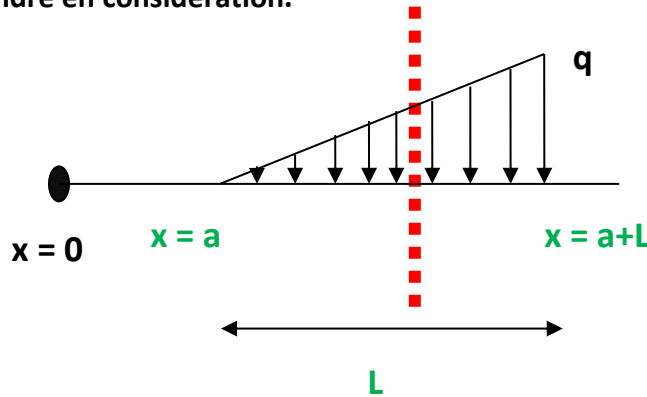
❖ Moment fléchissant :



iii) Cas d'une charge répartie non uniforme (Triangulaire) croissante.

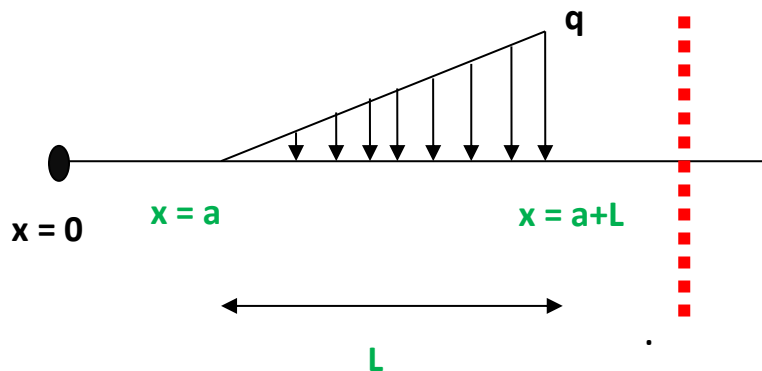
Deux cas à traiter:

- a) Si on coupe au milieu de la charge répartie, donc une partie de la charge à prendre en considération.



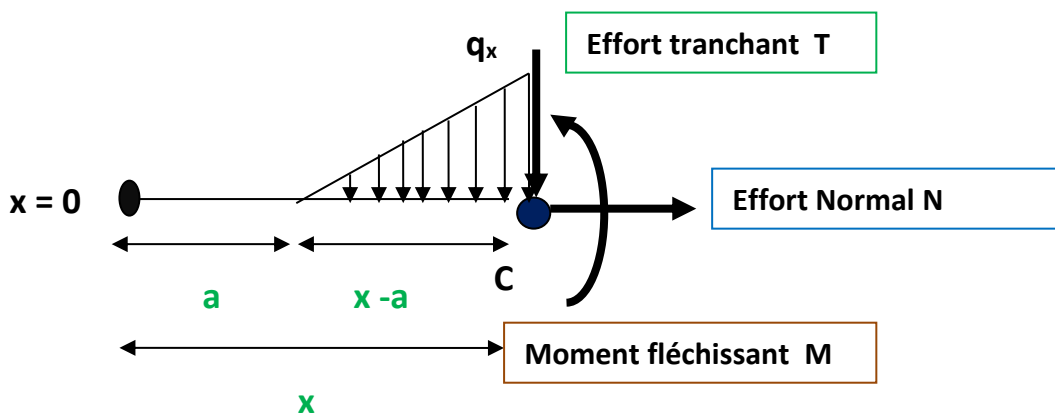
a : Point de commencement de la charge répartie q .
L : la longueur d'application de la charge répartie q.

- b) Si on coupe après la charge répartie q, on prendra en compte la totalité de la charge..



Cas 1 : si x appartient à l'intervalle [a, a + L]

On obtient le système suivant :



Calcul de la charge qx

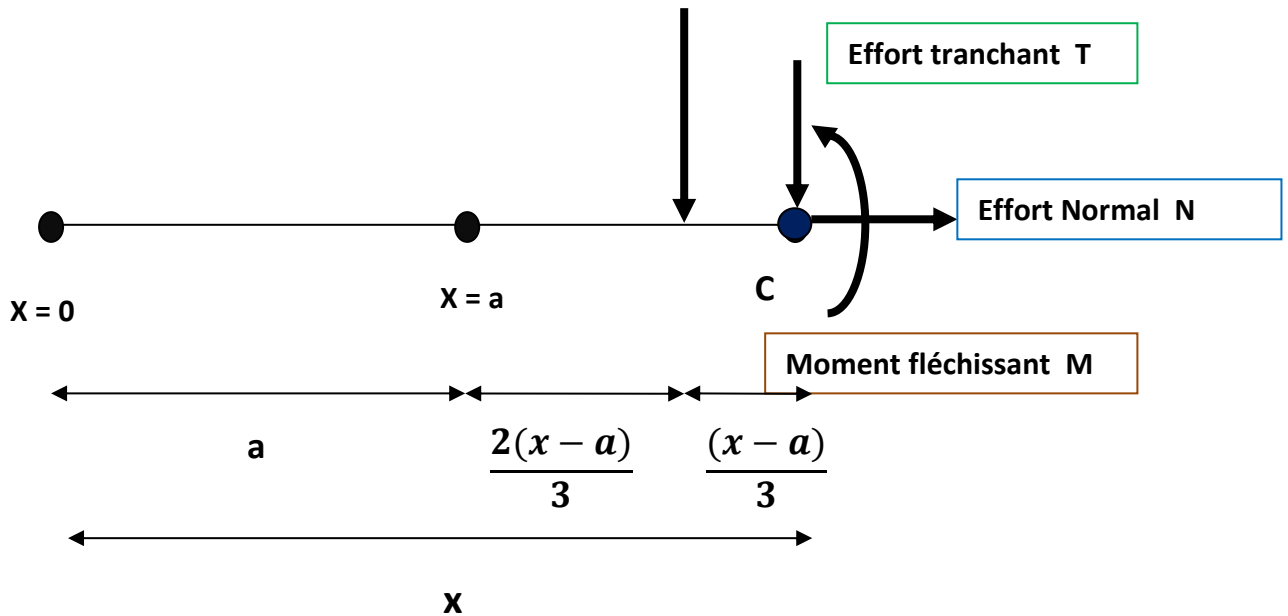
On a : $\tan(\text{Angle que fait } q \text{ avec l'horizontal}) = q/L = q_x / (x-a)$

$$q_x = (q (x-a)) / L$$

On convertit la charge répartie q_x en charge concentrée :

$$Q_x = (q_x (x - a)) / 2 = (q (x - a)^2) / 2L$$

$$Q_x = (q (x - a)^2) / 2L$$



On écrit les équations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ \Rightarrow $N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ \Rightarrow $0 = Q_x + T$ \Rightarrow $T = -Q_x$

$$T(x) = -\frac{q(x-a)^2}{2.L}$$

On écrit la troisième équation par rapport à C :

EQUATION N°3 $\sum MF/C = 0$

Force	Q_x	T	N	
Moment de la force /C	$= -Q_x (x - a) / 3$ $= -\frac{q(x-a)^2}{2.L} (x-a) / 3$ $= -\frac{q(x-a)^3}{6L}$	$T \times 0$ $= 0$	$N \times 0$ $= 0$	-M

D'où : $-(q(x-a)^3) / 6L - M = 0 \implies$

$$M(x) = - \frac{q(x-a)^3}{6L}$$

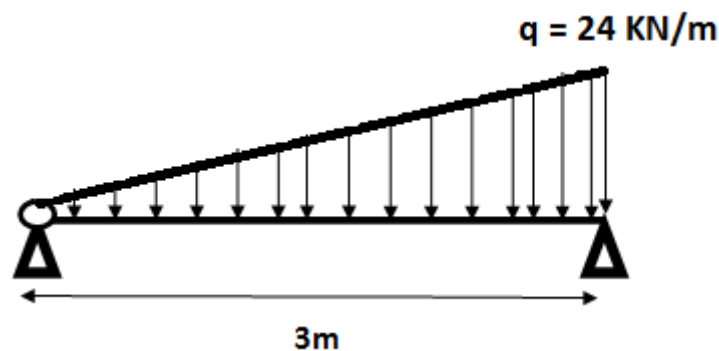
Conclusion :

Si on réalise une coupe dans l'intervalle [a + L] , la charge q est prise partiellement dans l'équation de T et M avec les valeurs suivantes :

<p>Charge triangulaire croissante</p>		<p>Cas particulier a = 0</p>
<p>EFFORT TRANCHANT T(x)</p>	<p><u>Si x appartient à [a, a + L]</u></p> $- \frac{q (x - a)^2}{2.L}$	<p><u>Si a = 0</u></p> $- \frac{q x^2}{2.L}$
<p>MOMENT FLECHISSANT M(x)</p>	<p><u>Si x appartient à [a, a + L]</u></p> $- \frac{q (x - a)^3}{6.L}$	<p><u>Si a = 0</u></p> $- \frac{q x^3}{6.L}$

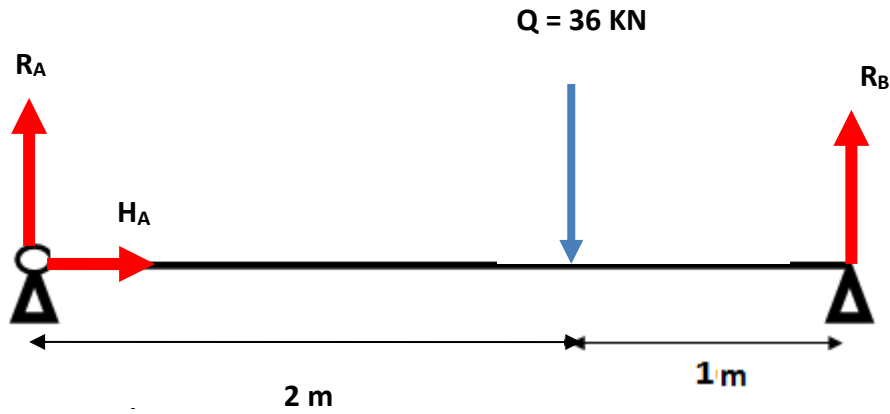
Exemple d'application :

Soit à établir les équations des efforts internes dans la poutre isostatique soumise à une charge triangulaire croissante (Voir schéma mécanique suivant):



Calcul des réactions aux appuis de la poutre :

- On a : $Q = (q \times L)/2 = (24 \times 3)/2 = 36 \text{ KN}$
- Point d'application : $a = 2L/3 = 2\text{ m}$ et $b = L/3 = 1 \text{ m}$



Equations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ $\Rightarrow HA = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ $\Rightarrow RA + RB = Q = 36 \text{ KN}$

$RA + RB = 36 \text{ KN}$

EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HA	Q	RB
Moment de la force /A En KN.m	$RA \times 0 = 0$	$HA \times 0 = 0$	$+Q \times 2 = 72$	$-RB \times 3 = -3 RB$

D'où : $0 + 0 + 72 - 3 RB = 0 \Rightarrow 3 RB = 72 \Rightarrow RB = 72/3$

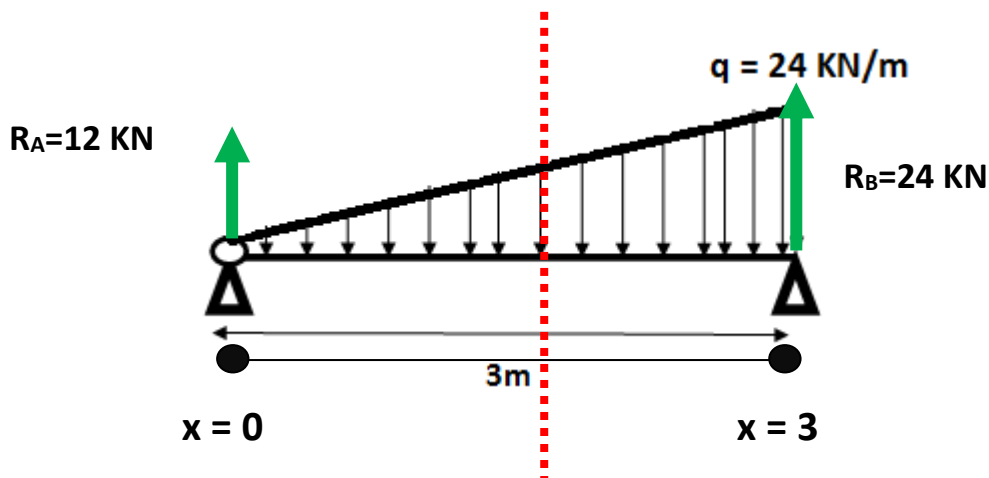
$\Rightarrow RB = 24 \text{ KN}$

Puisque : $RA + RB = 36 \text{ KN}$, alors : $RA = 36 - RB = 36 - 24 = 12 \text{ KN}$

$\Rightarrow RA = 12 \text{ KN}$

Calculons maintenant les efforts internes dans la poutre en utilisant le formulaire établi.

On a un seul intervalle : [0 ; 3]



	[0,3]
	Dans cet intervalle, on laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= + R_A - (q (x - 0)^2) / 2L = 12 - 4 x^2$ $T(0) = 12$ $T(3) = -24$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= + R_A (x - 0) - (q(x-0)^3) / 6L = 12 x - 1,333 x^3$ $M(0) = 0$ $M(3) = 0$

Dans l'intervalle [0,3], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

Or, $T(x)$ est la dérivée de la fonction $M(x)$, donc la dérivée de $M(x)$ s'annule. C'est-à-dire que M admet une valeur maximale dans cet intervalle.

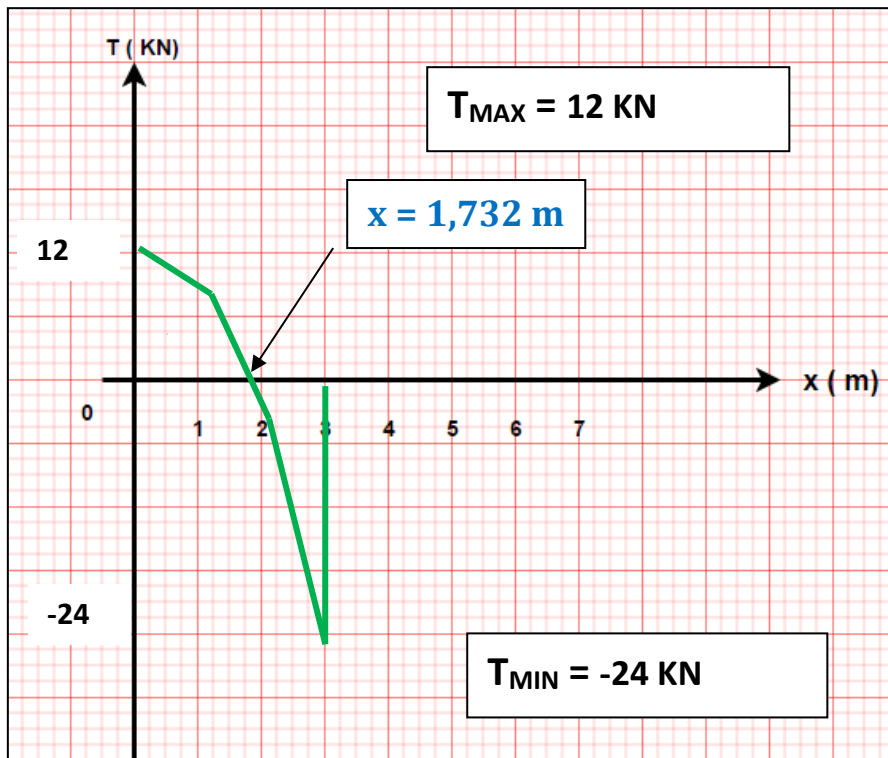
Dans [0,3] $\frac{dM}{dx} = T(x) = 0 \longrightarrow 12 - 4 x^2 = 0$
 $x = 1,732 \text{ m}$

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle $[0,3]$ au point d'abscisse $x = 1,732$ m

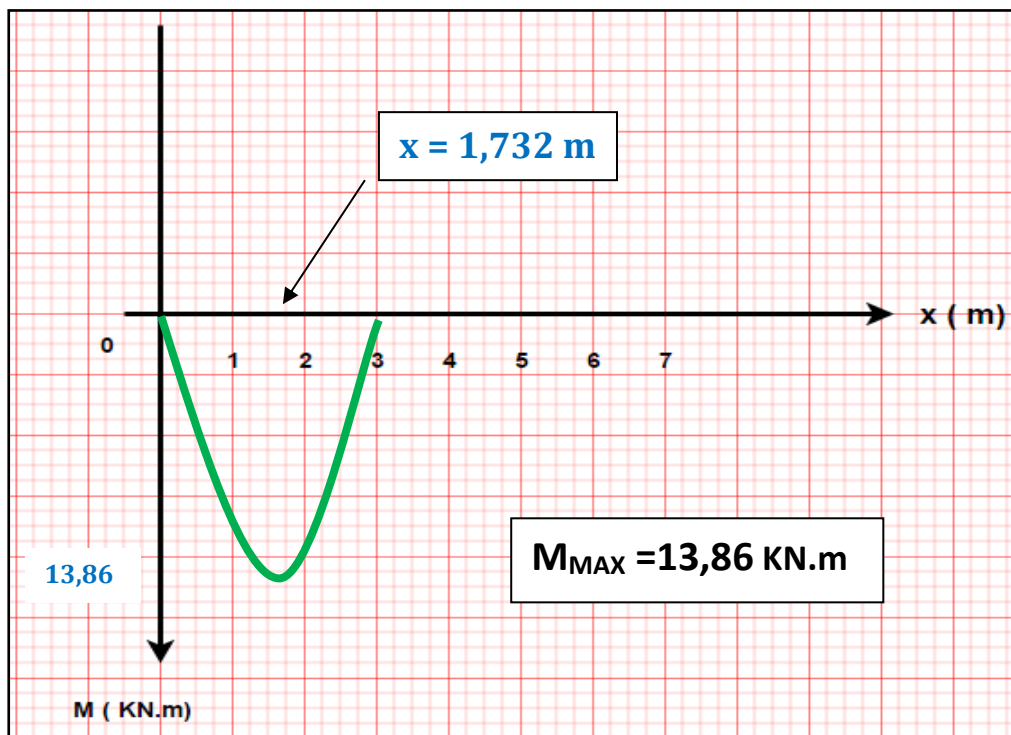
$$M(1,732) = = 12 * 1,732 - 1,333 (1,732^3) = 13,86 \text{ KN.m}$$

Diagrammes des efforts internes :

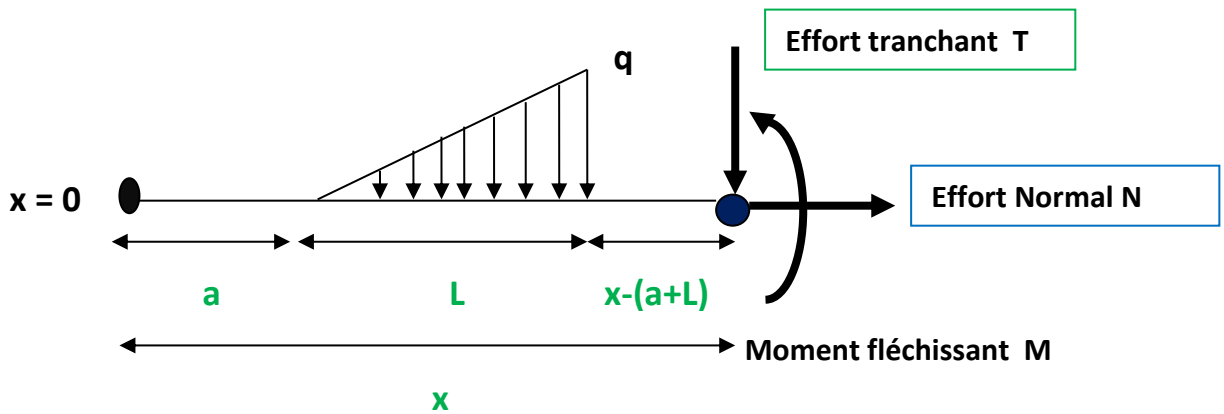
❖ Effort tranchant



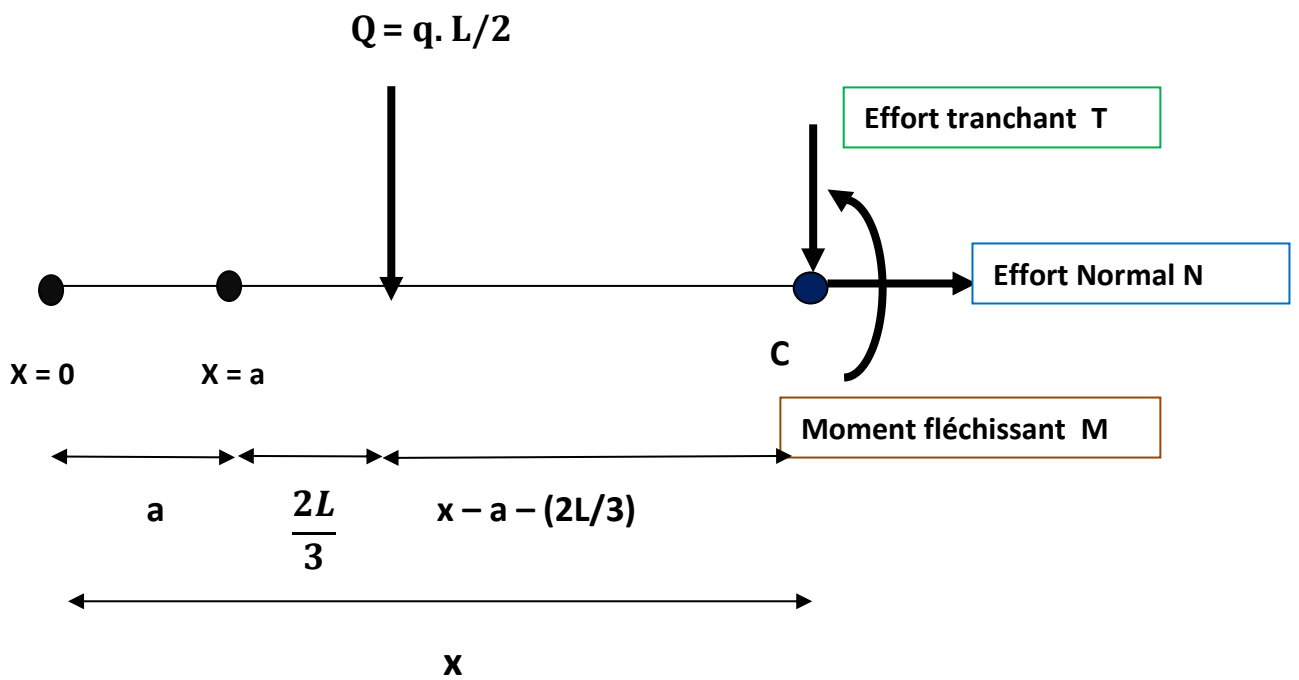
❖ Moment fléchissant :



Cas 2 : si $x \geq a + L$; on laisse la totalité de la charge à gauche



On convertit la charge répartie en charge concentrée : $Q = (q \cdot L)/2$



On écrit les équations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ \Rightarrow $N = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ \Rightarrow $0 = Q + T$ \Rightarrow $T = -Q$

$T(x) = -q \cdot L/2$

On écrit la troisième équation par rapport à C :

$$\text{EQUATION N°3} \quad \sum MF/C = 0$$

On a :

Force	Q	T	N	
Moment de la force /C En KN.m	$- Q \cdot (x - a - (2L/3))$ $= (-q \cdot L/2) (x - a - (2L/3))$	$T \times 0$ $= 0$	$N \times 0$ $= 0$	-M

D'où : $(-q \cdot L/2) (x - a - (2L/3)) - M = 0$ \Rightarrow $M(x) = (-q \cdot L/2) (x - a - (2L/3))$

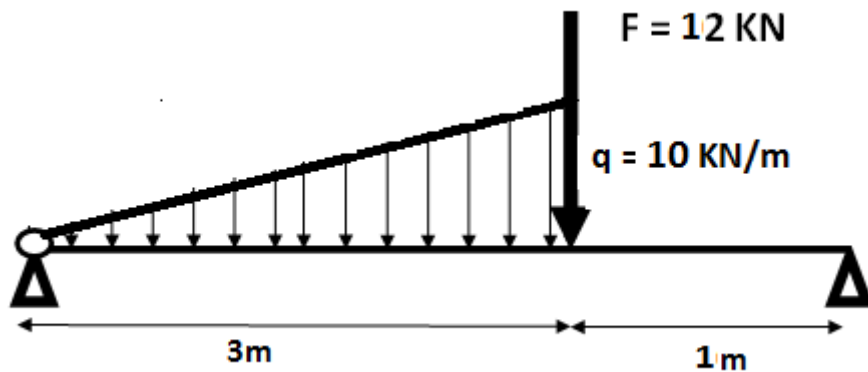
Conclusion :

Si on réalise une coupe après la charge q , cette dernière est prise totalement dans l'équation de T et M avec les valeurs suivantes :

charges uniformément réparties		Cas particulier $a = 0$ q commence à l'extrémité gauche de la poutre
EFFORT TRANCHANT T(x)	<u>Si $x \geq [a + L]$</u> $- q \cdot \frac{L}{2}$	<u>Si $a = 0$</u> $- q \cdot \frac{L}{2}$
MOMENT FLECHISSANT M(x)	<u>Si $x \geq [a + L]$</u> $- q \frac{L}{2} (x - a - \frac{2L}{3})$	<u>Si $a = 0$</u> $- q \frac{L}{2} (x - \frac{2L}{3})$

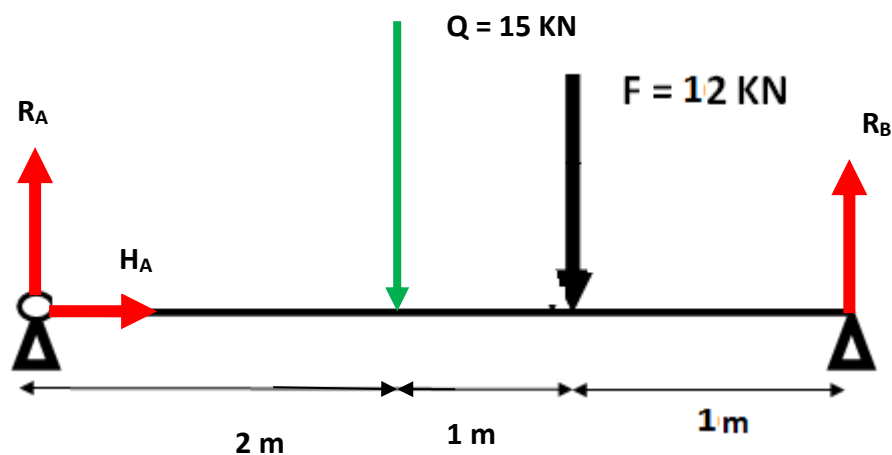
Exemple d'application :

Soit à calculer les efforts internes dans la poutre chargée suivante :



Calcul des réactions aux appuis :

- On a : $Q = (q \times L)/2 = (10 \times 3)/2 = 15 \text{ KN}$
- Point d'application : $a = 2L/3 = 2\text{ m}$ et $b = L/3 = 1 \text{ m}$



Equations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ $\Rightarrow HA = 0$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ $\Rightarrow RA + RB = Q + F = 15 + 12 = 27 \text{ KN}$

$RA + RB = 27 \text{ KN}$

EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HA	Q	F	RB
Moment de la force /A En KN.m	RA x 0 = 0	HA x 0 = 0	+15x 2 = 30	+12 x 3 = 36	-RB x 4 = - 4 RB

D'où : $0 + 0 + 30 + 36 - 4 RB = 0 \longrightarrow 4 RB = 66 \longrightarrow RB = 66 / 4$

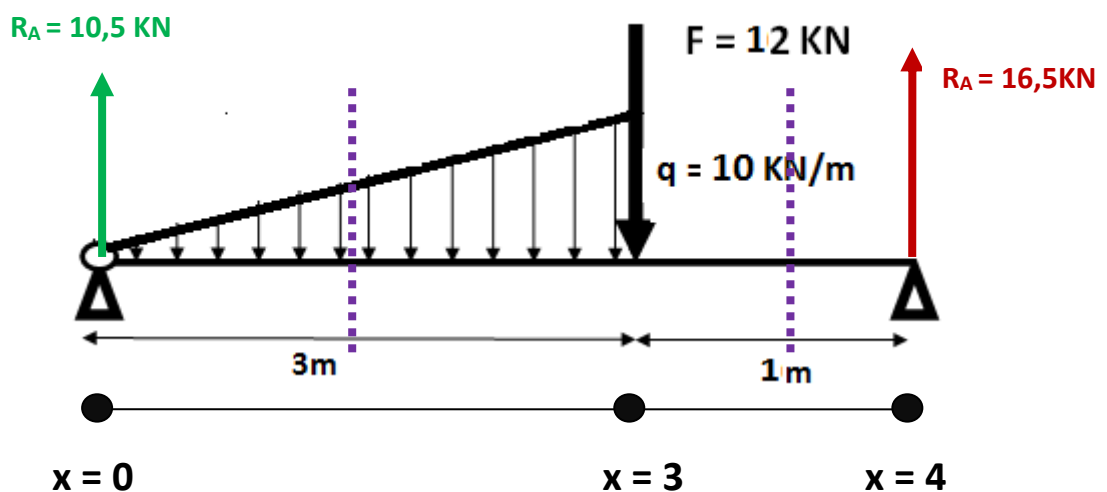
$\Rightarrow RB = 16,5 \text{ KN}$

Puisque : $R_A + R_B = 27 \text{ KN}$, alors : $R_A = 27 - R_B = 27 - 16,5 = 10,5 \text{ KN}$

$\Rightarrow RA = 10,5 \text{ KN}$

Calculons maintenant les efforts internes en utilisant le formulaire établi.

On a deux intervalles : [0 ; 3] et [3 ; 4]



	[0,3]	Intervalle [3,4]
	Dans cet intervalle, on laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q	On laisse les forces F et R_A à gauche ainsi que la totalité de la charge q .
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= + R_A - (q (x - a)^2) / 2L$ $= 10,5 - 1,667 x^2$ $T(0) = 10,5$ $T(3) = -4,5$	$= + R_A - (q \cdot L/2) - F$ $= 10,5 - (10 \times 3/2) - 12$ $= -16,5$ $T(3) = -16,5$ $T(4) = -16,5$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= + R_A (x - 0) - (q(x-a)^3) / 6L$ $= 10,5 x - 0,556 x^3$ $M(0) = 0$ $M(3) = 16,5$	$= R_A (x - 0) - (q \cdot L/2)(x - 0 - (2L/3)) - F(x - 3)$ $= 10,5 x - 15 (x - 2) - 12 (x - 3)$ $= -16,5 x + 66$ $M(3) = 16,5$ $M(4) = 0$

Dans l'intervalle [0,3], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

Or, $T(x)$ est la dérivée de la fonction $M(x)$, donc la dérivée de $M(x)$ s'annule. C'est-à-dire qu'elle admet une valeur maximale dans cet intervalle.

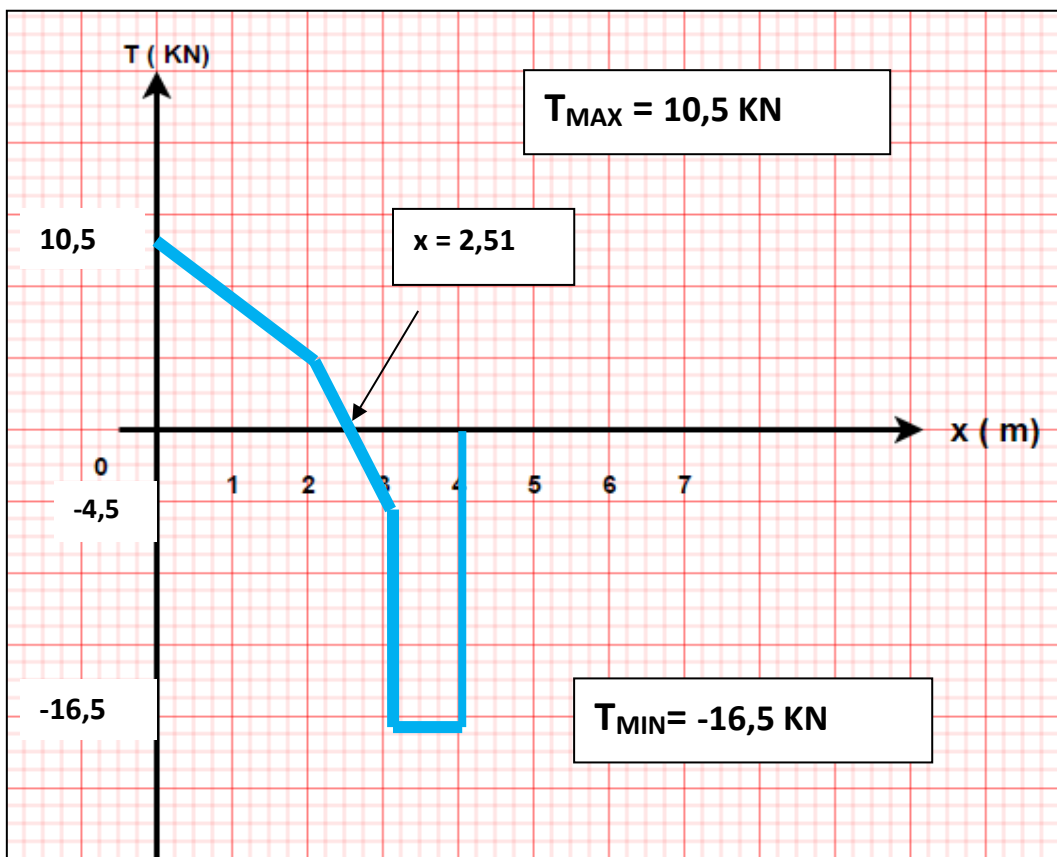
Dans [0,3] $\frac{dM}{dx} = T(x) = 0$ \longrightarrow $10,5 - 1,667 x^2 = 0$
 $x = 2,51 \text{ m}$

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle [0,3] au point d'abscisse $x = 2,51 \text{ m}$

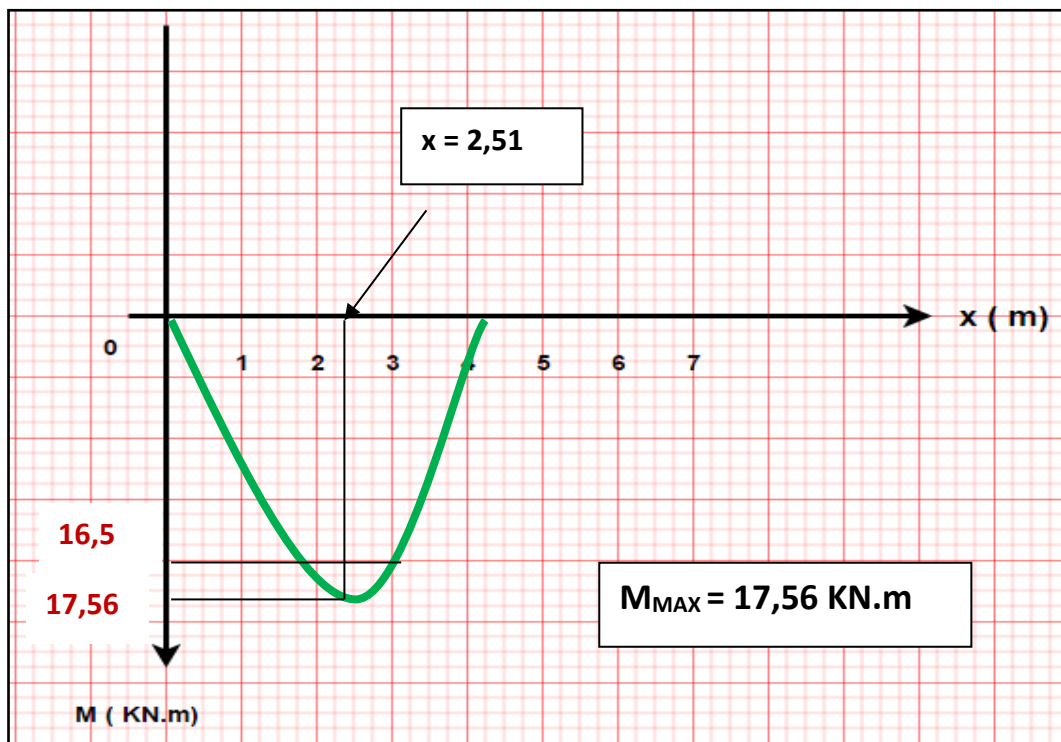
$M(2,51) = 10,5 * 2,51 - 0,556 (2,51)^3 = 17,56 \text{ KN.m}$

Diagrammes des efforts internes :

❖ Effort tranchant



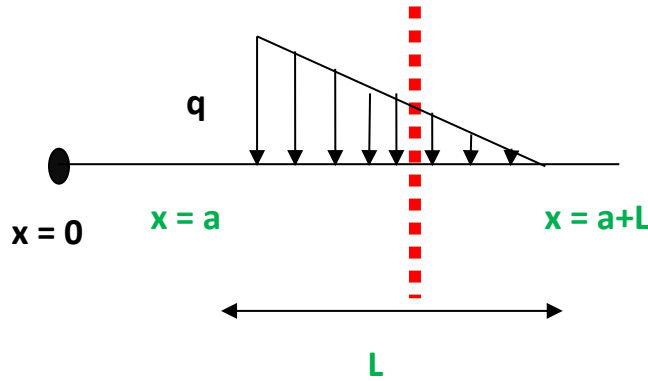
❖ Moment fléchissant :



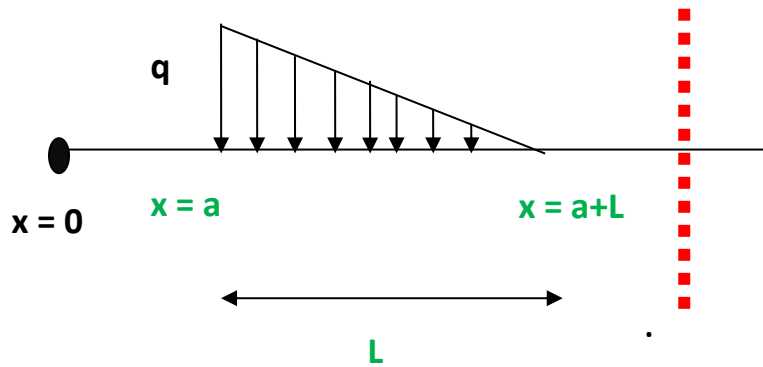
iv) Cas d'une charge répartie non uniforme (Triangulaire) décroissante.

Deux cas à étudier :

- i) Si on coupe au milieu de la charge répartie, une partie trapézoïdale de la charge q à prendre en considération.

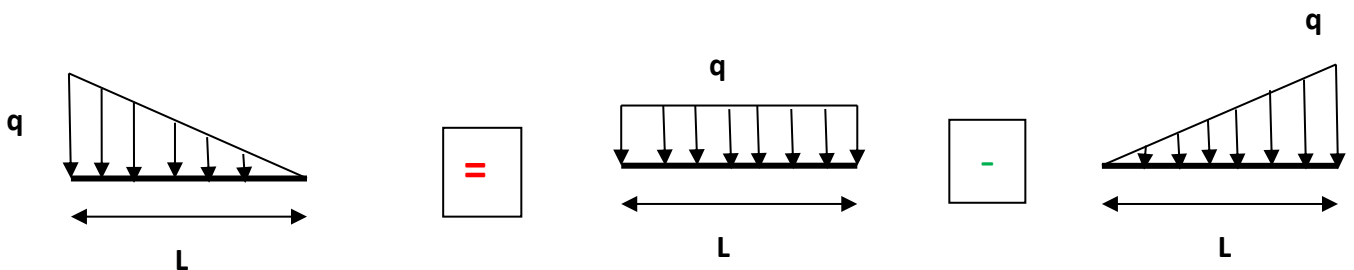


- ii) Si on coupe après la charge répartie q , on prendra en compte la totalité de la charge..

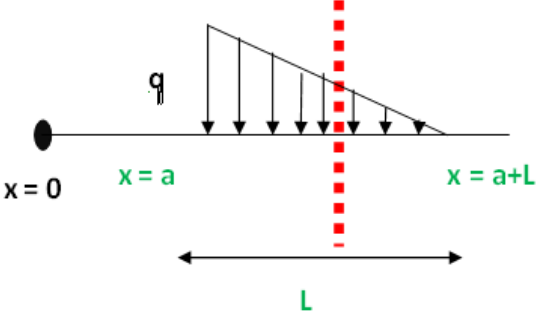
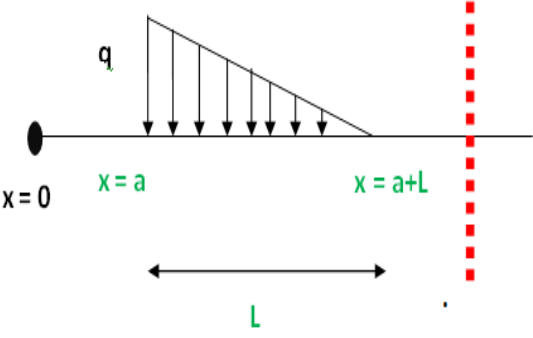


Astuce :

On peut facilement remarquer que ce type de charge n'est qu'une combinaison entre une charge rectangulaire et une charge triangulaire croissante :



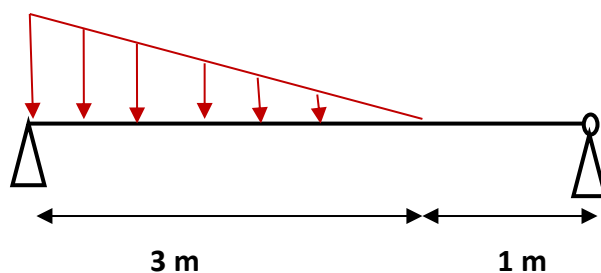
On utilisera donc le formulaire établi pour les deux charges pour en déduire celui de la charge décroissante. (Voir tableau suivant)

		
<p>EFFORT TRANCHANT <u>T(x)</u></p>	$-q(x-a) + \frac{q(x-a)^2}{2.L}$ <p><u>Si a = 0</u> $-q x + (q x^2) / 2L$</p>	$-\frac{q.L}{2}$
<p>MOMENT FLECHISSANT <u>M(x)</u></p>	$\frac{-q(x-a)^2}{2} + \frac{q(x-a)^3}{6.L}$ <p><u>Si a = 0</u> $\frac{-q x^2}{2} + \frac{q x^3}{6.L}$</p>	<p><u>Si a = 0</u></p> $-q \frac{L}{2} (x-a - \frac{L}{3})$ $-q \frac{L}{2} (x - \frac{L}{3})$

Exemple d'application :

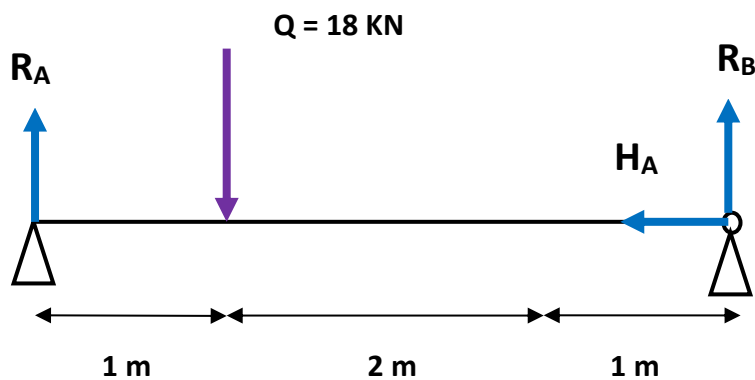
Soit à calculer les efforts internes dans la poutre chargée suivante :

$q = 12 \text{ KN/m}$



Calcul des réactions aux appuis :

- On a : $Q = (q \times L) / 2 = (12 \times 3) / 2 = 18 \text{ KN}$
- Point d'application : $a = L / 3 = 1\text{m}$ et $b = 2L / 3 = 2 \text{ m}$



Equations de la statique :

EQUATION N°1 $\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$ $\Rightarrow 0 = H_B$

EQUATION N°2 $\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$ $\Rightarrow R_A + R_B = Q = 18 \text{ KN}$

$R_A + R_B = 18 \text{ KN}$

EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HB	Q	RB
Moment de la force / A En KN.m	$RA \times 0 = 0$	$HB \times 0 = 0$	$+18 \times 1 = 18$	$-RB \times 4 = -4 RB$

D'où : $0 + 0 + 18 - 4 RB = 0 \Rightarrow 4 RB = 18 \Rightarrow RB = 18/4$

$\Rightarrow RB = 4,5 \text{ KN}$

Puisque : $R_A + R_B = 18 \text{ KN}$, alors : $R_A = 18 - R_B = 18 - 4,5 = 13,5 \text{ KN}$

$\Rightarrow RA = 13,5 \text{ KN}$

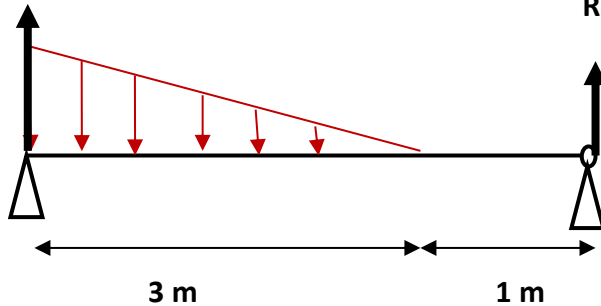
Calculons maintenant les efforts internes en utilisant le formulaire établi.

On a deux intervalles : [0 ; 3] et [3 ; 4]

$R_A = 13,5 \text{ KN}$

$q = 12 \text{ KN/m}$

$R_B = 4,5 \text{ KN}$



	Intervalle [0,3]	Intervalle [3,4]
	Dans cet intervalle, on laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q	On laisse à gauche la totalité de la charge q .
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= + R_A - q (x - a) + (q (x - a)^2) / 2L$ $= 13,5 - 12 x + 2 x^2$ $T(0) = 13,5$ $T(3) = -4,5$	$= + R_A - (q \cdot L/2)$ $= 13,5 - (12 \times 3/2)$ $= -4,5$ $T(3) = -4,5$ $T(4) = -4,5$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= + R_A(x - 0) - (q (x - a)^2) / 2 + (q (x - a)^3) / 6L$ $= 13,5 x - 6 x^2 + 0,667 x^3$ $M(0) = 0$ $M(3) = 4,5$	$= R_A x - (q \cdot L/2)(x - 0 - (L/3))$ $= 13,5 x - 18 (x - 1)$ $= -4,5 x + 18$ $M(3) = 4,5$ $M(4) = 0$

Dans l'intervalle [0,3], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

Or, $T(x)$ est la dérivée de la fonction $M(x)$, donc la dérivée de $M(x)$ s'annule. C'est-à-dire qu'elle admet une valeur maximale dans cet intervalle.

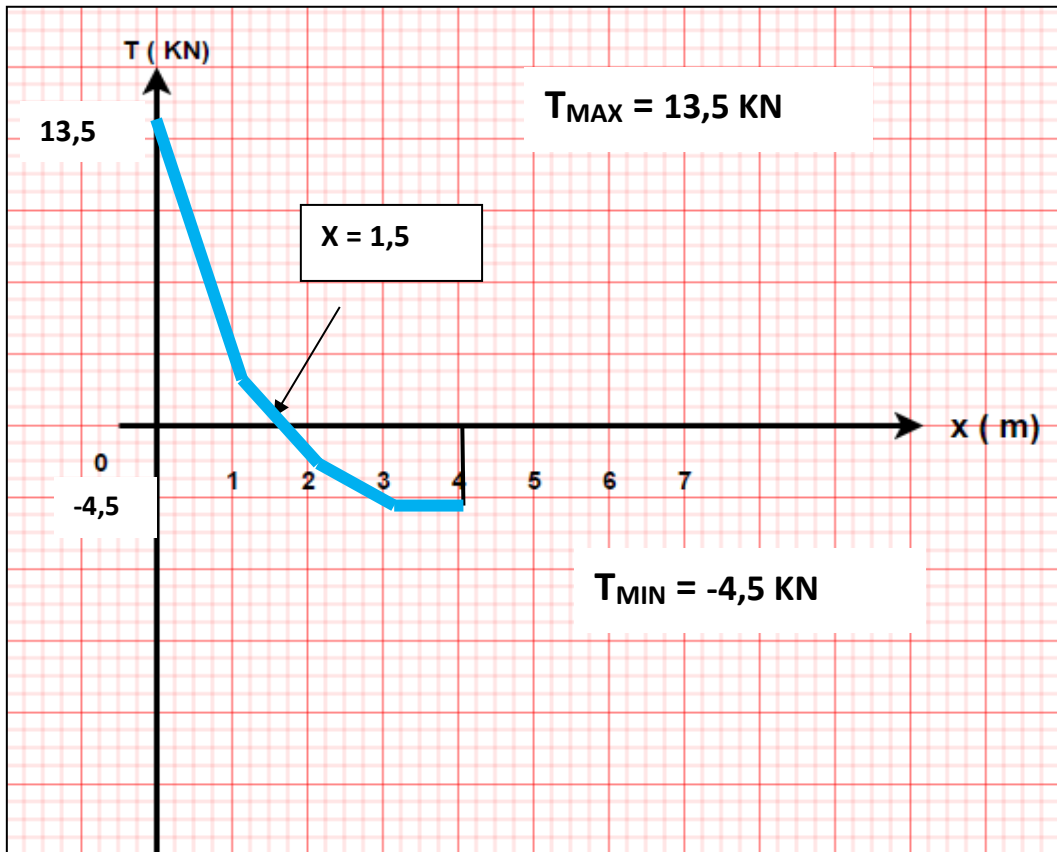
Dans [0,3] $\frac{dM}{dx} = T(x) = 0 \longrightarrow 13,5 - 12 x + 2 x^2 = 0$
 $x = 1,5 \text{ m}$

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle $[0,3]$ au point d'abscisse $x = 1,5$ m

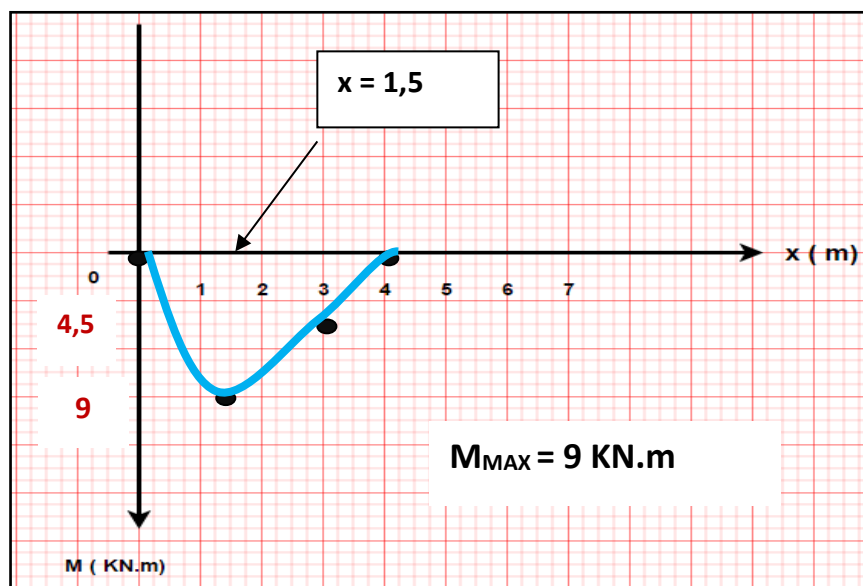
$$M(1,5) = 13,5 * 1,5 - 6 (1,5)^2 + 0,667 *(1,5)^3 = 9 \text{ KN.m}$$

Diagrammes des efforts internes :

❖ Effort tranchant



❖ Moment fléchissant :



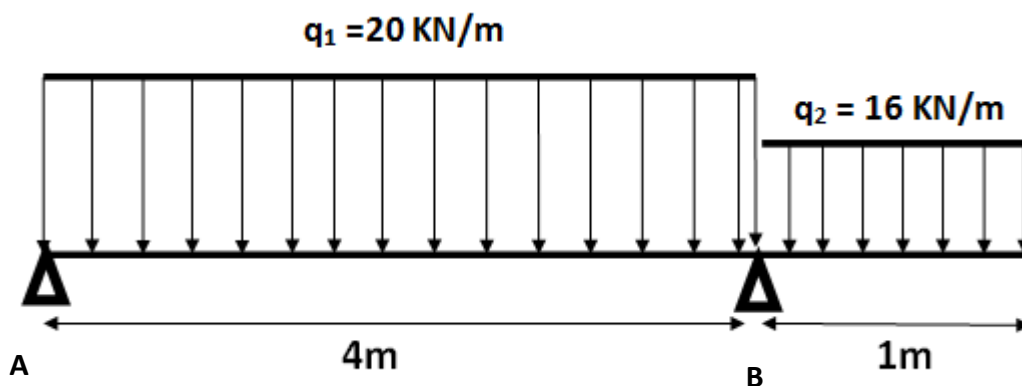
6) Exercices d'application sur le calcul des réactions aux appuis et les efforts internes dans les poutres isostatiques

Exercice 1 :

Une poutre droite avec console de section rectangulaire, en équilibre appuyée sur deux appuis simples, supporte deux charges uniformément réparties q_1 et q_2 :

On vous demande de :

- Calculer les réactions aux appuis de la poutre A et B.
- Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre
- Tracer les diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$ et déduire les valeurs extrêmes M_{\max} et T_{\max}



Solution (EXERCICE 1)

a) Calcul des réactions aux appuis de la poutre A et B.

On a: $Q_1 = (q_1 \times L) = (20 \times 4) = 80 \text{ KN}$; $a = b = L/2 = 2\text{m}$

$Q_2 = (q_2 \times L') = (16 \times 1) = 16 \text{ KN}$; $a' = b' = L'/2 = 0,5 \text{ m}$

$$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \quad \longrightarrow \quad R_A + R_B = Q_1 + Q_2 = 96 \text{ KN}$$

$$\sum MF/A = 0 \quad \longrightarrow \quad 2 \times Q_1 + 4,5 \times Q_2 - 4 R_B = 0$$


$$R_B = (2 \times Q_1 + 4,5 \times Q_2) / 4$$

$$R_B = 58 \text{ KN}$$

$$R_A + R_B = 96 \text{ KN}$$

$$R_A = 38 \text{ KN}$$

b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre

	Intervalle [0,4]	Intervalle [4,5]
	On laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q_1 qui commence à $x = 0$	On laisse à gauche les réactions R_A et R_B ainsi que la totalité de q_1 et on coupe la charge répartie q_2 qui commence à $x = 4$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - q_1 (x - 0)$ $= 38 - 20 x$ $T(0) = 38$ $T(4) = -42$ 	$= R_A + R_B - q_1 \cdot L - q_2 (x - 4)$ $= 38 + 58 - 80 - 16 x + 64$ $= 80 - 16 x$ $T(4) = 16$ $T(5) = 0$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A (x - 0) - q_1 / 2 (x - 0)^2$ $= 38 x - 10 x^2$ $M(0) = 0$ $M(4) = -8$	$= R_A \cdot x + R_B (x - 4) - q_1 \cdot L (x - 0 - L / 2) - (q_2 / 2) (x - 4)^2$ $= 38x + 58(x-4) - 80(x-2) - 8(x-4)^2$ $= 80 x - 8x^2 - 200$ $M(4) = -8$ $M(5) = 0$



Dans l'intervalle [0,4], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

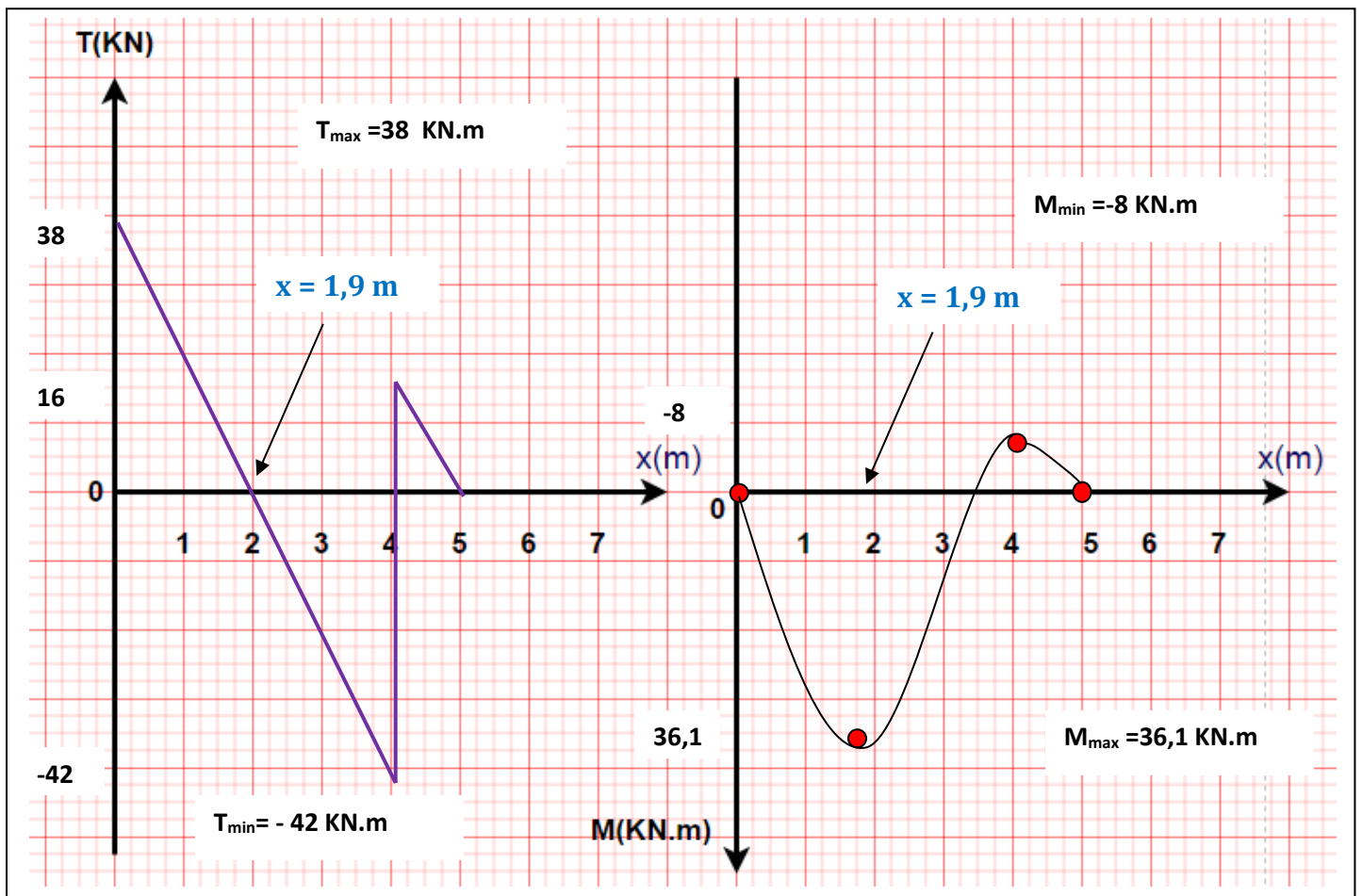
$\frac{dM}{dx} = T(x) = 0$	\longrightarrow	$38 - 20 x = 0$ $x = 1,9 \text{ m}$
----------------------------	-------------------	-------------------------------------

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle [0,3] au point d'abscisse $x = 1,9 \text{ m}$

$$M(1,9) = 38 * 1,9 - 10 (1,9)^2 = 36,1 \text{ KN.m}$$

Si le diagramme de $T(x)$ coupe l'axe horizontal dans un point, le moment fléchissant admet une valeur extrême dans ce point.

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:



Exercice 2 :

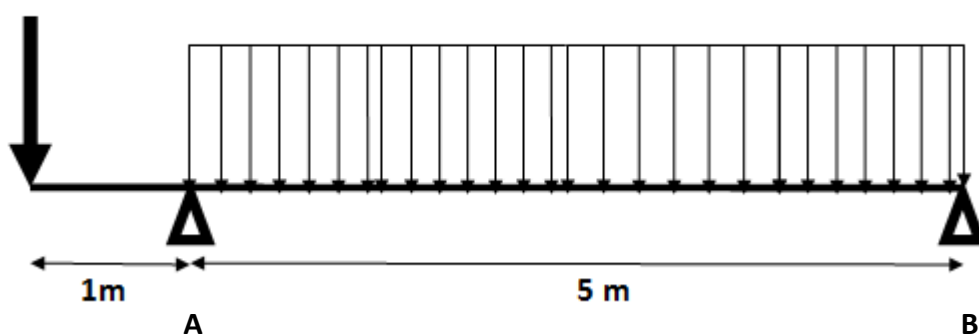
Une poutre droite avec console de section rectangulaire, en équilibre appuyée sur deux appuis simples, supporte une charge uniformément répartie q et une charge concentrée F :

On vous demande de :

- Calculer les réactions aux appuis de la poutre A et B.
- Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre
- Tracer les diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$ et déduire les valeurs extrêmes M_{\max} et T_{\max}

$F=14\text{KN}$

$q = 20 \text{ KN/m}$



Solution (EXERCICE 2)

b) Calcul des réactions aux appuis de la poutre A et B.

On a: $Q = (q \times L) = (20 \times 5) = 100 \text{ KN}$; $a = b = 5/2 = 2,5\text{m}$

$F = 14 \text{ KN}$

$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \longrightarrow R_A + R_B = Q + F = 114 \text{ KN}$

$\sum MF/A = 0 \longrightarrow -F \times 1 + 2,5 \times Q - 5 R_B = 0$


$R_B = (-F \times 1 + 2,5 \times Q) / 5$

$R_B = 47,2 \text{ KN}$

$R_A + R_B = 114 \text{ KN}$

$R_A = 66,8 \text{ KN}$

b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre

	Intervalle [0,1]	Intervalle [1,6]
	On laisse à gauche la force F	On laisse à gauche la réaction R_A et la force F et on coupe la charge répartie q qui commence à $x = 1$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= -F$ $= -14$ $T(0) = -14$ $T(1) = -14$	$= R_A - F - q(x - 1)$ $= 66,8 - 14 - 20x + 20$ $= 72,8 - 20x$ $T(1) = 52,8$ $T(6) = -47,2$ 
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= -F(x - 0)$ $= -14x$ $M(0) = 0$ $M(1) = -14$	$= R_A(x - 1) - F(x - 0) - (q/2)(x - 1)^2$ $= 66,8(x - 1) - 14x - 10(x - 1)^2$ $= 72,8x - 10x^2 - 76,8$ $M(1) = -14$ $M(6) = 0$

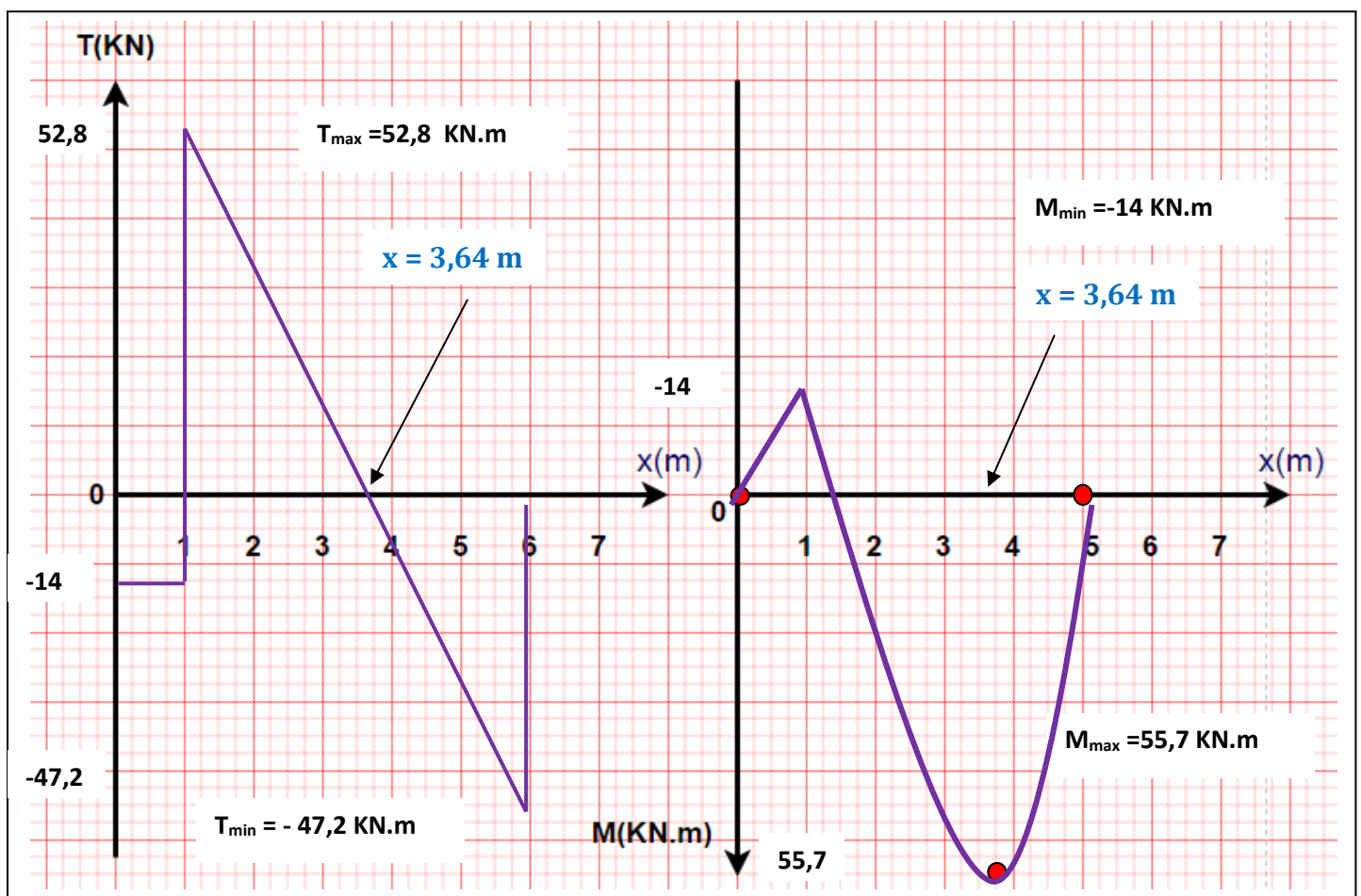
△ Dans l'intervalle [1,6], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

$$\frac{dM}{dx} = T(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 72,8 - 20x = 0 \\ x = 3,64 \text{ m} \end{cases}$$

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle [1,6] au point d'abscisse $x = 3,64$ m

$$M(3,64) = 72,8 * 3,64 - 10(3,64)^2 - 76,8 = 55,7 \text{ KN.m}$$

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:

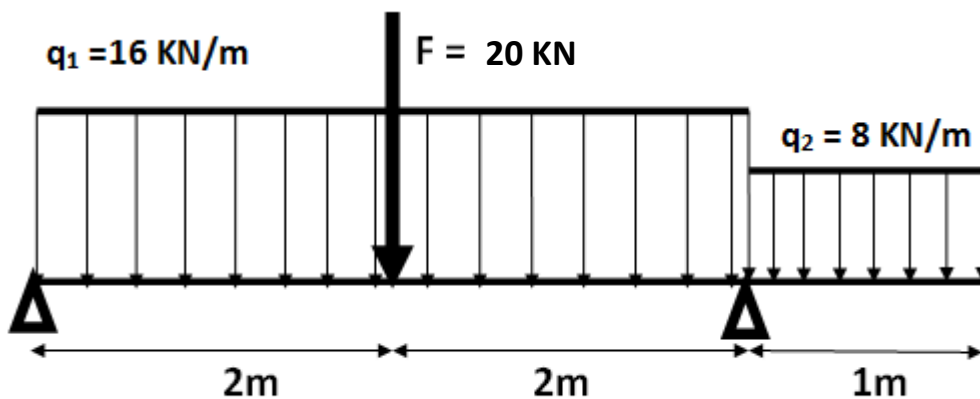


Exercice 3 :

Une poutre droite avec console de section rectangulaire, en équilibre appuyée sur deux appuis simples, supporte deux charges uniformément réparties q_1 et q_2 et une charge concentrée F :

On vous demande de :

- a) Calculer les réactions aux appuis de la poutre A et B.
- b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre
- c) Tracer les diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$ et déduire les valeurs extrêmes M_{max} et T_{max}



Solution (EXERCICE 3)

c) Calcul des réactions aux appuis de la poutre A et B.

On a: $Q_1 = (q_1 \times L) = 16 \times 4) = 64 \text{ KN}$; $a = b = 4/2 = 2\text{m}$

$Q_2 = (q_2 \times L') = (8 \times 1) = 8 \text{ KN}$; $a' = b' = L'/2 = 0,5 \text{ m}$

$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \longrightarrow R_A + R_B = Q_1 + Q_2 + F = 92 \text{ KN}$

$\sum MF/A = 0 \longrightarrow F \times 2 + 2 \times Q_1 + 4,5 Q_2 - 4 R_B = 0$

$R_B = (F \times 2 + 2 \times Q_1 + 4,5 Q_2) / 4 \longrightarrow R_B = 51 \text{ KN}$

$R_A + R_B = 92 \text{ KN} \longrightarrow R_A = 41 \text{ KN}$

b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre

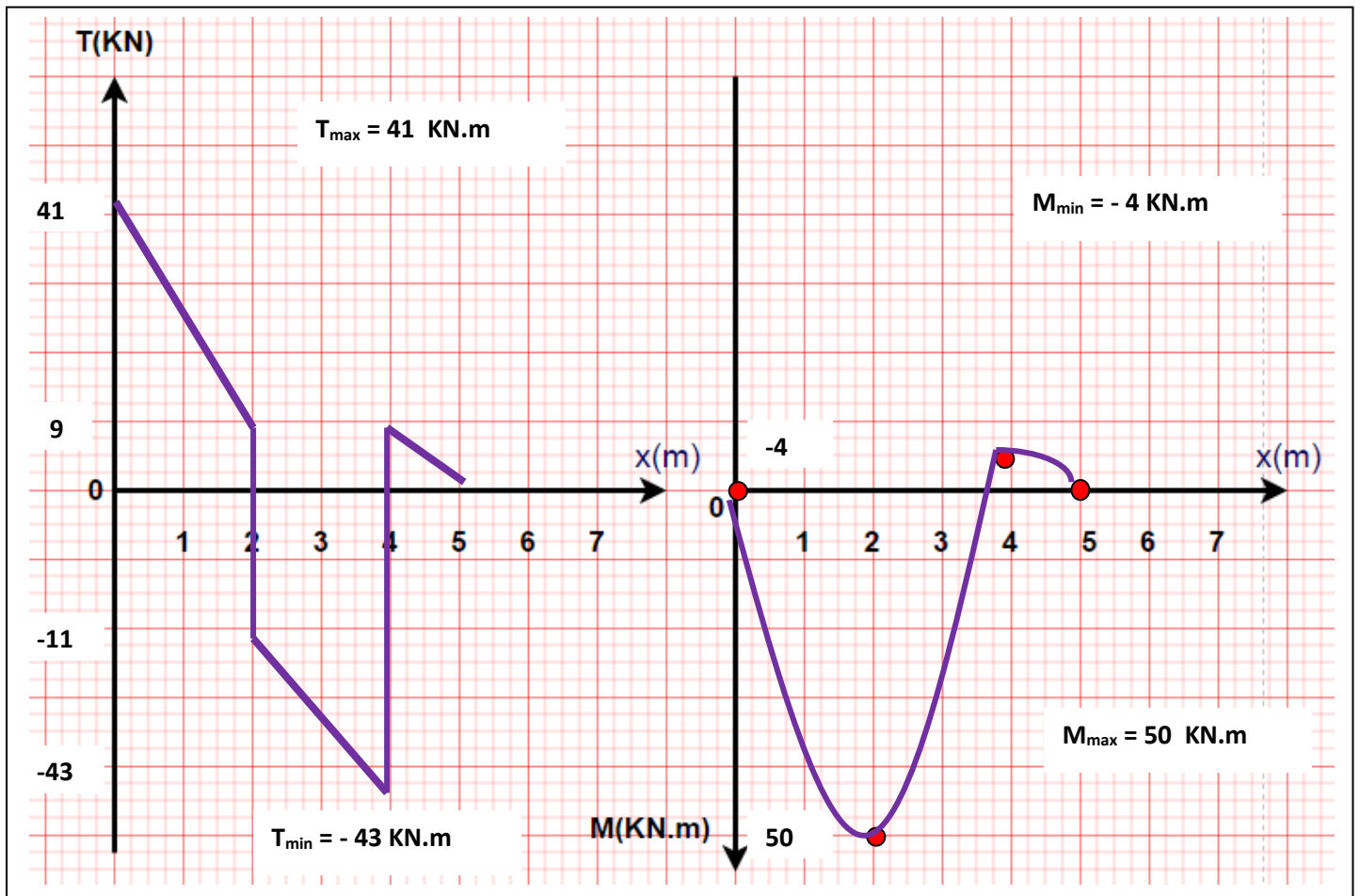
Trois intervalles à étudier :

	<u>Intervalle [0,2]</u>	<u>Intervalle [2,4]</u>
	On laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q_1 qui commence à $x = 0$	On laisse à gauche la réaction R_A et la force F et on coupe la charge répartie q_1 qui commence à $x = 0$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - q_1 (x - 0)$ $= 41 - 16 x$ $T(0) = 41$ $T(2) = 9$	$= R_A - q_1 (x - 0) - F$ $= 41 - 16 x - 20$ $= 21 - 16 x$ $T(2) = -11$ $T(4) = -43$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x - (q_1/2) (x - 0)^2$ $= -8 x^2 + 41 x$ $M(0) = 0$ $M(2) = 50$	$R_A x - (q_1/2) (x - 0)^2 - F(x-2)$ $= -8 x^2 + 41 x - 20 x + 40$ $= -8 x^2 + 21 x + 40$ $M(2) = 50$ $M(4) = -4$

Intervalle [4,5] : On laisse à gauche les réactions R_A et R_B et la force F et la totalité de la charge q_1 et on coupe la charge répartie q_2 qui commence à $x = 4$

Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A + R_B - F - q_1 L - q_2 (x - 4)$ $= 41 + 51 - 20 - 16 \cdot 4 - 8x + 32$ $= 40 - 8 x$ $T(4) = 8$ $T(5) = 0$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x + R_B (x - 4) - F(x-2) - (q_1 L) (x-0 - L/2) - (q_2/2) (x - 4)^2$ $= 41x + 51(x-4) - 20(x-2) - 64(x-2) - 4 (x - 4)^2$ $= 40 x - 4x^2 - 100$ $M(4) = -4$ $M(5) = 0$

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:

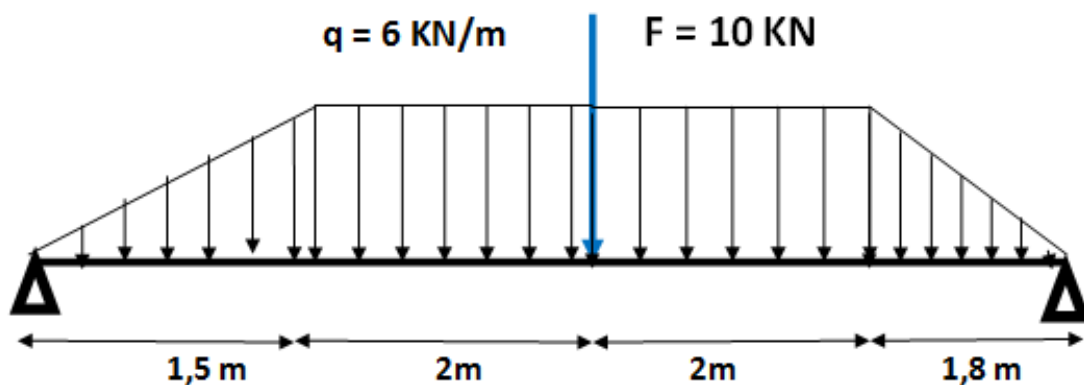


Exercice 4 :

Soit à étudier la poutre représentée sur la figure ci-dessous.

On vous demande de :

- Calculer les réactions aux appuis de la poutre A et B.
- Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre
- Tracer les diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$ et déduire les valeurs extrêmes M_{\max} et T_{\max}



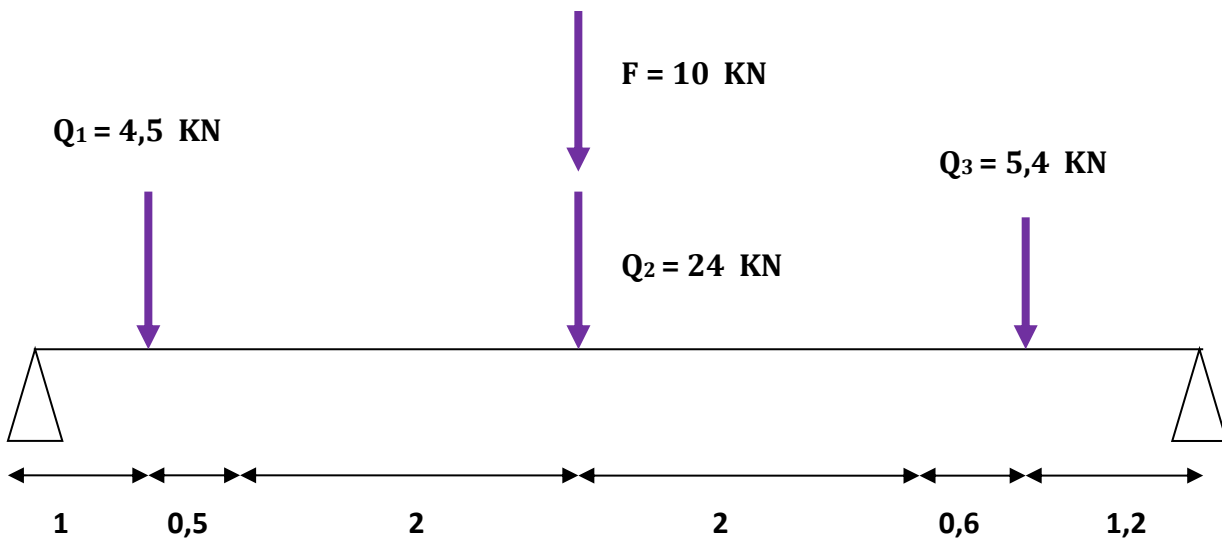
Solution (EXERCICE 4)

a) Calcul des réactions aux appuis A et B de la poutre.

On a: $Q_1 = (q \times L)/2 = (6 \times 1,5)/2 = 4,5 \text{ KN}$; $a = 2L/3 = 1 \text{ m}$. $b = L/3 = 1,5/3 = 0,5 \text{ m}$

$Q_2 = (q \times L') = (6 \times 4) = 24 \text{ KN}$; $a' = b' = 4/2 = 2 \text{ m}$

$Q_3 = (q \times L'')/2 = (6 \times 1,8)/2 = 5,4 \text{ KN}$; $a'' = L''/3 = 0,6 \text{ m}$. $b = 2 L''/3 = 1,2 \text{ m}$



$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \longrightarrow R_A + R_B = Q_1 + Q_2 + Q_3 + F = 43,9 \text{ KN}$

$\sum MF/A = 0 \longrightarrow 1 \cdot Q_1 + 3,5 Q_2 + 3,5 F + 6,1 Q_3 - 7,3 R_B = 0$

$R_B = (1 \cdot Q_1 + 3,5 Q_2 + 3,5 F + 6,1 Q_3) / 7,3$

$R_B = 21,43 \text{ KN}$

$R_A + R_B = 43,9 \text{ KN}$

$R_A = 22,47 \text{ KN}$

b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre

Quatre intervalles à étudier :

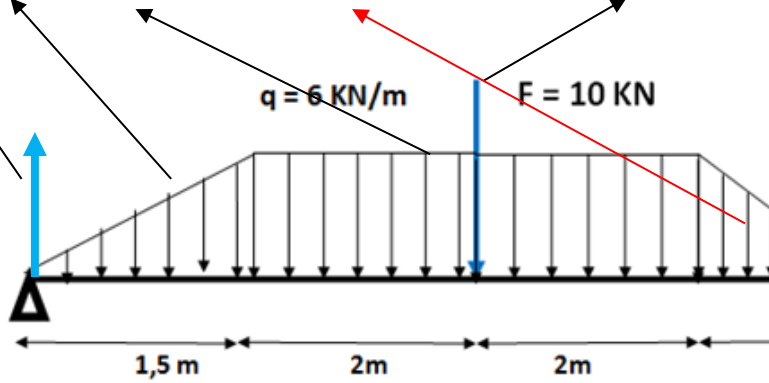
	<u>Intervalle [0 ; 1,5]</u>	<u>Intervalle [1,5 ; 3,5]</u>
	On laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge triangulaire q qui commence à $x = 0$	On laisse à gauche la réaction R_A ainsi que la charge triangulaire croissante et on coupe la charge rectangulaire q qui commence à $x = 1,5$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - (q/2L) (x - 0)^2$ $= 22,47 - 2x^2$ $T(0) = 22,47$ $T(1,5) = 17,97$	$= R_A - (q.L/2) - q (x - 1,5)$ $= 22,47 - 4,5 - 6x + 9$ $= 26,97 - 6x$ $T(1,5) = 17,97$ $T(3,5) = 5,97$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x - (q/6L) (x - 0)^3$ $= -0,667 x^3 + 22,47 x$ $M(0) = 0$ $M(1,5) = 31,46$	$R_A x - (q.L/2)(x - 0 - (2L/3)) - (q/2)(x - 1,5)^2$ $= 22,47x - 4,5(x-1) - 3(x-1,5)^2$ $= -3x^2 + 26,97x - 2,25$ $M(1,5) = 31,46$ $M(3,5) = 55,4$

	<u>Intervalle [3,5 ; 5,5]</u>
	On laisse à gauche la réaction R_A et la charge F ainsi que la charge triangulaire croissante et on coupe la charge rectangulaire q qui commence à $x = 1,5$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - (q.L/2) - q (x - 1,5) - F$ $= 22,47 - 4,5 - 6x + 9 - 10$ $= 16,97 - 6x$ $T(3,5) = -4,03$ $T(5,5) = -16,03$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x - (q.L/2)(x - 0 - (2L/3)) - (q/2)(x - 1,5)^2 - F(x - 3,5)$ $= 22,47x - 4,5(x-1) - 3(x-1,5)^2 - 10(x-3,5)$ $= -3x^2 + 26,97x - 2,25 - 10x + 35 = -3x^2 + 16,97x + 32,75$ $M(3,5) = 55,4$ $M(5,5) = 35,34$

Intervalle [5,5 ; 7,3]

On laisse à gauche la réaction R_A et la charge F ainsi que la charge triangulaire croissante et la charge rectangulaire et on coupe la charge triangulaire décroissante q qui commence à $x = 5,5$

$$= R_A - (q.L/2) - (q.L) - q(x - 5,5) + (q/2L)(x - 5,5)^2 - F$$



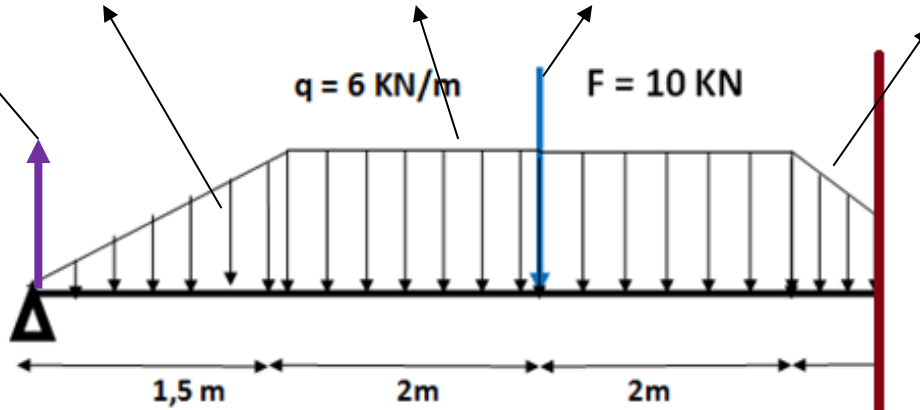
$$= 22,47 - 4,5 - 24 - 6(x-5,5) + 1,667(x-5,5)^2 - 10$$

$$= 1,667x^2 - 24,34x + 67,4$$

$$T(5,5) = 16,03$$

$$T(7,3) = -21,43$$

$$= R_A x - (qL/2)(x - 0 - (2L/3)) - (qL)(x - 1,5 - (4/2)) - F(x - 3,5) - (q/2)(x - 5,5)^2 + (q/6L)(x - 5,5)^3$$



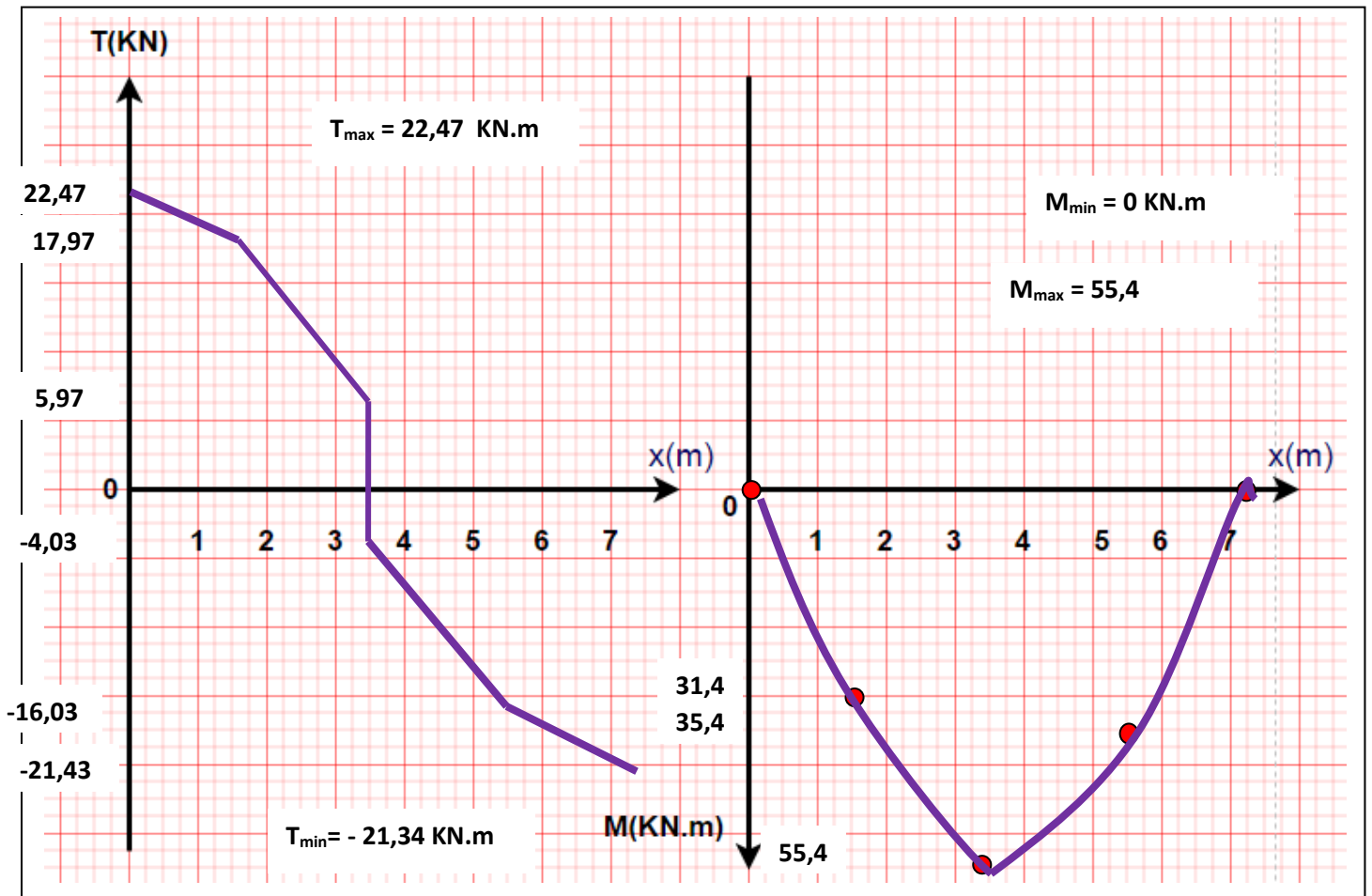
$$= 22,47x - 4,5(x-1) - 24(x-3,5) - 10(x-3,5) - 3(x-5,5)^2 + 0,556(x-5,5)^3$$

$$= 0,556x^3 - 12,17x^2 + 67,4x + 364,84 - 59,75$$

$$M(5,5) = 35,34$$

$$M(7,3) = 0 \text{ (Environ)}$$

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:

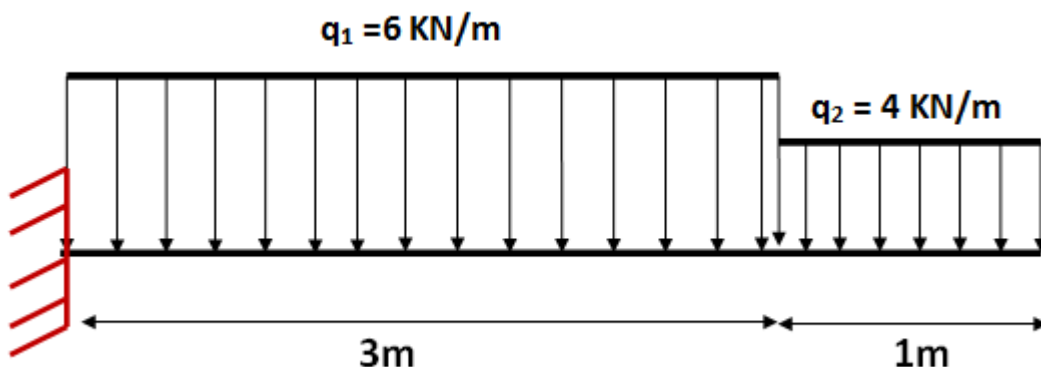


Exercice 5 :

Une poutre droite encastree en e'quilibre supporte deux charges uniforme'ment reparties q_1 et q_2 :

On vous demande de :

- Calculer les reactions a' l'appui triple de la poutre.
- Etablir les equations du moment flechissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre
- Tracer les diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$ et deduire les valeurs extremes M_{\max} et T_{\max}

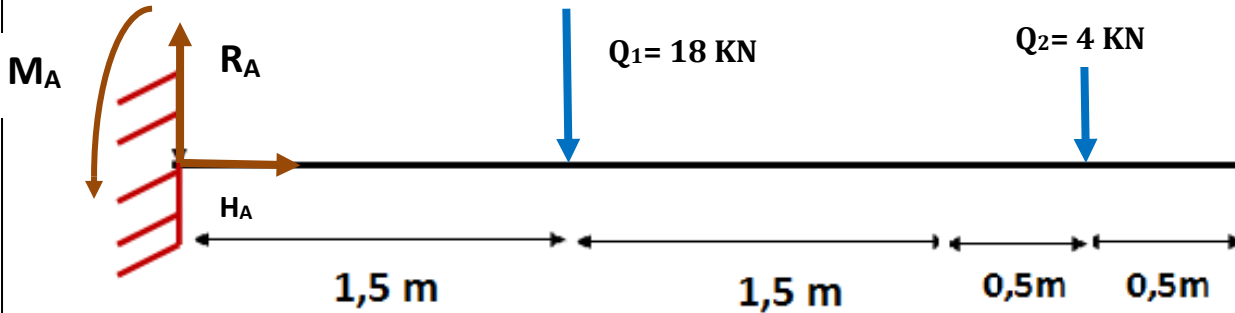


Solution (EXERCICE 5)

d) Calcul des réactions à l'appui de la poutre

On a: $Q_1 = (q_1 \times L) = (6 \times 3) = 18 \text{ KN}$; $a = b = L/2 = 1,5 \text{ m}$

$Q_2 = (q_2 \times L') = (4 \times 1) = 4 \text{ KN}$; $a' = b' = L'/2 = 0,5 \text{ m}$



EQUATION N°1

$$\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$$

$HA = 0 \text{ KN}$

EQUATION N°2

$$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$$

$RA = Q_1 + Q_2 = 18 + 4 = 22 \text{ KN}$

$RA = 22 \text{ KN}$

EQUATION N°3 $\sum MF/A = 0$

On a :

Force	RA	HA	Q1	Q2	
Moment de la force / A En KN.m	$RA \times 0 = 0$	$HA \times 0 = 0$	$+Q_1 \times 1,5 = 27$	$+Q_2 \times 3,5 = 14$	$-M_A$

Le moment d'encastrement est négatif (sens contraire des aiguilles d'une montre)

D'où : $0 + 0 + 27 + 14 - M_A = 0 \longrightarrow M_A = 41 \text{ KN.m}$

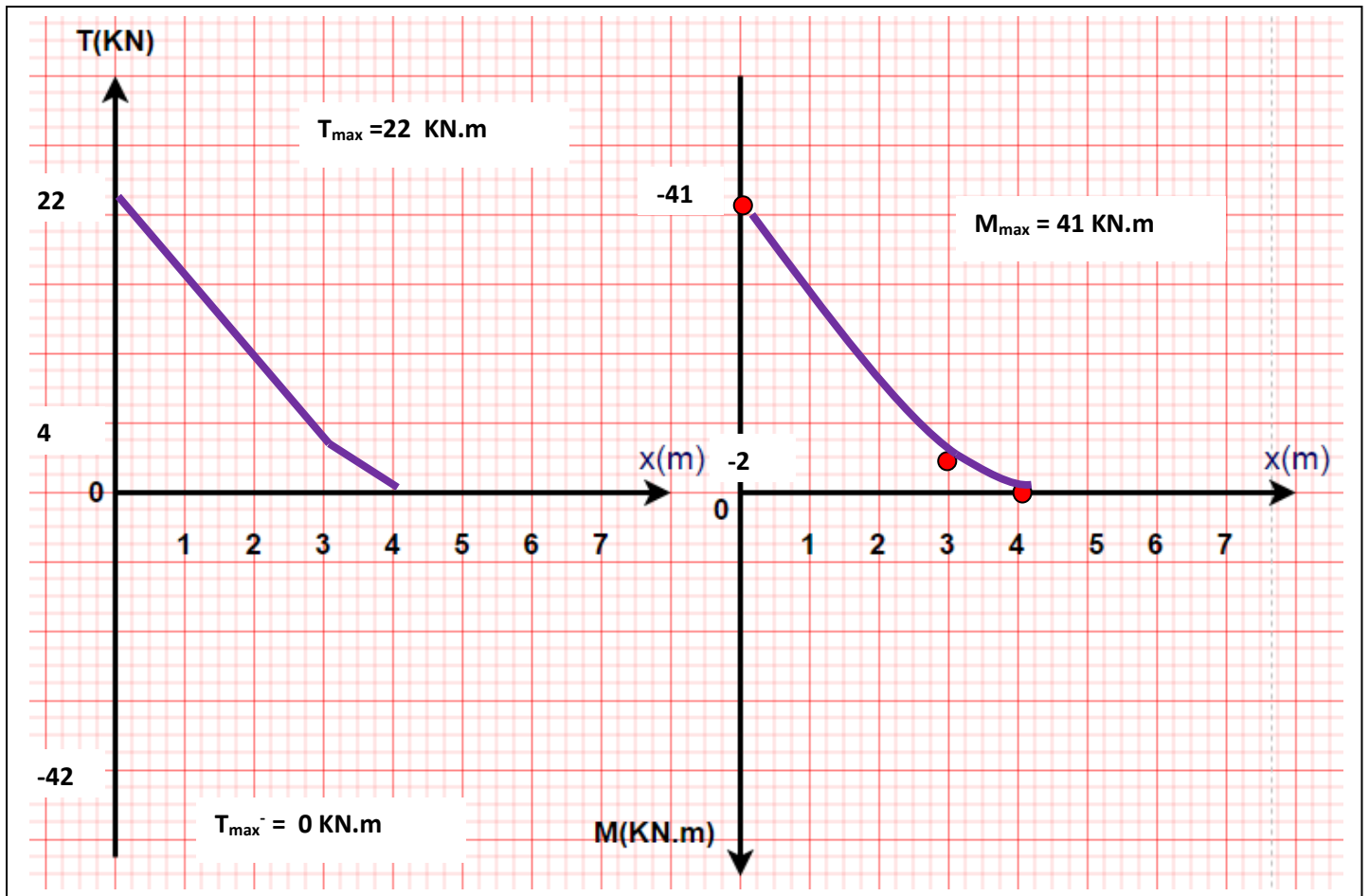
$M_A = 41 \text{ KN.m}$

b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre

	Intervalle [0,3]	Intervalle [3,4]
	On laisse à gauche la réaction R_A et on coupe la charge répartie q_1 qui commence à $x = 0$ On tient en compte le moment d'encastrement M_A dans l'équation de M avec un signe négatif (sens de M_A est négatif)	On laisse à gauche les réactions R_A et R_B ainsi que la totalité de q_1 et on coupe la charge répartie q_2 qui commence à $x = 4$ On tient en compte le moment d'encastrement M_A dans l'équation de M .
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - q_1 (x - 0)$ $= 22 - 6x$ $T(0) = 22$ $T(3) = 4$	$= R_A - q_1.L - q_2 (x - 3)$ $= 22 - 6 \cdot 3 - 4(x-3)$ $= 16 - 4x$ $T(3) = 4$ $T(4) = 0$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A(x - 0) - q_1/2 (x - 0)^2 - M_A$ $= 22x - 3x^2 - 41$ $M(0) = -41$ $M(3) = -2$	$= R_A.x - q_1.L(x-0-L/2) - (q_2/2)(x-3)^2 - M_A$ $= 22x - 18(x-1,5) - 2(x-3)^2 - 41$ $= 16x - 2x^2 - 32$ $M(3) = -2$ $M(4) = 0$

On ne tient jamais compte le moment d'encastrement dans $M(x)$

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:

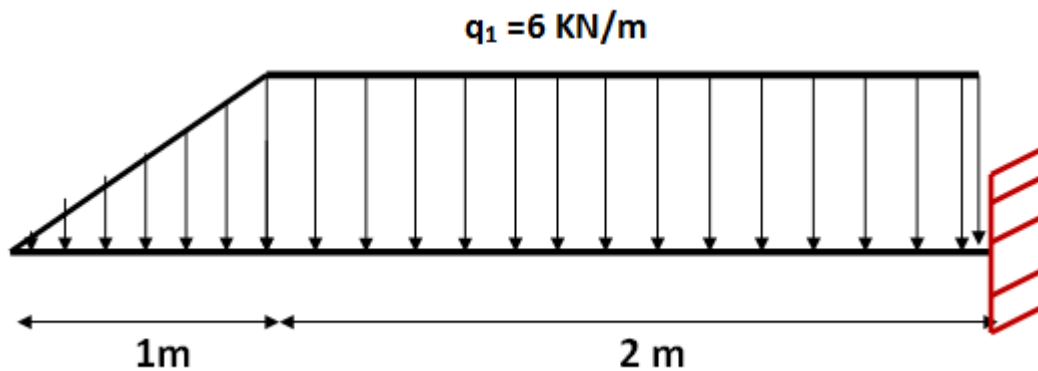


Exercice 6 :

Une poutre droite encadrée en équilibre supporte une charge uniformément répartie q_1 et une charge triangulaire de même valeur :

On vous demande de :

- a) Calculer les réactions à l'appui triple de la poutre.
- b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre
- c) Tracer les diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$ et déduire les valeurs extrêmes M_{max} et T_{max}

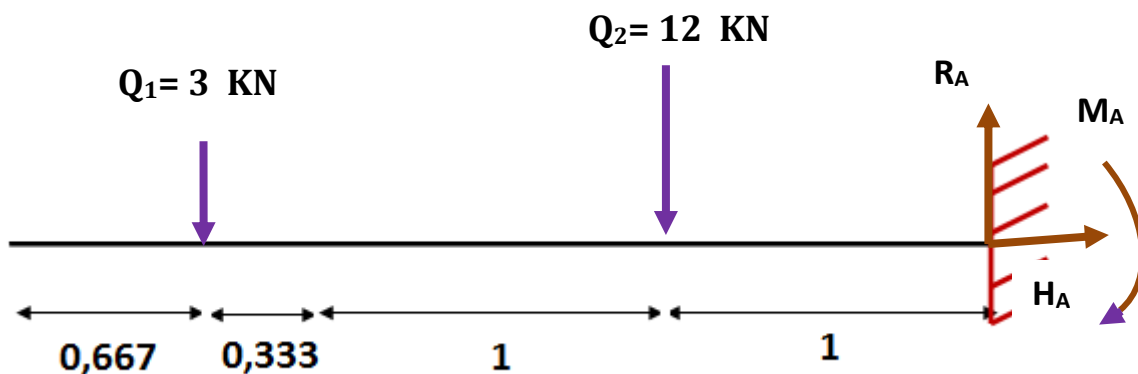


Solution (EXERCICE 6)

b) Calcul des réactions aux appuis A et B de la poutre.

On a: $Q_1 = (q \times L)/2 = (6 \times 1)/2 = 3 \text{ KN}$; $a = 2L/3 = 0,667 \text{ m}$. $b = L/3 = 1/3 = 0,333 \text{ m}$

$Q_2 = (q \times L') = (6 \times 2) = 12 \text{ KN}$; $a' = b' = 2/2 = 1 \text{ m}$



EQUATION N°1

$$\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$$

$$HA = 0 \text{ KN}$$

EQUATION N°2

$$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$$

$$R_A = Q_1 + Q_2 = 3 + 12 = 15 \text{ KN}$$

$$R_A = 15 \text{ KN}$$

$$EQUATION N°3 \quad \sum MF/A = 0$$

On a :

Force	RA	HA	Q ₁	Q ₂	
Moment de la force /A En KN.m	RA x 0 = 0	HA x 0 = 0	-Q ₁ x 2,333 = -7	-Q ₂ x 1 = -12	+M _A

Le moment d'encastrement est positif (sens des aiguilles d'une montre)

D'où : $0 + 0 - 7 - 12 + M_A = 0 \quad \longrightarrow \quad M_A = 19 \text{ KN.m}$

$$M_A = 19 \text{ KN.m}$$

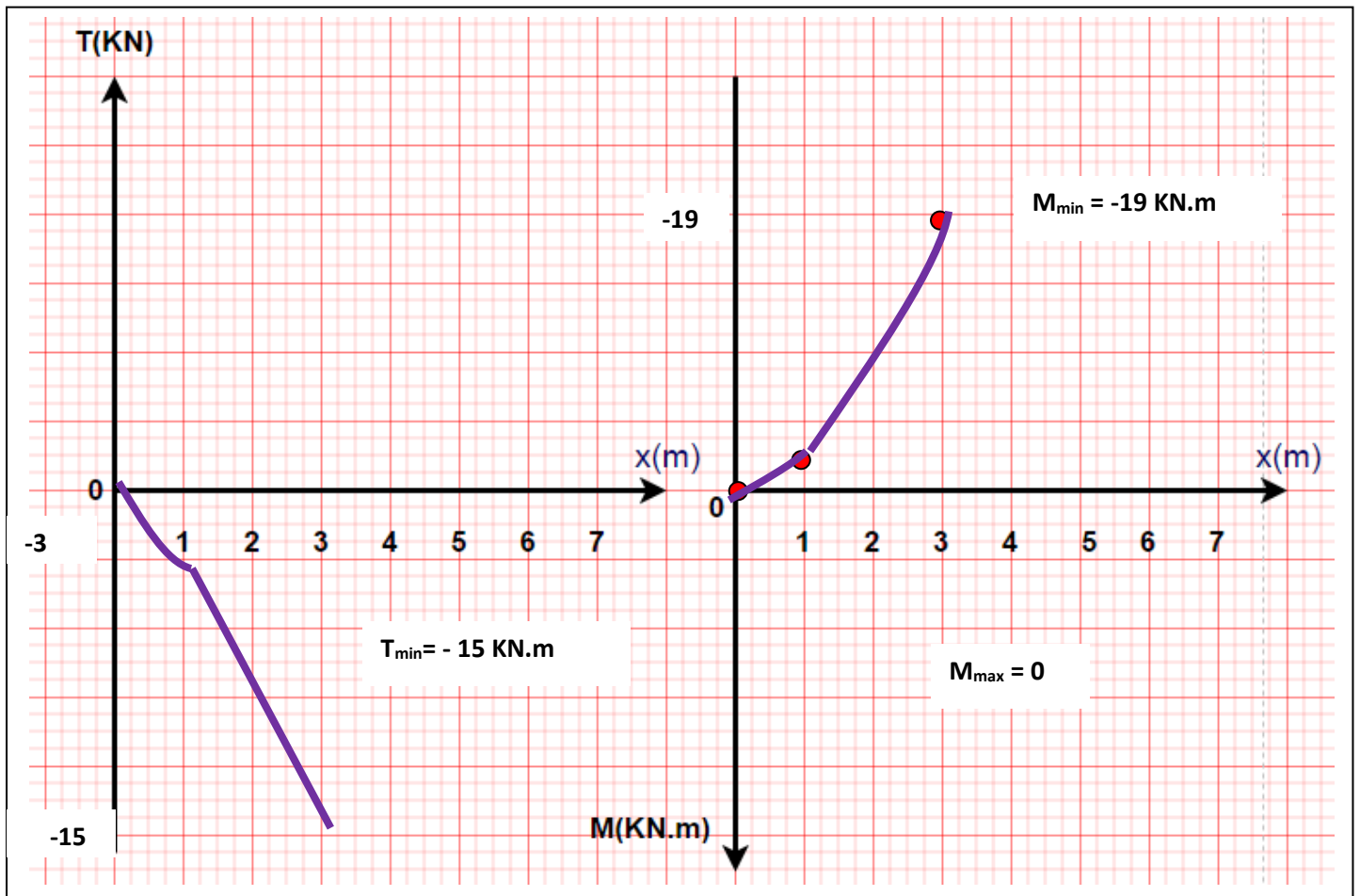
b) Etablir les équations du moment fléchissant M(x) et l'effort tranchant T(x) le long de la poutre

Quatre intervalles à étudier :

	<u>Intervalle [0 ; 1]</u>	<u>Intervalle [1 ; 3]</u>
	On coupe la charge triangulaire q qui commence à x = 0	On laisse à gauche la charge triangulaire croissante et on coupe la charge rectangulaire q qui commence à x = 1
Effort tranchant T(x) (KN)	$= - (q/2L) (x - 0)^2$ $= -3 x^2$ T(0) = 0 T(1) = -3	$= - (qL/2) - q (x - 1)$ $= -3 - 6x + 6$ $= 3 - 6x$ T(1) = -3 T(3) = -15
Moment fléchissant M(x) (KN.m)	$= - (q/6L) (x - 0)^3$ $= - x^3$ M(0) = 0 M(1) = -1	$- (qL/2)(x - 0 - (2L/3)) - (q/2)(x - 1)^2$ $= -3(x - 0,667) - 3(x - 1)^2$ $= -3x^2 + 3x - 1$ M(1) = -1 M(3) = -19

Le moment à l'appui n'est pas nul

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:

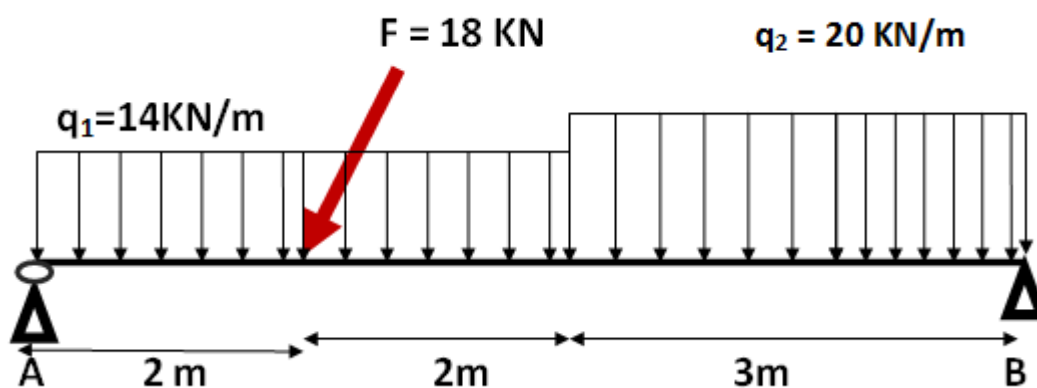


Exercice 7 :

Une poutre droite, en équilibre appuyée sur deux appuis (simple et double), supporte deux charges uniformément réparties q_1 et q_2 et une charge concentrée F inclinée par un angle de 60° :

On vous demande de :

- Calculer les réactions aux appuis de la poutre A et B.
- Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et de l'effort tranchant $T(x)$ ainsi que l'équation de l'effort normal le long de la poutre.
- Tracer les diagrammes de $M(x)$, $T(x)$ et $N(x)$ et déduire les valeurs extrêmes M_{max} et T_{max}



Solution (EXERCICE 7)

a) Calcul des réactions aux appuis de la poutre A et B.

Etape 0 : Décomposer la charge inclinée en deux composantes verticale et horizontale :

La charge inclinée peut être décomposée en deux composantes :

Composante verticale : F_y

$$F_y = F \sin \alpha$$

Application numérique :

$$F_y = 18 \sin 60 = 15,59 \text{ KN}$$

Composante horizontale : F_x

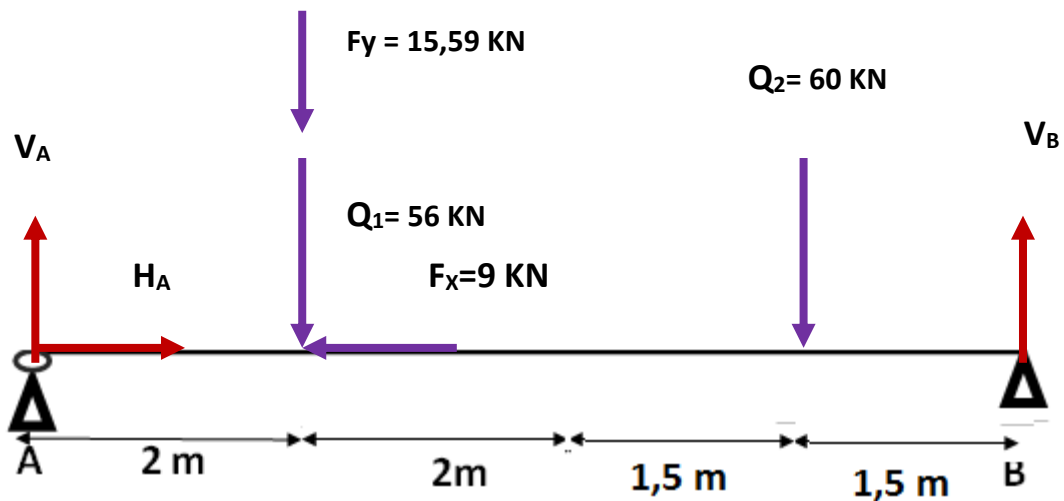
$$F_x = F \cos \alpha$$

Application numérique :

$$F_x = 18 \cos 60 = 9 \text{ KN}$$

On a: $Q_1 = (q_1 \times L) = 14 \times 4 = 56 \text{ KN}$; $a = b = 4/2 = 2\text{m}$

$Q_2 = (q_2 \times L') = (20 \times 3) = 60 \text{ KN}$; $a' = b' = L'/2 = 1,5 \text{ m}$



EQUATION N°1

$$\sum F \rightarrow = \sum F \leftarrow$$

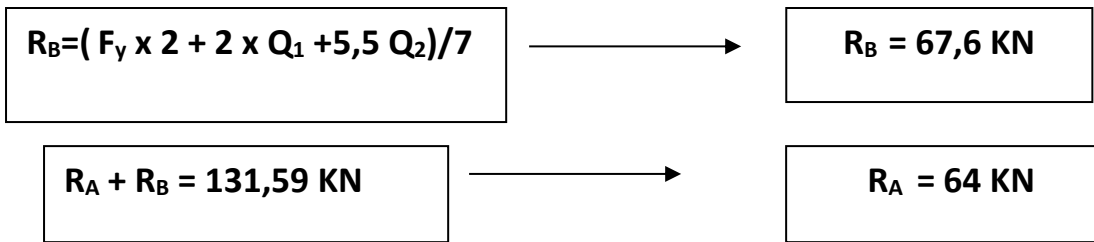
$$H_A = F_x = 9 \text{ KN}$$

$$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow$$

$$R_A + R_B = Q_1 + Q_2 + F_y = 131,59 \text{ KN}$$

$$\sum MF/A = 0$$

$$F_y \times 2 + 2 \times Q_1 + 5,5 Q_2 - 7 R_B = 0$$



b) Etablir les équations du moment fléchissant $M(x)$ et de l'effort tranchant $T(x)$ ainsi que l'équation de l'effort normal le long de la poutre.

Trois intervalles à étudier :

	<u>Intervalle [0,2]</u>	<u>Intervalle [2,4]</u>
	On laisse à gauche la réaction R_A on coupe la charge répartie q_1 qui commence à $x = 0$	On laisse à gauche la réaction R_A et la force F et on coupe la charge répartie q_1 qui commence à $x = 0$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - q_1 (x - 0)$ $= 64 - 14x$ $T(0) = 64$ $T(2) = 36$	$= R_A - q_1 (x - 0) - F_y$ $= 64 - 14x - 15,59$ $= 48,41 - 14x$ $T(2) = 20,61$ $T(4) = -7,59$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x - (q_1/2) (x - 0)^2$ $= 64x - 7x^2$ $M(0) = 0$ $M(2) = 100$	$R_A x - (q_1/2) (x - 0)^2 - F_y (x - 2)$ $= 64x - 7x^2 - 15,59x + 31,18$ $= -7x^2 + 48,41x + 31,18$ $M(2) = 100$ $M(4) = 112,82$

Intervalle [4,7] : On laisse à gauche les réactions R_A et la force F_y et la totalité de la charge q_1 et on coupe la charge répartie q_2 qui commence à $x = 4$

Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - F_y - q_1 L - q_2 (x - 4)$ $= 64 - 15,59 - 14 \cdot 4 - 20x + 80$ $= 72,41 - 20x$ $T(4) = -7,59$ $T(7) = -67,6$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x - F_y (x - 2) - (q_1 L) (x - 0 - L/2) - (q_2/2) (x - 4)^2$ $= 64x - 15,59(x - 2) - 56(x - 2) - 10(x - 4)^2$ $= 72,41x - 10x^2 - 16,82$ $M(4) = 112,82$ $M(7) = 0$

Dans l'intervalle [2,4], la fonction $T(x)$ change de signe, c'est-à-dire que T s'annule dans cet intervalle.

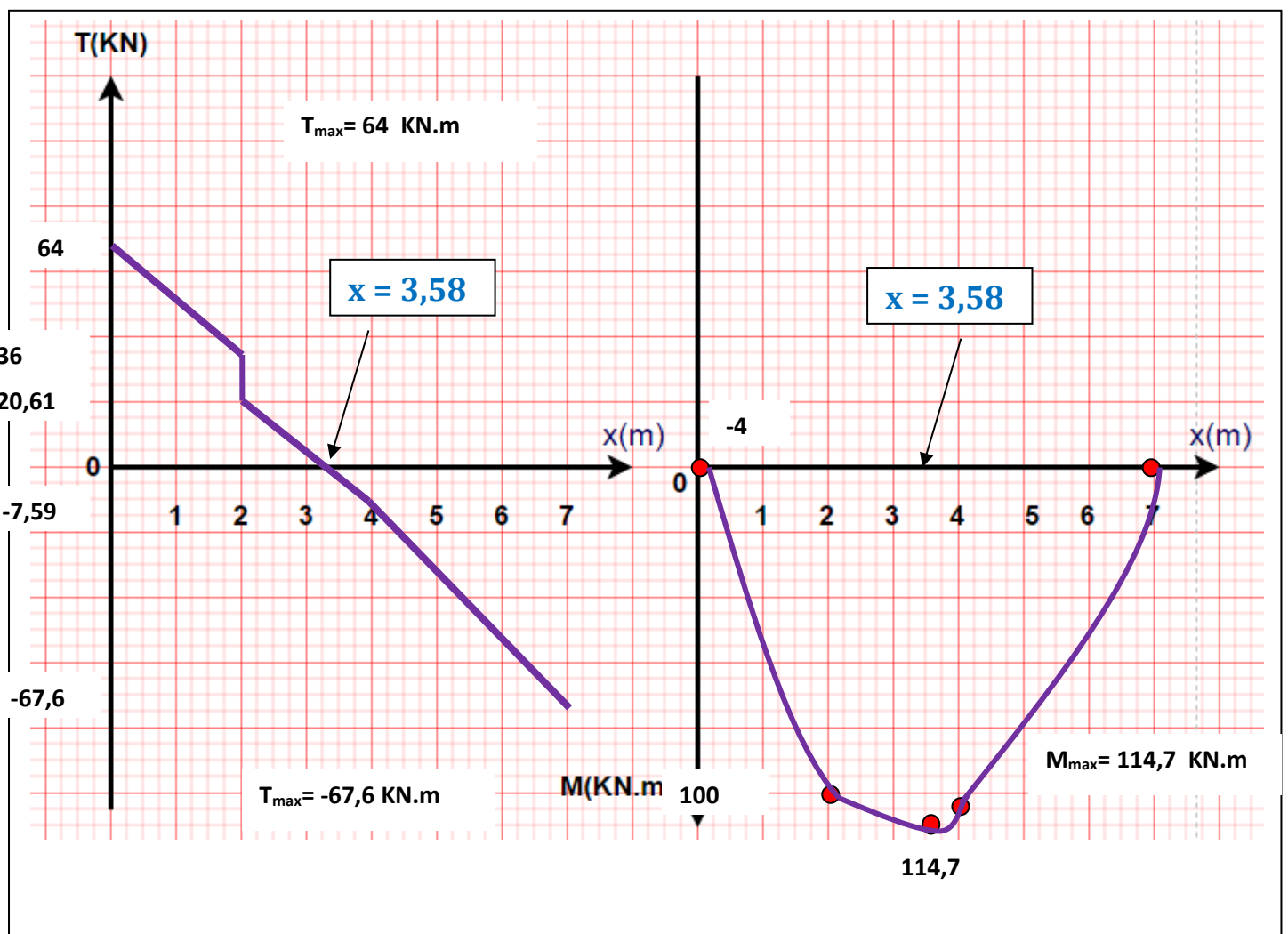
Or, $T(x)$ est la dérivée de la fonction $M(x)$, donc la dérivée de $M(x)$ s'annule. C'est-à-dire qu'elle admet une valeur maximale dans cet intervalle.

Dans [2,4] $\frac{dM}{dx} = T(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} 48,41 - 14x = 0 \\ x = 3,58 \text{ m} \end{cases}$

Le moment fléchissant admet une valeur maximale dans l'intervalle [2,4] au point d'abscisse $x = 3,58$ m

$M(3,58) = -7(3,58)^2 + 48,41 \cdot 3,58 + 31,18 = 114,77 \text{ KN.m}$

c) Diagrammes de $M(x)$ et $T(x)$:

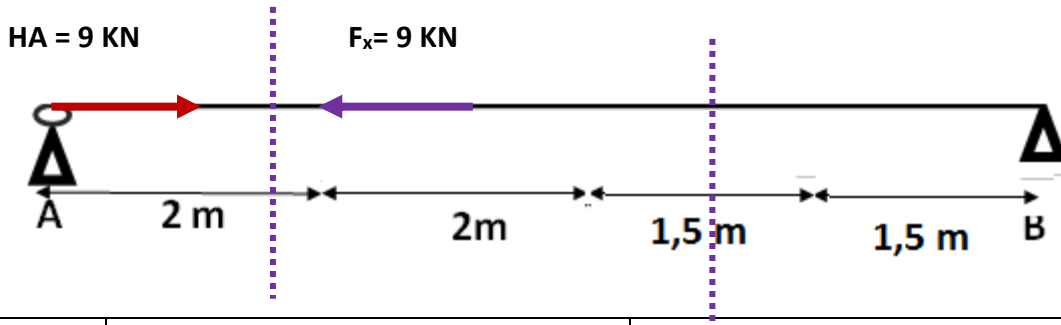


L'équation de l'effort normal le long de la poutre.

Pour l'effort normal, seules les charges horizontales sont à prendre en considération

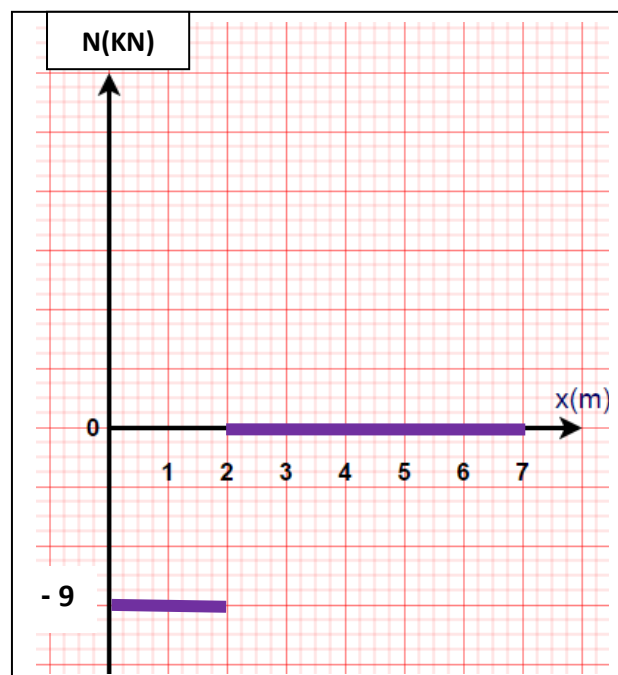
Si l'effort se dirige à l'intérieur de la poutre, il est considéré négatif (Compression) \longrightarrow

Si l'effort se dirige à l'extérieur de la poutre, il est considéré positif (traction) \longleftarrow



	<u>Intervalle [0,2]</u>	<u>Intervalle [2,7]</u>
	On laisse à gauche la réaction H_A qui se dirige à l'intérieur de la poutre	On laisse à gauche la réaction H_A qui se dirige à l'intérieur de la poutre et la force F_x qui se dirige à l'extérieur de la poutre
Effort Normal $N(x)$ (KN)	$= - H_A$ $= - 9 \text{ KN}$ Le tronçon [0 ; 2] est comprimé par un effort 9 KN	$= - H_A + F_x$ $= - 9 + 9$ $= 0$ L'effort normal est nul dans le tronçon [2 ; 7]

Diagramme de l'effort normal.



V) Caractéristiques géométriques des sections

1) Centre de gravité

a) Généralités.

- Dans les ouvrages BTP, on peut rencontrer plusieurs types de sections pour les différents matériaux de construction.
- Chaque section a des caractéristiques géométriques qui le distinguent des autres sections.
- Le choix d'une section est basé sur la détermination de ces caractéristiques selon les qualités recherchées.
- Le calcul de ces caractéristiques est indispensable pour dimensionner ou vérifier une section.
- Une section peut être simple (Section rectangulaire par exemple) ou composée (Section en T par exemple).

b) Définition

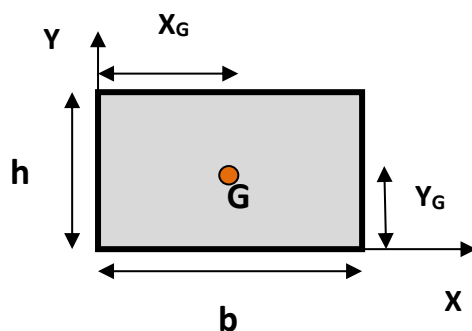
Le centre de gravité d'un corps est le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur, sur toutes les parties de ce corps.

Lorsqu'une figure a un axe de symétrie, diamètre ou centre, le centre de gravité se situe sur cet élément.

Le centre de gravité comme étant une caractéristique géométrique n'appartient pas forcément à la section (cas d'une section creuse)

c) Centre de gravité des sections simples

i) Section rectangulaire pleine



Position du centre de gravité :

$$X_G = b/2 \quad Y_G = h/2$$

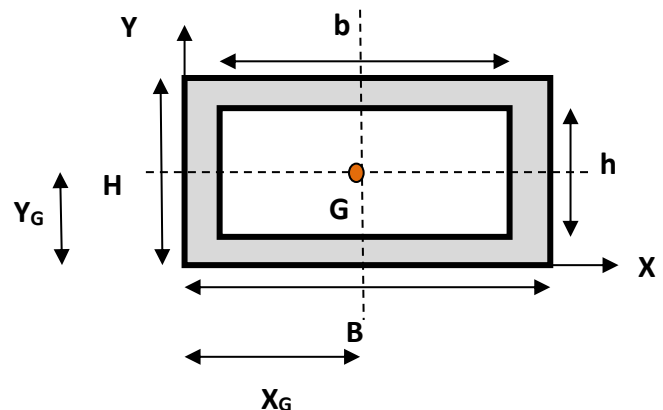
La fibre la plus éloignée de G.

$$Y_{\max} = h/2$$

$$\text{Surface : } S = b \cdot h$$

Si $b = h$ (la section est dite carrée)

ii) Section rectangulaire creuse



Position du centre de gravité :

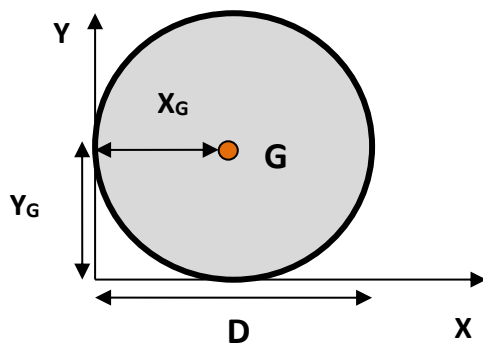
$$X_G = B/2 \quad Y_G = H/2$$

La fibre la plus éloignée de G.

$$Y_{\max} = H/2$$

$$\text{Surface: } S = B \cdot H - b \cdot h$$

iii) Section circulaire pleine



Position du centre de gravité :

$$X_G = D/2 \quad Y_G = D/2$$

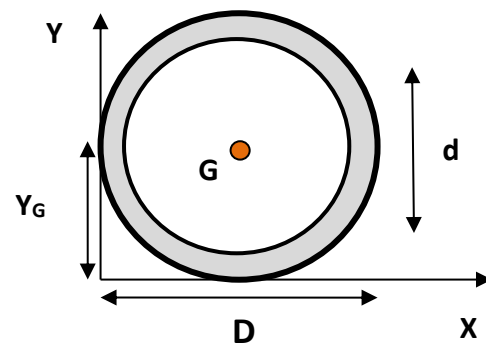
La fibre la plus éloignée de G.

$$Y_{\max} = D/2$$

Surface :

$$S = \pi D^2/4$$

iv) Section circulaire creuse



Position du centre de gravité :

$$X_G = D/2 \quad Y_G = D/2$$

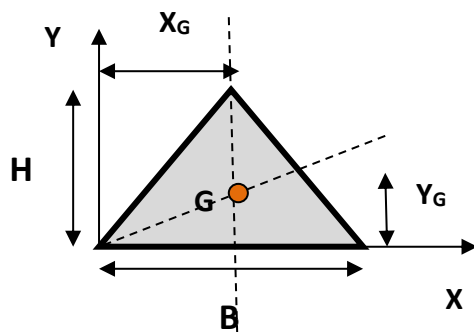
La fibre la plus éloignée de G.

$$Y_{\max} = D/2$$

Surface :

$$S = (\pi D^2/4) - (\pi d^2/4)$$

v) Section triangulaire isocèle



Position du centre de gravité :

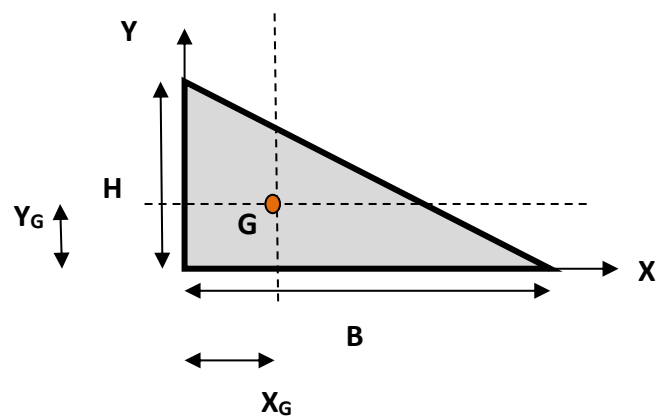
$$X_G = B/2 \quad Y_G = H/3$$

La fibre la plus éloignée de G.

$$Y_{\max} = 2H/3$$

Surface: $S = BxH/2$

vi) Section triangulaire



Position du centre de gravité :

$$X_G = B/3 \quad Y_G = H/3$$

La fibre la plus éloignée de G.

$$Y_{\max} = 2H/3$$

Surface: $S = BxH / 2$

d) Détermination du centre de gravité des sections composées.

Les sections des éléments d'une construction ne sont pas toutes de formes géométriques simples, il est toutefois possible par décomposition des surfaces complexes en surfaces simples d'en chercher le centre de gravité.

Démarche à suivre :

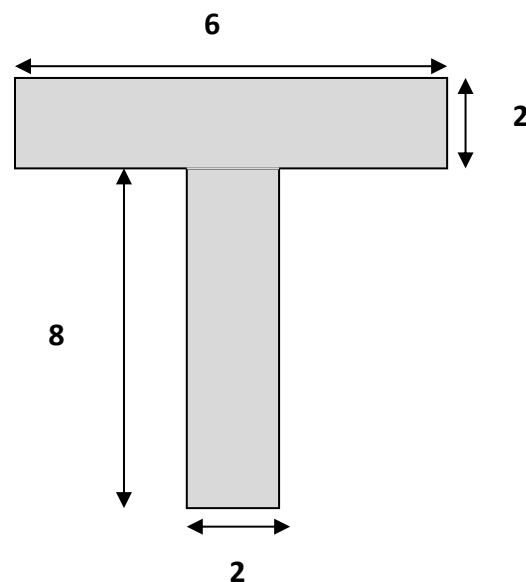
- 1) Décomposer la section complexe en sections simples dont les centres de gravité sont connus.
- 2) Choisir un point repère et les axes X et Y.
- 3) Déterminer les positions des centres de gravité de toutes les sections (X_{Gi} et Y_{Gi}) dans le repère (x,y).
- 4) Calculer la surface de chaque section (S_i)
- 5) En utilisant la formule ci-dessous, on peut calculer la position du centre de gravité de la section composée.

$$X_G = \frac{\sum X_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

Exemple 1 : section en T.

Soit à déterminer le centre de gravité de la section composée sous forme de T représentée sur la figure suivante :

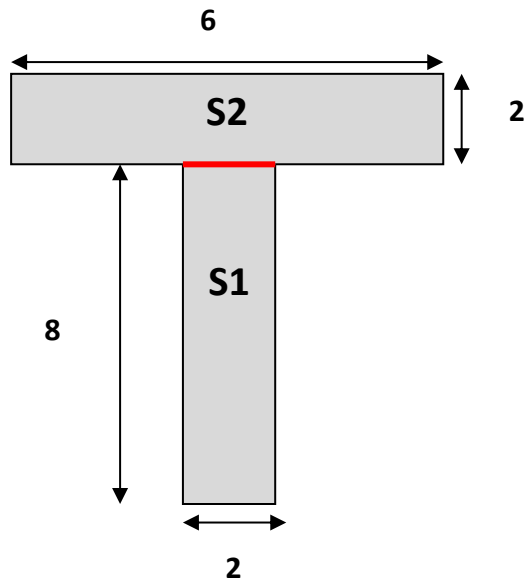


Les dimensions sont en cm

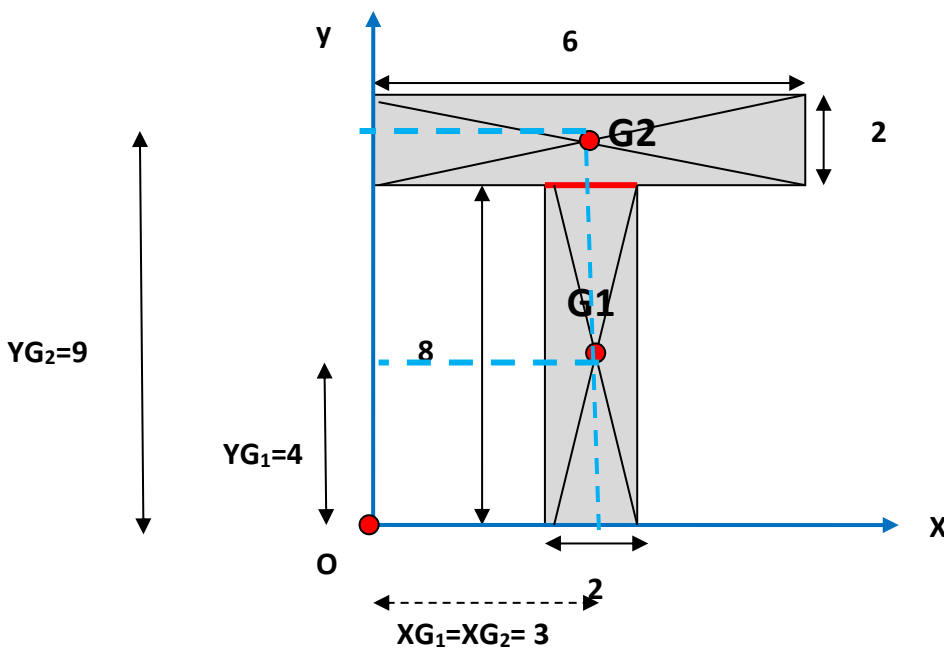
Cette section admet un axe de symétrie, ce dernier passe par le centre de gravité de la section.

Appliquons la démarche exposée dans la partie précédente pour déterminer le centre de gravité de la section :

Etape 1 : Décomposition de la section composée en sections simples (deux sections rectangulaires)



Etape 2: Choix d'un point repère et les axes X et Y et détermination du centre de gravité des sections simples.



Pour déterminer les coordonnées des centres de gravité des sections, on projette sur les axes X et Y et on calcule la distance entre chaque projection et le point repère O .

Etape 3: Détermination des coordonnées des centres de gravité des sections + Calcul des surfaces des sections (Pour cette étape, on tracera un tableau récapitulatif)

	Surface Si	XGi	YGi	XGi.Si	YGi.Si
Section 1	8x2 = 16	3	4	3x16=48	4x16=64
Section 2	6x2 = 12	3	9	3x12=36	9x12=108
Somme	16+12 = 28			48+36 = 84	64+108 = 172

$$\sum Si$$

$$\sum XGi . Si$$

$$\sum YGi . Si$$

La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

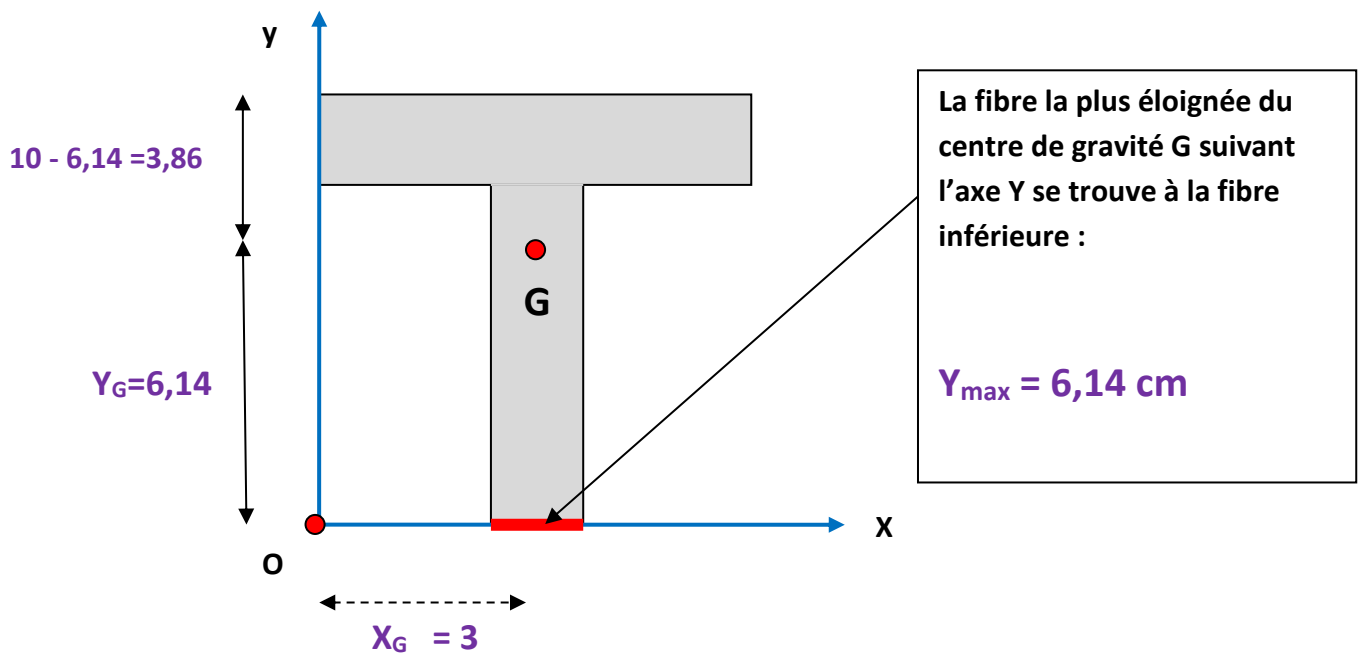
$$X_G = \frac{\sum XGi \cdot Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{84}{28} = 3 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum YGi \cdot Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{172}{28} = 6,14 \text{ cm}$$

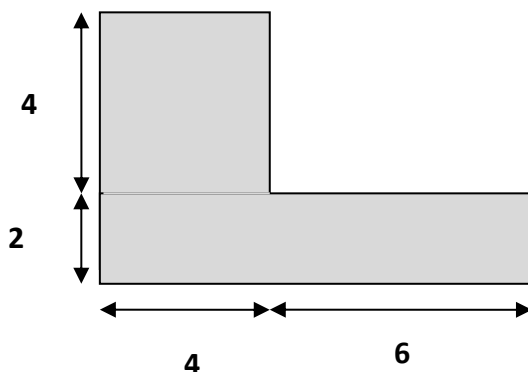
Représentation du centre de gravité :



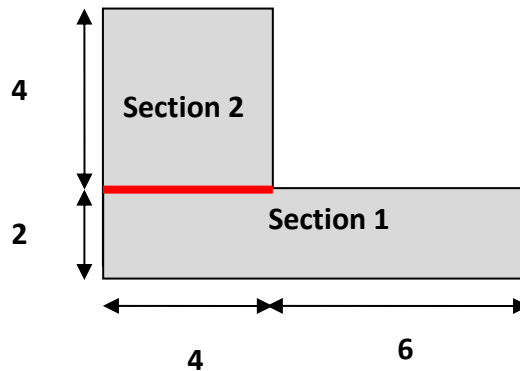
e) Exercices d'application.

Exercice 1 : section en L (Cornière).

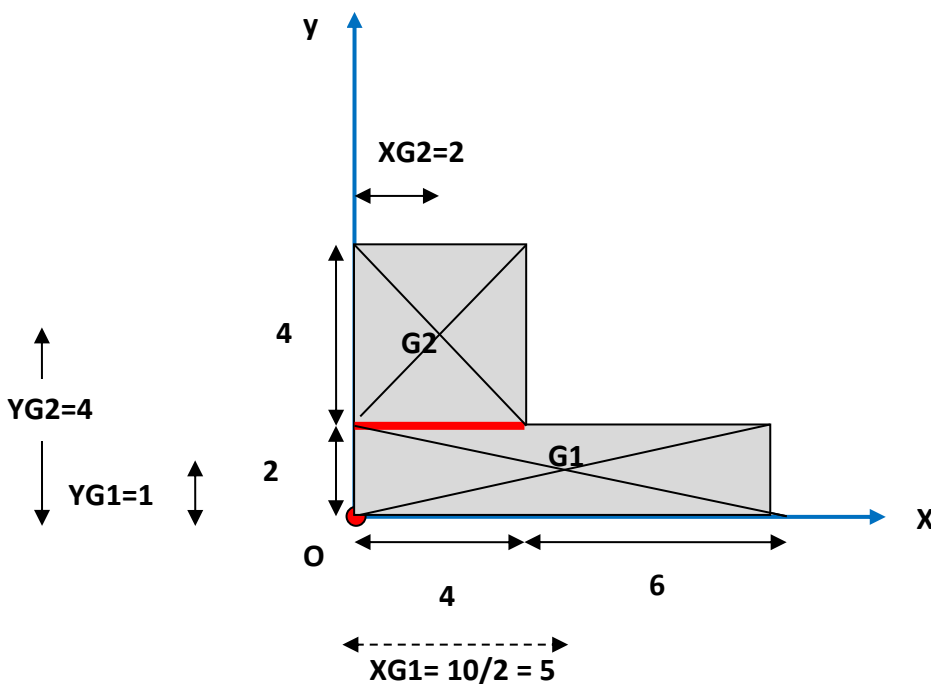
Soit à déterminer le centre de gravité de la section composée sous forme de L représentée sur la figure suivante :



Etape 1 : Décomposition de la section composée en sections simples (deux sections rectangulaires)



Etape 2: Choix d'un point repère et les axes X et Y et détermination du centre de gravité des sections simples



Etape 3: Détermination des coordonnées des centres de gravité des sections + Calcul des surfaces des sections (Pour cette étape, on tracera un tableau récapitulatif)

	Surface S_i	X_{G_i}	Y_{G_i}	$X_{G_i} \cdot S_i$	$Y_{G_i} \cdot S_i$
Section 1	$10 \times 2 = 20$	5	1	$5 \times 20 = 100$	$1 \times 20 = 20$
Section 2	$4 \times 4 = 16$	2	4	$2 \times 16 = 32$	$4 \times 16 = 64$
Somme	$16 + 20 = 36$			$100 + 32 = 132$	$20 + 64 = 84$

$\sum S_i$

$\sum X_{G_i} \cdot S_i$

$\sum Y_{G_i} \cdot S_i$

La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

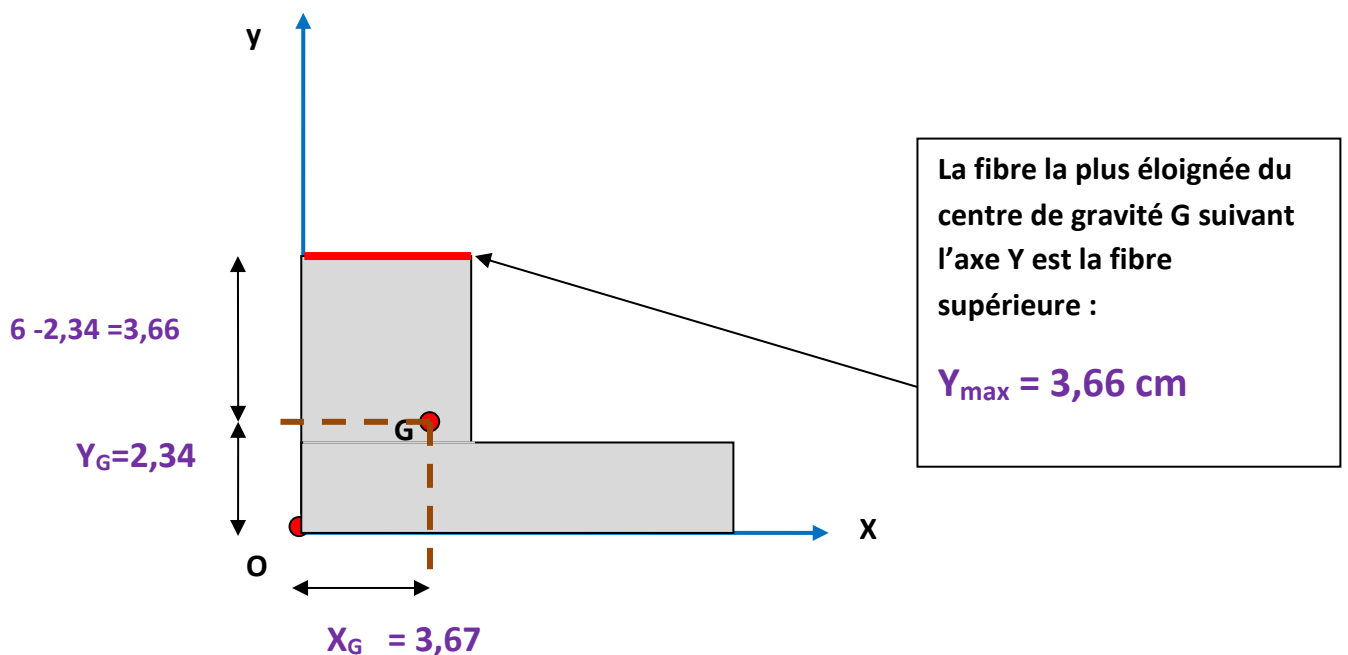
$$X_G = \frac{\sum XG_i . Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{132}{36} = 3,67 \text{ cm}$$

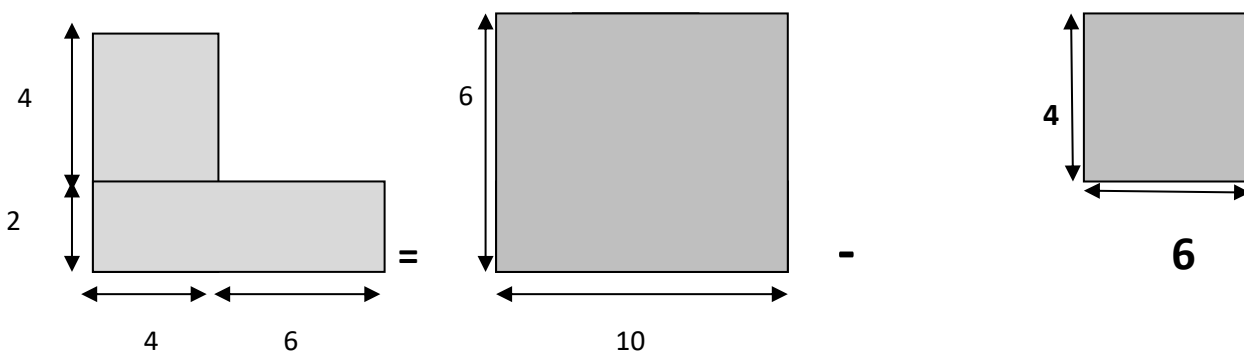
$$Y_G = \frac{\sum YG_i . Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{84}{36} = 2,34 \text{ cm}$$

Représentation du centre de gravité :



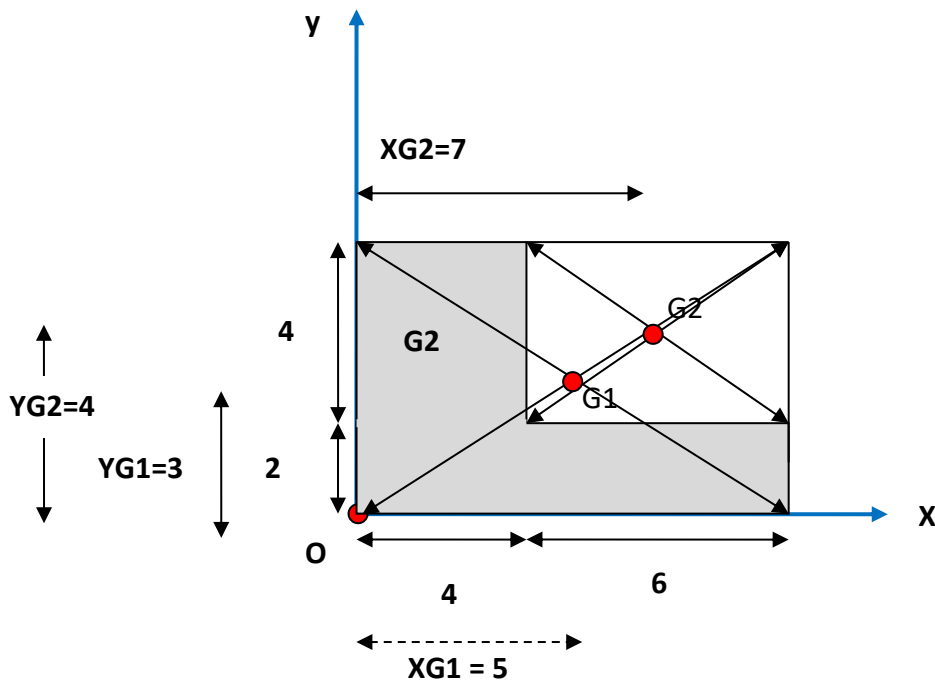
Méthode 2 : On peut considérer la section en L comme étant une déduction d'une petite section rectangulaire de la grande section.



On applique la même démarche pour déterminer le centre de gravité de la section en considérant les deux sections rectangulaires.

La section vide sera comptabilisée par un signe moins (-) dans les formules.

Choix d'un point repère et les axes X et Y et détermination du centre de gravité des sections simples



Détermination des coordonnées des centres de gravité des sections + Calcul des surfaces

	Surface S_i	X_{G_i}	Y_{G_i}	$X_{G_i} \cdot S_i$	$Y_{G_i} \cdot S_i$
Section 1	$10 \times 6 = 60$	5	3	$5 \times 60 = 300$	$3 \times 60 = 180$
Section 2	$6 \times 4 = 24$	7	4	$7 \times 24 = 168$	$4 \times 24 = 96$
Somme	$60 - 24 = 36$			$300 - 168 = 132$	$180 - 96 = 84$

$$\sum S_i$$

$$\sum X_{G_i} \cdot S_i$$

$$\sum Y_{G_i} \cdot S_i$$

La section S2 est prise par un signe négatif car elle s'agit du vide.

La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

$$X_G = \frac{\sum X_{G_i} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$= \frac{132}{36} = 3,67 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum Y_{G_i} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

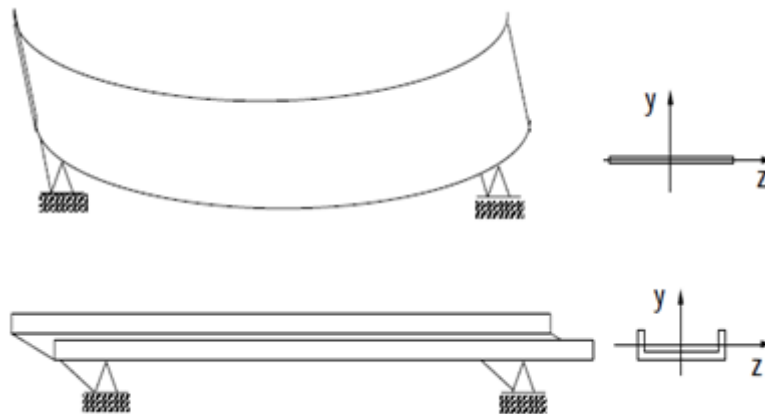
$$= \frac{84}{36} = 2,34 \text{ cm}$$

NB : On trouve les mêmes résultats que ceux de la méthode 1.

2) Moment d'inertie ou moment quadratique.

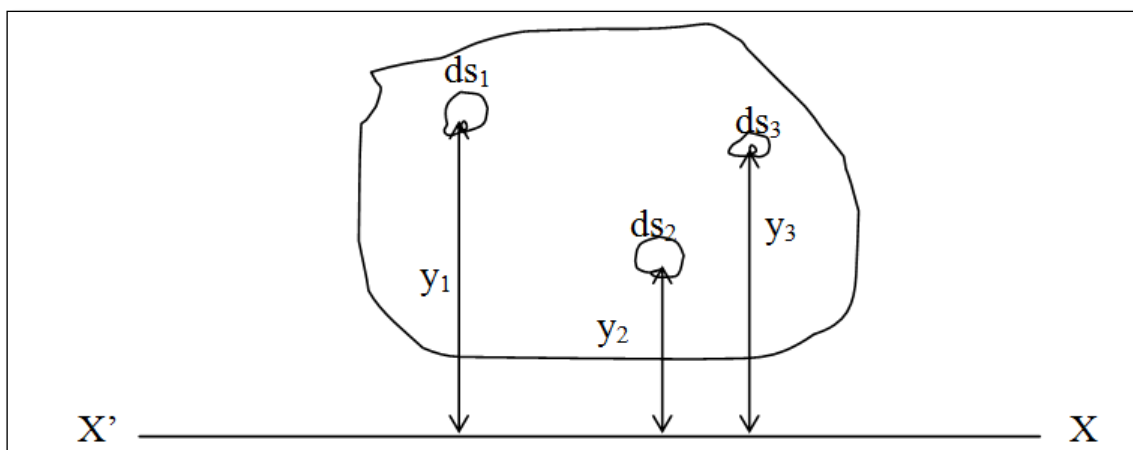
a) Définition

Le moment d'inertie d'une section représente la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale comme le montre l'exemple d'une feuille reposant sur deux appuis dont la déformation sous son poids propre est nettement plus importante que quand elle est pliée en forme de U, car le moment d'inertie I_z de la forme en U est plus grand que celui de la section rectangulaire



Mathématiquement, on appelle moment d'inertie ou moment quadratique de la section S par rapport à l'axe XX' , la somme des produits de tous les éléments infiniment petits composant cette surface par les carrés de leurs distances respectivement à l'axe envisagé, soit :

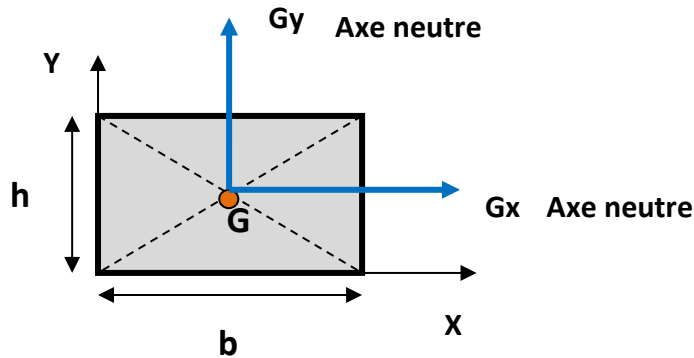
$$I_{XX'} = ds_1 \cdot y_1^2 + ds_2 \cdot y_2^2 + ds_3 \cdot y_3^2 + \dots + ds_n \cdot y_n^2$$



$$I_{XX'} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y^2 ds$$

Remarque :

Les axes passant par le centre de gravité d'une section s'appellent axes neutres G_x (ou G_z) et G_y .



Par simplification, on confondra l'axe G_z avec G_x dans tout ce chapitre.

Unité :

Le moment d'inertie d'une section s'exprime en cm^4 ou mm^4

Signe d'un moment d'inertie :

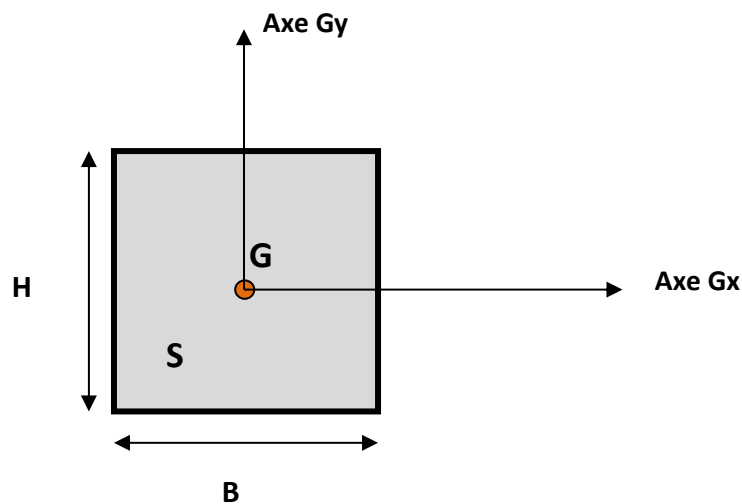
Un moment d'inertie est toujours **positif**.

Les moments d'inertie interviennent dans le *calcul de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale (traction – compression)*.

Les moments d'inertie les plus importants sont les moments par rapport aux axes neutres

b) Moments d'inertie des sections simples

i) section rectangulaire pleine :



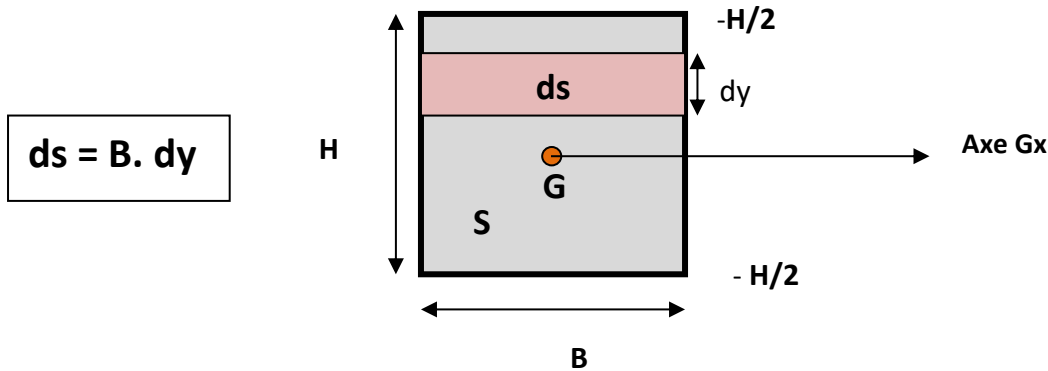
Calculons le moment d'inertie de cette section rectangulaire par rapport à l'axe neutre G_x

D'après la définition du moment d'inertie, on a :

$$IG_x(S) = \int_{y=-H/2}^{y=H/2} y^2 dS$$

y varie entre H/2 et (-H/2)

On prend des sections infiniment petites (ds) de la section rectangulaire



La formule devient :

$$IG_x(S) = \int_{y=-H/2}^{y=H/2} y^2 B dy$$

B est une constante, elle peut sortir à l'extérieur de l'intégrale

$$IG_x(S) = B \cdot \int_{y=-H/2}^{y=H/2} y^2 \cdot dy$$

La fonction primitive de la fonction y^2 est : $1/3 y^3$, alors :

$$IG_x(S) = B \cdot \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-H/2}^{H/2} = \frac{B}{3} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^3 - \left(\frac{-H}{2} \right)^3 \right]$$

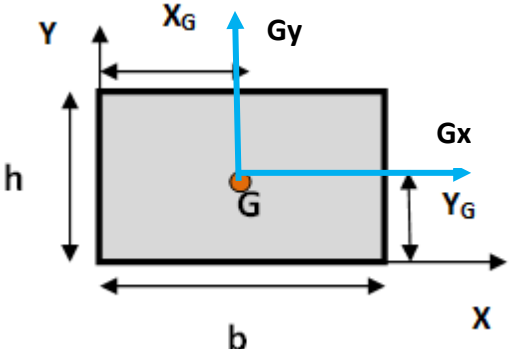
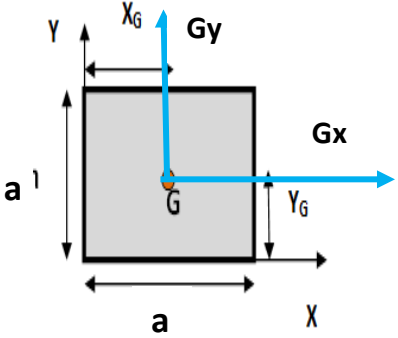
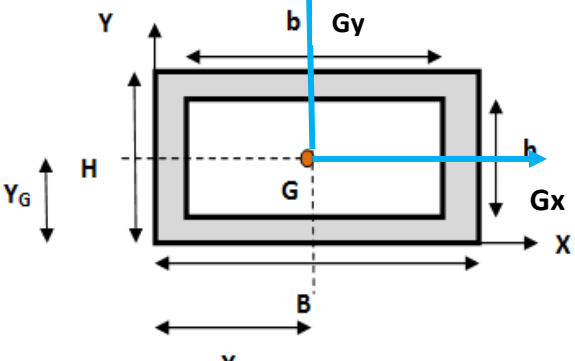
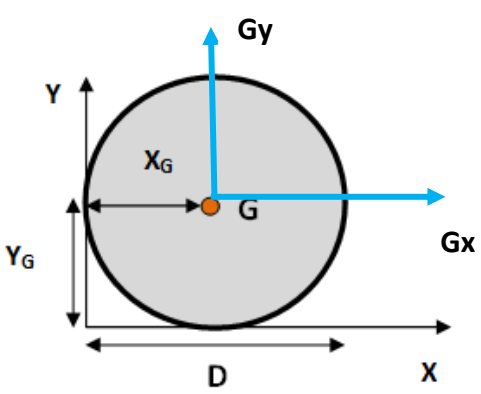
$$= \frac{B}{24} [(H)^3 + (H)^3]$$

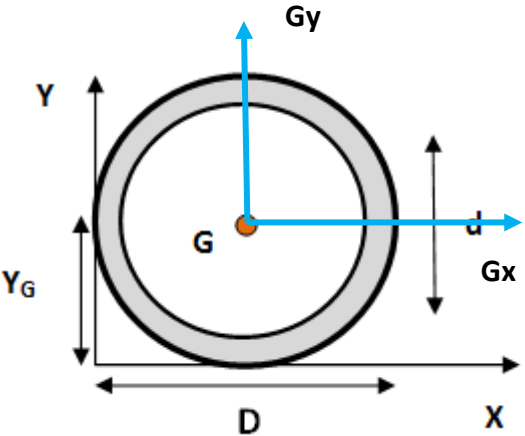
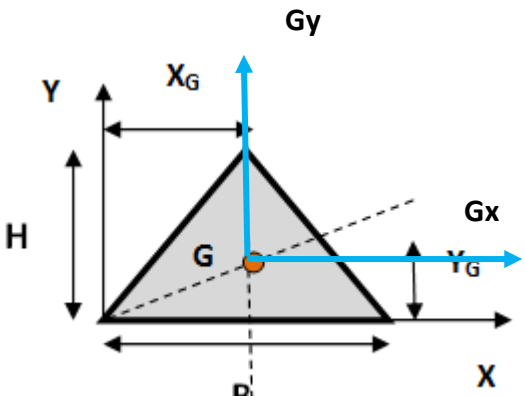
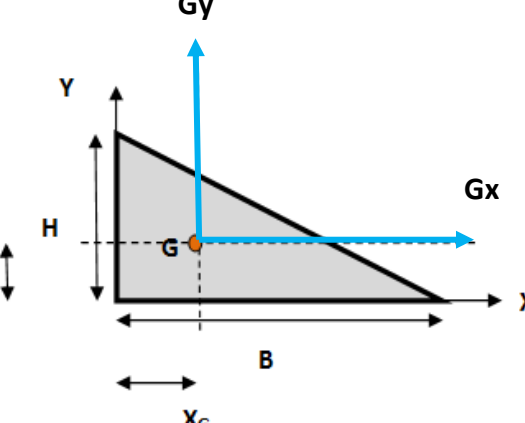
$$IG_x(S) = \frac{BH^3}{12}$$

Alors, le moment d'inertie d'une section rectangulaire par rapport à l'axe neutre Gx s'exprime par la formule $BH^3/12$

De la même façon, on peut démontrer que $IG_y = HB^3/12$

ii) Moment d'inertie des sections simples par rapport à leurs axes neutres :

Section simple	Position du CDG (G)	Moment d'inertie par rapport à Gx	Moment d'inertie par rapport à Gy
	$X_G = b/2$ $Y_G = h/2$	$I_{Gx} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$
	$X_G = a/2$ $Y_G = a/2$	$I_{Gx} = \frac{a^4}{12}$	$I_{Gy} = \frac{a^4}{12}$
	$X_G = B/2$ $Y_G = H/2$	$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{HB^3 - hb^3}{12}$
	$X_G = D/2$ $Y_G = D/2$	$I_{Gx} = \frac{\pi D^4}{64}$	$I_{Gy} = \frac{\pi D^4}{64}$

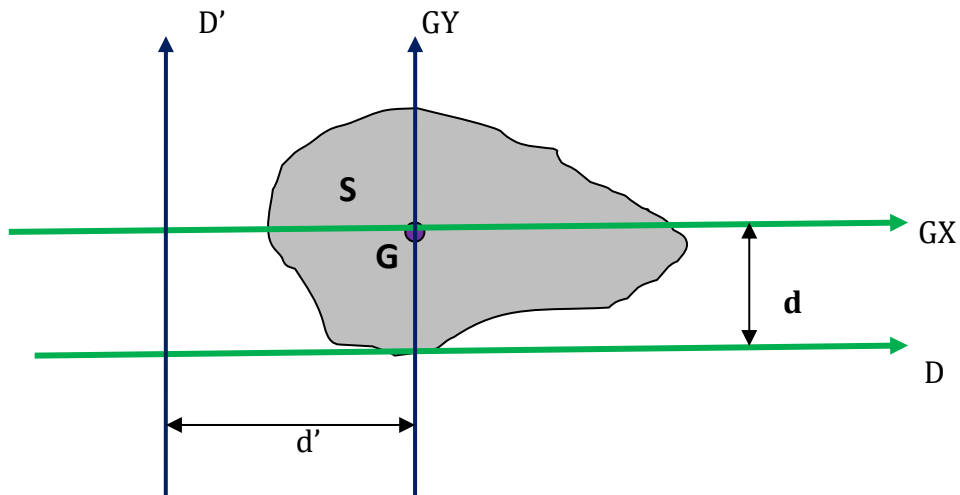
Section simple	Position du CDG (G)	Moment d'inertie par rapport à Gx	Moment d'inertie par rapport à Gy
	$X_G = D/2$ $Y_G = D/2$	$\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$
	$X_G = B/2$ $Y_G = H/3$	$I_{Gx} = \frac{BH^3}{36}$	$I_{Gy} = \frac{HB^3}{48}$
	$X_G = B/3$ $Y_G = H/3$	$I_{Gx} = \frac{BH^3}{36}$	$I_{Gy} = \frac{HB^3}{36}$

c) Théorème de HYGENS :

On peut déduire le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe (D) quelconque à partir du moment d'inertie par rapport à l'axe neutre parallèle

Ce moment est égal à la somme :

- Du moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe neutre parallèle
- Du produit de l'aire de la surface par le carré de la distance des deux axes.



D'après le **Théorème de HYGENS** :

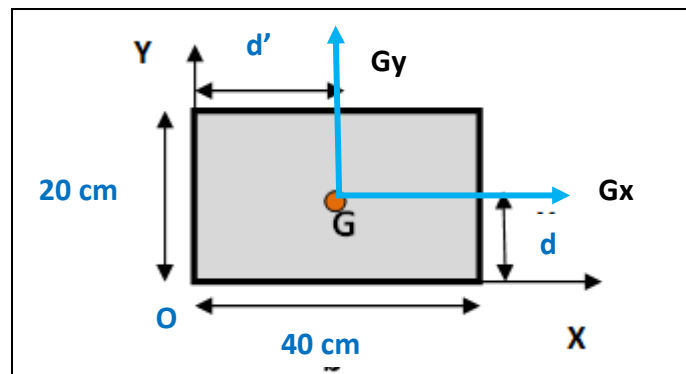
$$I_D (S) = I_{GX} (S) + (S \cdot d^2)$$

$$I_{D'} (S) = I_{GY} (S) + (S \cdot d'^2)$$

S : surface totale de la section

Exemple :

Calculer les moments d'inertie par rapport aux axes GX, OX, GY, et OY de la section rectangulaire représentée sur la figure suivante :



On a : $I_{GX} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \times 20^3}{12} = 26666,67 \text{ cm}^4$

On a : $I_{GY} = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \times 40^3}{12} = 106666,67 \text{ cm}^4$

D'après le **Théorème de HYGENS** :

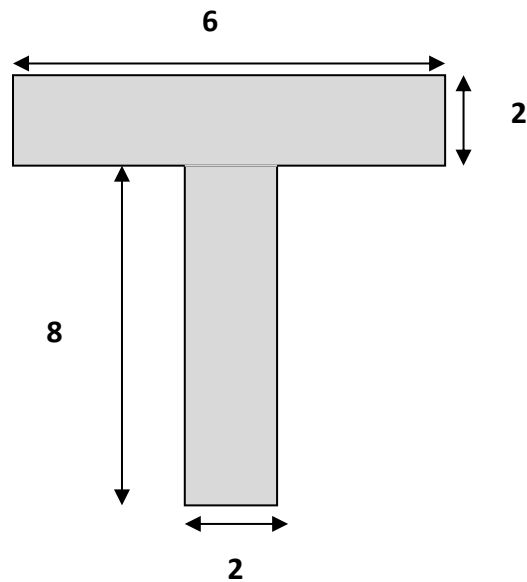
On a : $I_{OX} = I_{GX} + Sd^2 = 26666,67 + (20 \times 40) \times 10^2 = 106666,67 \text{ cm}^4$

Et On a : $I_{OY} = I_{GY} + Sd'^2 = 106666,67 + (20 \times 40) \times 20^2 = 426666,67 \text{ cm}^4$

d) Détermination du moment d'inertie des sections composées

Exemple : Section en T.

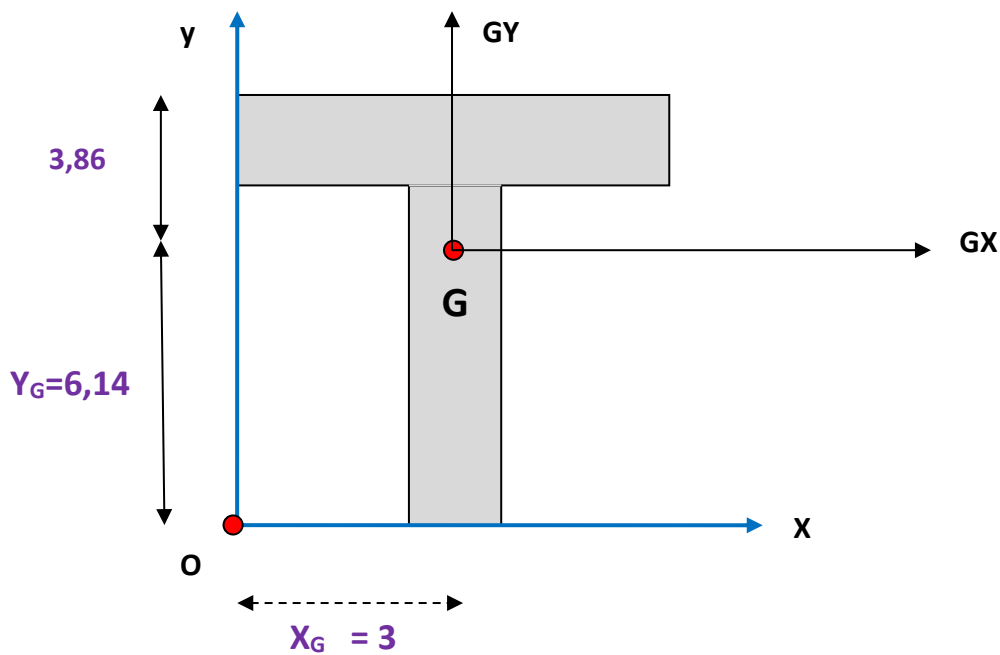
Reprenons l'exemple de la section composée représentée sur la figure suivante et qui est déjà traitée dans la partie : CDG des sections composées :



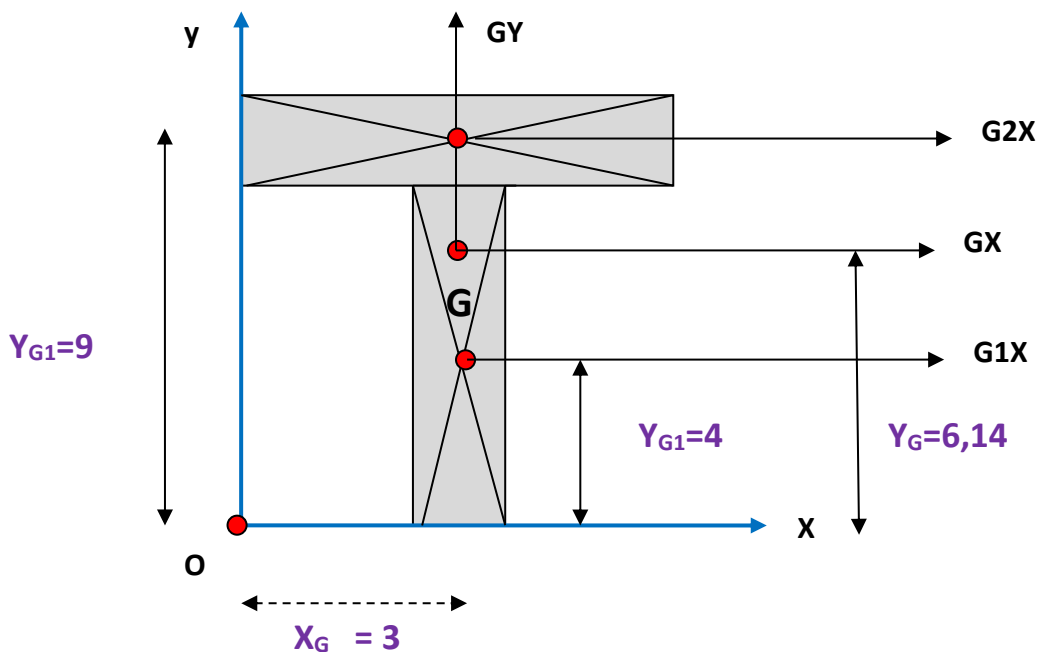
Les dimensions sont en cm

La détermination de la position du centre de gravité de cette section nous a donné :

$$X_G = \frac{84}{28} = 3\text{cm} \quad \text{et} \quad Y_G = 6,14\text{ cm}$$



Calculons le moment d'inertie de la section en T par rapport aux axes neutres Gx et Gy.



Calcul du moment d'inertie de la section en T par rapport à l'axe Gx.

On a : $I_{Gx} (S) = I_{Gx} (S1) + I_{Gx} (S2)$

D'après le Théorème de HYGENS, On a : $I_{Gx} (S1) = I_{G1x} (S1) + S1d^2$

Avec : d = distance entre les axes Gx et G1x = (YG - YG1)

De même: $I_{Gx} (S2) = I_{G2x} (S2) + S2d^2$

Avec : d = distance entre les axes Gx et G2x = (YG - YG2)

D'où : $I_{Gx} (S) = I_{G1x} (S1) + S1(YG - YG1)^2 + I_{G2x} (S2) + S2(YG - YG2)^2$

$$= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1) (YG - YG1)^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2) (YG - YG2)^2$$

$$= \frac{2 \times 8^3}{12} + (2 \times 8) (6,14 - 4)^2 + \frac{6 \times 2^3}{12} + (2 \times 6) (6,14 - 9)^2$$

$I_{Gx} (S) = 260,76 \text{ cm}^4$

Calcul du moment d'inertie de la section en T par rapport à l'axe Gy.

On a : $I_{Gy} (S) = I_{Gy} (S1) + I_{Gy} (S2)$

D'après le Théorème de HYGENS, On a : $I_{Gy} (S1) = I_{G1y} (S1) + S1d^2$

Avec : d = distance entre les axes Gy et G1Y = (XG - XG1) = 0 (car les axes sont confondus)

De même: $I_{GY} (S2) = I_{G2Y} (S2) + S_2d^2$

Avec : d = distance entre les axes GY et G2Y = (XG - XG2) = 0 (car les axes sont confondus)

D'où : $I_{GY} (S) = I_{G1Y} (S1) + S_1(XG - XG1)^2 + I_{G2Y} (S2) + S_2(XG - XG2)^2$

$$= \frac{h_1(b_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1) (XG - XG1)^2 + \frac{h_2(b_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2) (XG - XG2)^2$$

$$= \frac{8 \times 2^3}{12} + (2 \times 8) (3 - 3)^2 + \frac{2 \times 6^3}{12} + (2 \times 6) (3 - 3)^2$$

$$I_{GY} (S) = 41,33 \text{ cm}^4$$

On peut calculer aussi les moments d'inertie de la section par rapport aux axes Ox et Oy en utilisant le [Théorème de HYGENS](#)

$$I_{OX} (S) = I_{GX} (S) + Sd^2 = I_{GX} (S) + S.Y_G^2$$

Avec : d = distance entre les axes OX et GX = YG

$$I_{OY} (S) = I_{GY} (S) + Sd^2 = I_{GY} (S) + S.X_G^2$$

Avec : d = distance entre les axes OY et GY = XG

Application numérique :

$$I_{OX} (S) = I_{GX} (S) + S.Y_G^2 = 260,76 + 28 \times 6,14^2 = 1316,34 \text{ cm}^4$$

$$I_{OY} (S) = I_{GY} (S) + S.X_G^2 = 41,33 + 28 \times 3^2 = 239,33 \text{ cm}^4$$

Cas général :

Pour déterminer le moment d'inertie d'une section composée, on commence d'abord par la détermination de la position du centre de gravité de la section (XG , YG).

On peut facilement calculer les moments d'inertie par rapport aux axes neutres en utilisant les formules suivantes :

$$I_{GX} (S) = \sum [(I_{GiX} (S_i) + S_i(Y_G - Y_{Gi})^2)]$$

$$I_{GY} (S) = \sum [(I_{GiY} (S_i) + S_i(X_G - X_{Gi})^2)]$$

e) Module d'inertie d'une section.

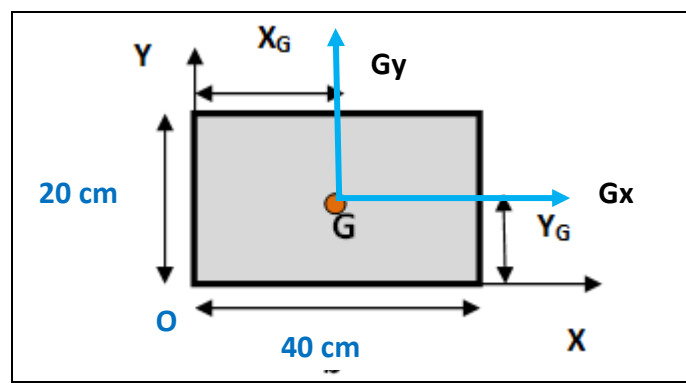
Le module d'inertie d'une section est une caractéristique qui caractérise sa capacité à résister aux déformations latérales.

Il est défini par la formule suivante :

$$MI(S) = \frac{IGX(S)}{Y_{max}}$$

Exemple :

Calculer le module d'inertie par rapport à l'axe GX de la section rectangulaire représentée sur la figure suivante :



On a : $I_{GX} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \times 20^3}{12} = 26666,67 \text{ cm}^4$

$Y_{max} = 10 \text{ cm}$

$$MIGX(S) = \frac{IGX(S)}{Y_{max}} = \frac{26666,67}{10} = 2666,67 \text{ cm}^3$$

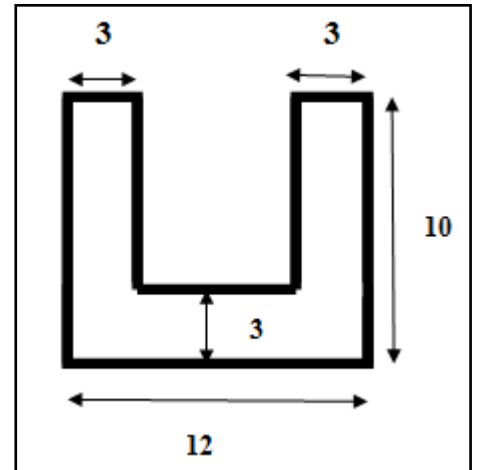
Le module d'inertie est utilisé pour calculer la contrainte maximale de flexion dans une section donnée

3) Exercices d'application : Détermination des caractéristiques géométriques des sections

Exercice 1 : On considère la section en U représentée sur la figure suivante :

- 1) Déterminer et représenter la position du centre de gravité de la section.
- 2) Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres.
- 3) Calculer le module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

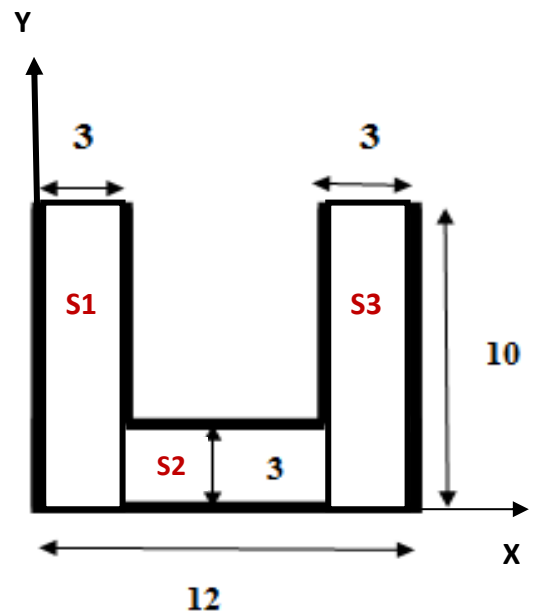
Les dimensions sont en cm



Solution (Exercice 1)

- 1) Détermination de la position du centre de gravité de la section.

	Surface Si	XGi	YGi	XGi.Si	YGi.Si
Section 1	3x10 = 30	1,5	5	1,5x30=45	5x30=150
Section 2	3x6 = 18	6	1,5	6x18=108	1,5x18=27
Section 3	3x10 = 30	10,5	5	10,5x30=315	5x30=150
Somme	78			468	327



La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

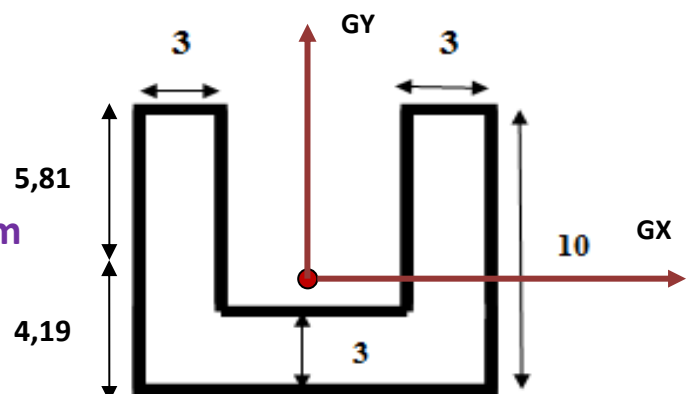
$$X_G = \frac{\sum XGi .Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{468}{78} = 6 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum YGi .Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{327}{78} = 4,19 \text{ cm}$$

$$Y_{\max} = 5,81 \text{ cm}$$



2) Calcul des moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres

On peut facilement calculer les moments d'inertie par rapport aux axes neutres en utilisant les formules suivantes :

$$I_{GX} (S) = \sum [(I_{GiX} (S_i) + S_i(Y_G - Y_{Gi})^2)]$$

$$I_{GY} (S) = \sum [(I_{GiY} (S_i) + S_i(X_G - X_{Gi})^2)]$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_{GX} (S) &= I_{G1X} (S1) + S_1(Y_G - Y_{G1})^2 + I_{G2X} (S2) + S_2(Y_G - Y_{G2})^2 + I_{G3X} (S3) + S_3(Y_G - Y_{G3})^2 \\ &= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(Y_G - Y_{G1})^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(Y_G - Y_{G2})^2 + \frac{b_3(h_3)^3}{12} + (b_3 \times h_3)(Y_G - Y_{G3})^2 \\ &= \frac{3 \times 10^3}{12} + (3 \times 10) (4,19 - 5)^2 + \frac{6 \times 3^3}{12} + (6 \times 3) (4,19 - 1,5)^2 + \frac{3 \times 10^3}{12} + (3 \times 10)(4,19 - 5)^2 \\ I_{GX} (S) &= 648,12 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} I_{GY} (S) &= I_{G1Y} (S1) + S_1(X_G - X_{G1})^2 + I_{G2Y} (S2) + S_2(X_G - X_{G2})^2 + I_{G3Y} (S3) + S_3(X_G - X_{G3})^2 \\ &= \frac{h_1(b_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(X_G - X_{G1})^2 + \frac{h_2(b_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(X_G - X_{G2})^2 + \frac{h_3(b_3)^3}{12} + (b_3 \times h_3)(X_G - X_{G3})^2 \\ &= \frac{10 \times 3^3}{12} + (3 \times 10) (6 - 1,5)^2 + \frac{3 \times 6^3}{12} + (6 \times 3) (6 - 6)^2 + \frac{10 \times 3^3}{12} + (3 \times 10)(6 - 10,5)^2 \\ I_{GY} (S) &= 1314 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

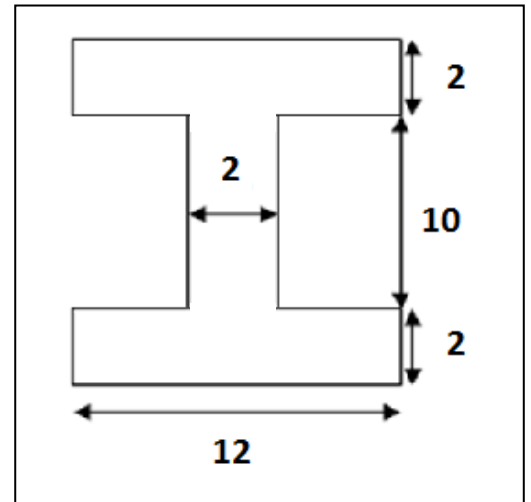
3) Calcul du module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

$$MIGX(S) = \frac{IGX(S)}{Y_{max}} = \frac{648,12}{5,81} = 111,55 \text{ cm}^3$$

Exercice 2 : On considère la section en I (double té) représentée sur la figure suivante :

- 1) Déterminer et représenter la position du centre de gravité de la section.
- 2) Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres.
- 3) Calculer le module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

Les dimensions sont en cm



Y

Solution (Exercice 2)

- 1) Détermination de la position du centre de gravité de la section.

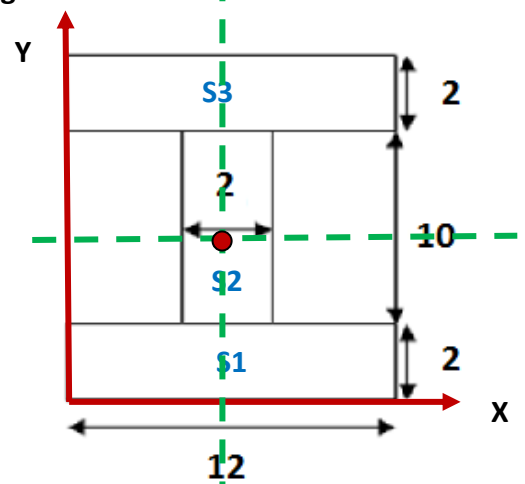
La section admet deux axes de symétrie, alors son centre de gravité se situe au point d'intersection des deux axes.

D'où :

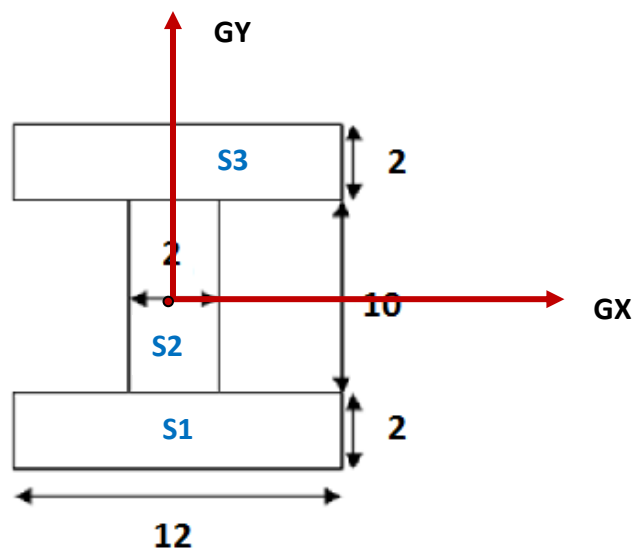
$$X_G = 6 \text{ cm}$$

$$Y_G = 7 \text{ cm}$$

$$Y_{\max} = 7 \text{ cm}$$



- 1) Calcul des moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres



On peut facilement calculer les moments d'inertie par rapport aux axes neutres en utilisant les formules suivantes :

$$I_{GX}(S) = \sum [(I_{GiX}(S_i) + S_i(Y_G - Y_{Gi})^2)]$$

$$I_{GY}(S) = \sum [(I_{GiY}(S_i) + S_i(X_G - X_{Gi})^2)]$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_{GX}(S) &= I_{G1X}(S1) + S_1(Y_G - Y_{G1})^2 + I_{G2X}(S2) + S_2(Y_G - Y_{G2})^2 + I_{G3X}(S3) + S_3(Y_G - Y_{G3})^2 \\ &= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(Y_G - Y_{G1})^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(Y_G - Y_{G2})^2 + \frac{b_3(h_3)^3}{12} + (b_3 \times h_3)(Y_G - Y_{G3})^2 \\ &= \frac{12 \times 2^3}{12} + (2 \times 12) (7 - 1)^2 + \frac{2 \times 10^3}{12} + (2 \times 10) (7 - 7)^2 + \frac{12 \times 2^3}{12} + (2 \times 12)(7 - 13)^2 \\ I_{GX}(S) &= 1910,67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} I_{GY}(S) &= I_{G1Y}(S1) + S_1(X_G - X_{G1})^2 + I_{G2Y}(S2) + S_2(X_G - X_{G2})^2 + I_{G3Y}(S3) + S_3(X_G - X_{G3})^2 \\ &= \frac{h_1(b_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(X_G - X_{G1})^2 + \frac{h_2(b_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(X_G - X_{G2})^2 + \frac{h_3(b_3)^3}{12} + (b_3 \times h_3)(X_G - X_{G3})^2 \\ &= \frac{2 \times 12^3}{12} + (2 \times 12) (6 - 6)^2 + \frac{10 \times 2^3}{12} + (2 \times 10) (6 - 6)^2 + \frac{2 \times 12^3}{12} + (3 \times 10)(6 - 6)^2 \\ I_{GY}(S) &= 582,67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

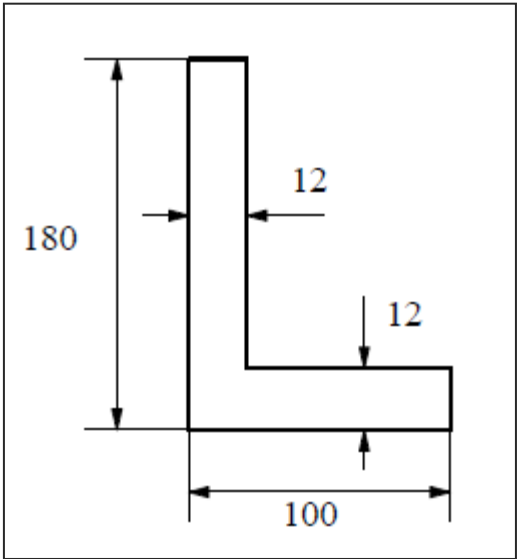
2) Calcul du module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

$$MIGX(S) = \frac{IGX(S)}{Y_{max}} = \frac{1910,67}{7} = 272,96 \text{ cm}^3$$

Exercice 3 : On considère la section en L représentée sur la figure suivante :

- 1) Déterminer et représenter la position du centre de gravité de la section.
- 2) Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres.
- 3) Calculer le module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

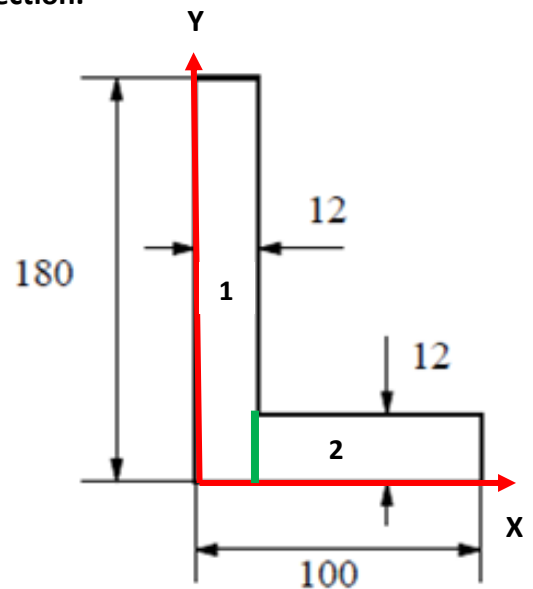
Les dimensions sont en mm



Solution (Exercice 3)

1) Détermination de la position du CDG de la section.

	Surface Si	XGi	YGi	XGi.Si	YGi.Si
Section 1	12x180 = 2160	6	90	2160x6= 12960	90x2160= 194400
Section 2	12x88 = 1056	56	6	1056x56= 59136	6x1056= 6336
Somme	3216			72056	200736



La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

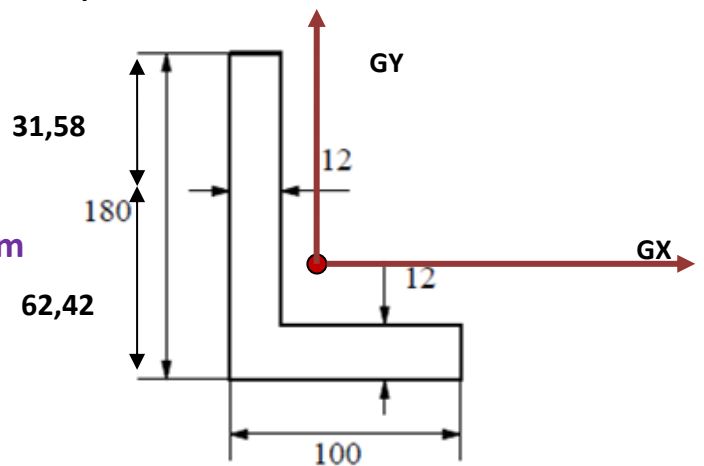
$$X_G = \frac{\sum X_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$= \frac{72056}{3216} = 22,41 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$= \frac{200736}{3216} = 62,42 \text{ mm}$$

$Y_{\max} = 62,42 \text{ mm}$



2) Calcul des moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres

On peut facilement calculer les moments d'inertie par rapport aux axes neutres en utilisant les formules suivantes :

$$I_{GX} (S) = \sum [(I_{GiX} (S_i) + S_i(Y_G - Y_{Gi})^2)]$$

$$I_{GY} (S) = \sum [(I_{GiY} (S_i) + S_i(X_G - X_{Gi})^2)]$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_{GX} (S) &= I_{G1X} (S1) + S1(Y_G - Y_{G1})^2 + I_{G2X} (S2) + S2(Y_G - Y_{G2})^2 \\ &= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(Y_G - Y_{G1})^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(Y_G - Y_{G2})^2 \\ &= \frac{12 \times 180^3}{12} + (12 \times 180) (62,42 - 90)^2 + \frac{88 \times 12^3}{12} + (88 \times 12) (62,42 - 6)^2 \end{aligned}$$

$$I_{GX} (S) = 10849166,34 \text{ mm}^4 = 1084,92 \text{ cm}^4$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} I_{GY} (S) &= I_{G1Y} (S1) + S1(X_G - X_{G1})^2 + I_{G2Y} (S2) + S2(X_G - X_{G2})^2 \\ &= \frac{h_1(b_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(Y_G - Y_{G1})^2 + \frac{h_2(b_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(Y_G - Y_{G2})^2 \\ &= \frac{180 \times 12^3}{12} + (12 \times 180) (22,41 - 6)^2 + \frac{12 \times 88^3}{12} + (12 \times 88) (22,41 - 56)^2 \end{aligned}$$

$$I_{GY} (S) = 2494791,17 \text{ mm}^4 = 249,58 \text{ cm}^4$$

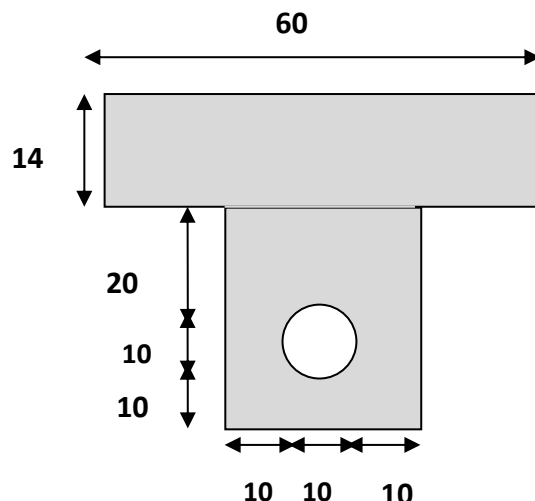
3) Calcul du module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

$$MIGX(S) = \frac{IGX(S)}{Y_{max}} = \frac{1084,92}{6,242} = 173,81 \text{ cm}^3$$

Exercice 4 : On considère la section en T creuse représentée sur la figure suivante :

- 1) Déterminer et représenter la position du centre de gravité de la section.
- 2) Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres.
- 3) Calculer le module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

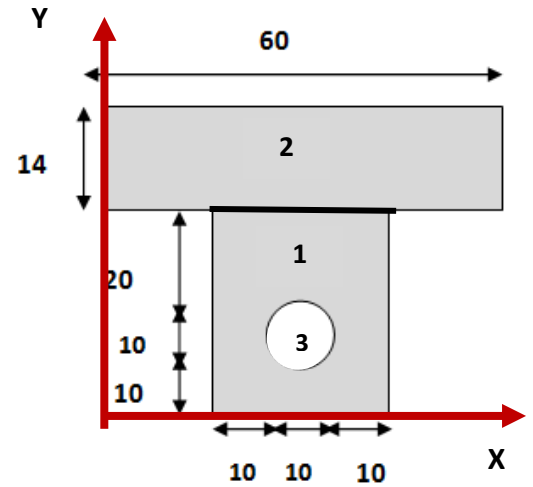
Les dimensions sont en cm



Solution (Exercice 4)

1) Détermination de la position du centre de gravité de la section.

	Surface Si	XGi	YGi	XGi.Si	YGi.Si
Section 1	30x40 = 1200	30	10	30x1200= 36000	10x1200= 12000
Section 2	14x60 = 840	30	47	30x840= 25200	47x840= 39480
Section 3(Vide)	$3,14 \times 10^2 / 4 = 78,5$	30	15	30x78,5= 2355	15x78,5= 1177,5
Somme	1961,5			58845	50302,5



La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

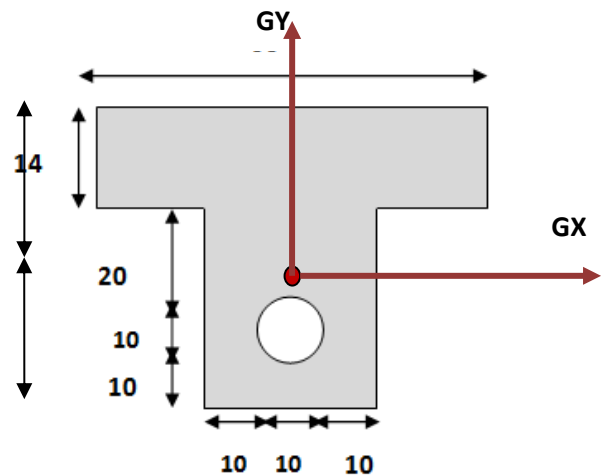
$$X_G = \frac{\sum XGi .Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{58845}{1961,5} = 30 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum YGi .Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{50302,5}{1961,5} = 25,64 \text{ cm}$$

$Y_{\max} = 28,36 \text{ cm}$



2) Calcul des moments d'inertie de la section par rapport aux axes neutres

On peut facilement calculer les moments d'inertie par rapport aux axes neutres en utilisant les formules suivantes :

$$I_{GX} (S) = \sum [(I_{GiX} (Si) + Si(Y_G - Y_{Gi})^2)$$

$$I_{GY} (S) = \sum [(I_{GiY} (Si) + Si(X_G - X_{Gi})^2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 I_{GX}(S) &= I_{G1X}(S1) + S_1(YG - YG_1)^2 + I_{G2X}(S2) + S_2(YG - YG_2)^2 - I_{G3X}(S3) - S_3(YG - YG_3)^2 \\
 &= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(YG - YG_1)^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(YG - YG_2)^2 - \frac{\pi d^4}{64} + \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)(YG - YG_3)^2 \\
 &= \frac{20 \times 40^3}{12} + (30 \times 40)(25,64 - 20)^2 + \frac{60 \times 14^3}{12} + (60 \times 14)(25,64 - 47)^2 - \frac{\pi 10^4}{64} - \left(\frac{\pi 10^2}{4}\right)(25,64 - 15)^2 \\
 I_{GX}(S) &= 532430,27 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
 I_{GY}(S) &= I_{G1Y}(S1) + S_1(XG - XG_1)^2 + I_{G2Y}(S2) + S_2(XG - XG_2)^2 - I_{G3Y}(S3) - S_3(XG - XG_3)^2 \\
 &= \frac{h_1(b_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(XG - XG_1)^2 + \frac{h_2(b_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(XG - XG_2)^2 - \frac{\pi d^4}{64} - \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)(XG - XG_3)^2 \\
 &= \frac{40 \times 20^3}{12} + (30 \times 40)(30 - 30)^2 + \frac{14 \times 60^3}{12} + (60 \times 14)(30 - 30)^2 - \frac{\pi 10^4}{64} - \left(\frac{\pi 10^2}{4}\right)(30 - 30)^2 \\
 I_{GY}(S) &= 278176,04 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

3) Calcul du module d'inertie de la section par rapport à l'axe GX

$$MIGX(S) = \frac{IGX(S)}{Y_{max}} = \frac{532430,27}{28,36} = 18774 \text{ cm}^3$$

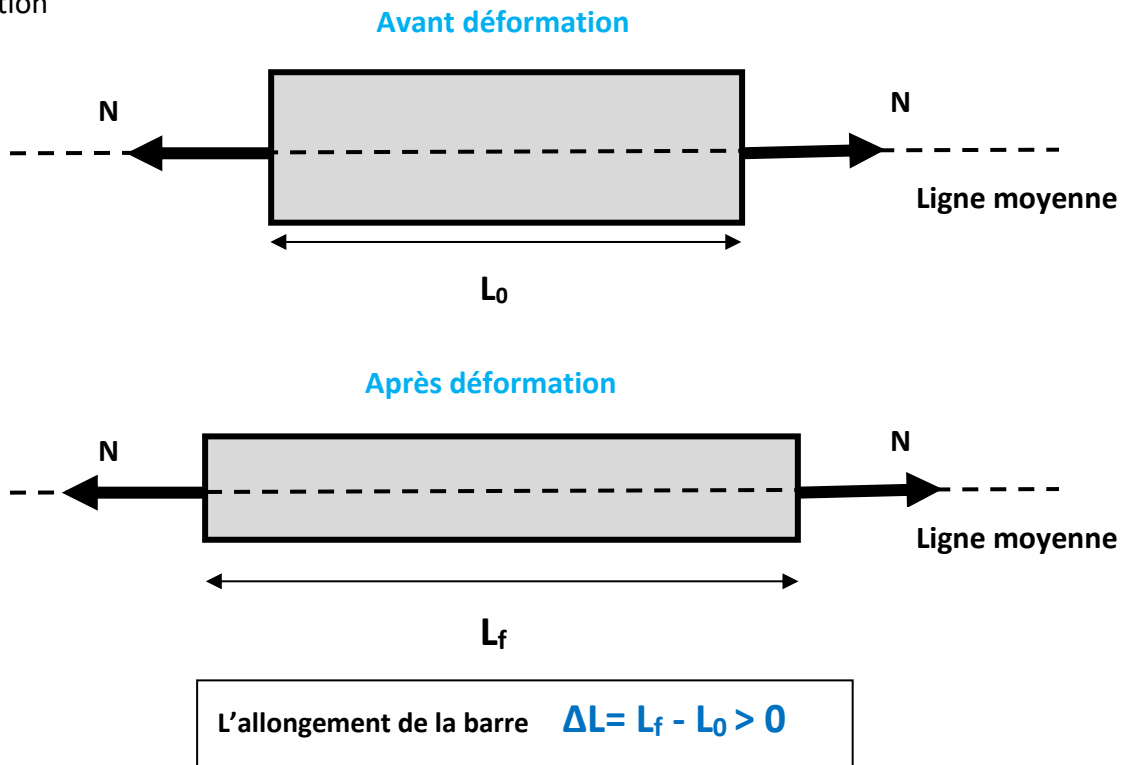
VI) Différentes sollicitations simples

1) Compression et traction.

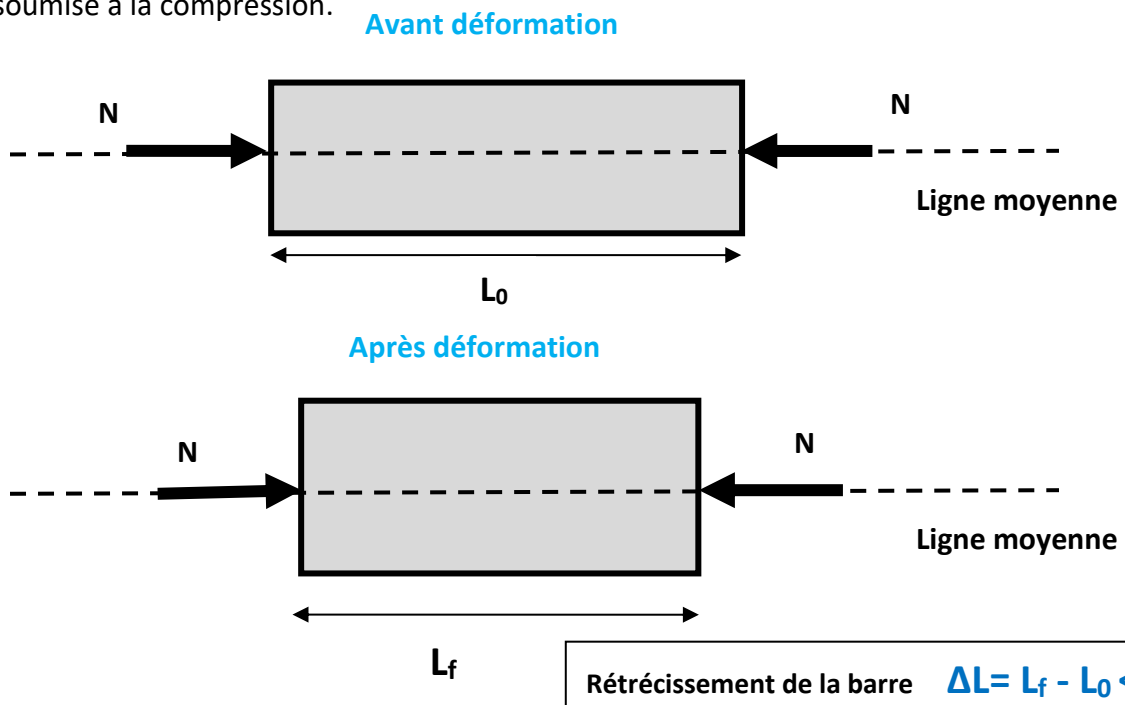
a) Définition

Une barre est dite sollicitée en compression/traction s'elle est soumise à un effort Normal N.

Si l'effort N tend à tendre la barre, on dit qu'elle est soumise à une contrainte de traction



Dans le cas où l'effort normal tend à comprimer la barre, on dit que cette dernière est soumise à la compression.



b) Contrainte normale de compression/traction.

- Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne.
- Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm^2

N : effort normal en N

S : aire de la section droite en mm^2

c) Condition de résistance à la compression/ traction.

Chaque matériau a deux contraintes admissibles à ne pas dépasser :

- Une contrainte admissible à la compression
- Une contrainte admissible à la traction

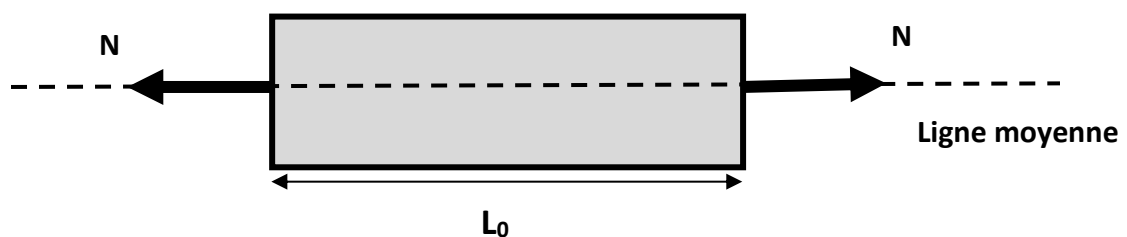
Ces deux résistances admissibles sont déterminées à partir des essais au laboratoire.

d) Essai de Traction

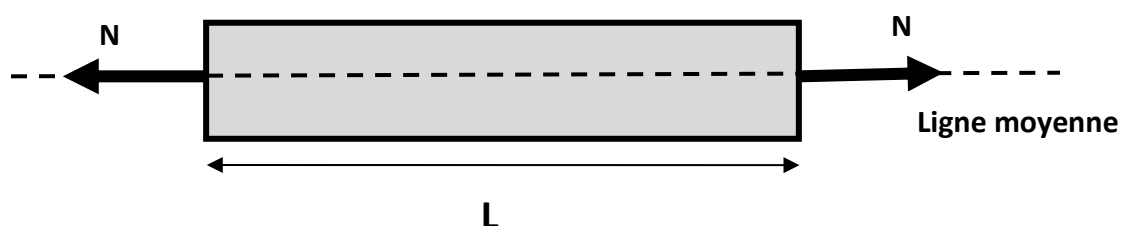
- L'essai de traction permet, à lui seul, de définir les caractéristiques mécaniques courantes des matériaux.
- Les résultats issus de cet essai, permettent de prévoir le comportement d'une pièce sollicitée en Cisaillement, Traction / Compression et Flexion.

Principe de l'essai

- L'essai est réalisé sur une machine de traction.
- On applique progressivement et lentement (sans choc) à une éprouvette cylindrique de formes et de dimensions normalisées, un effort de traction croissant N .



Après déformation



Caractéristiques mesurées

- L_0 : Longueur initiale de l'éprouvette au repos (sans charge).
- L : Longueur de l'éprouvette mesurée sous charge F .
- N : Force exercée par la machine d'essai sur l'éprouvette.



Déformation

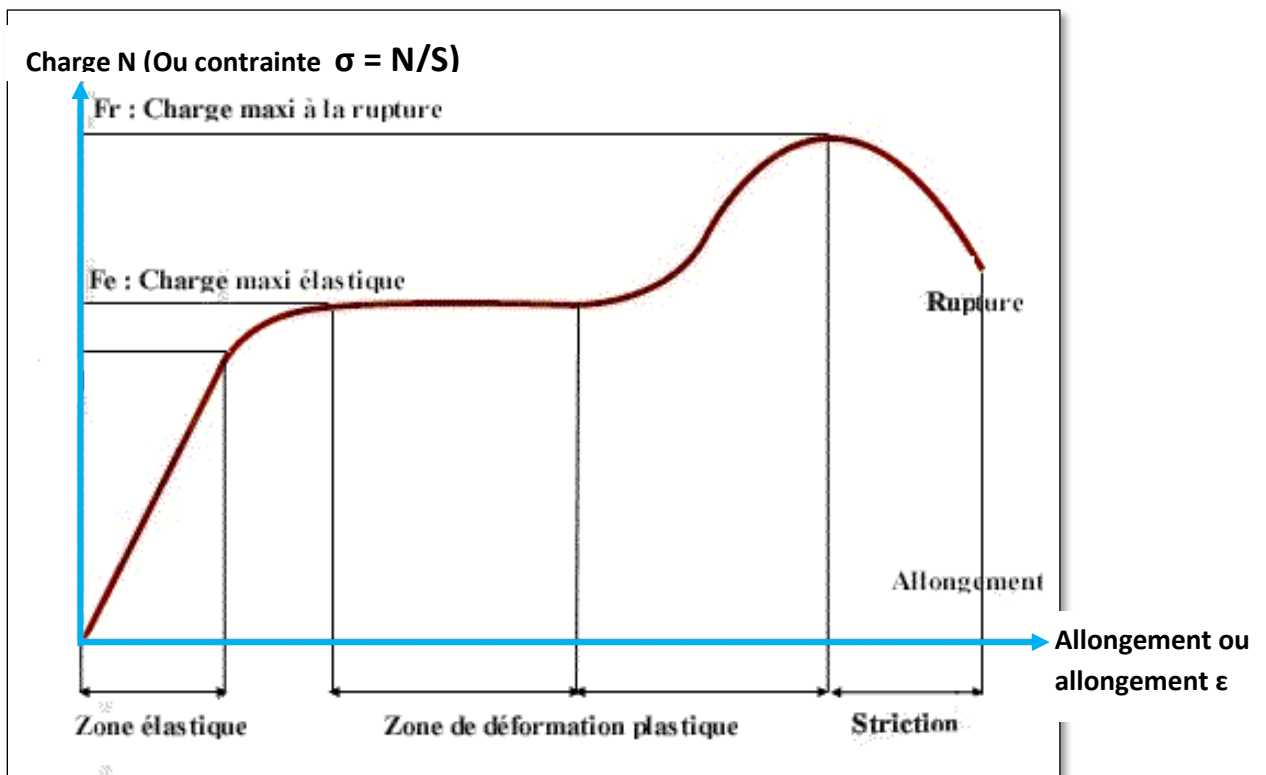
L'éprouvette s'allonge par

L'allongement de la barre $\Delta L = L - L_0$

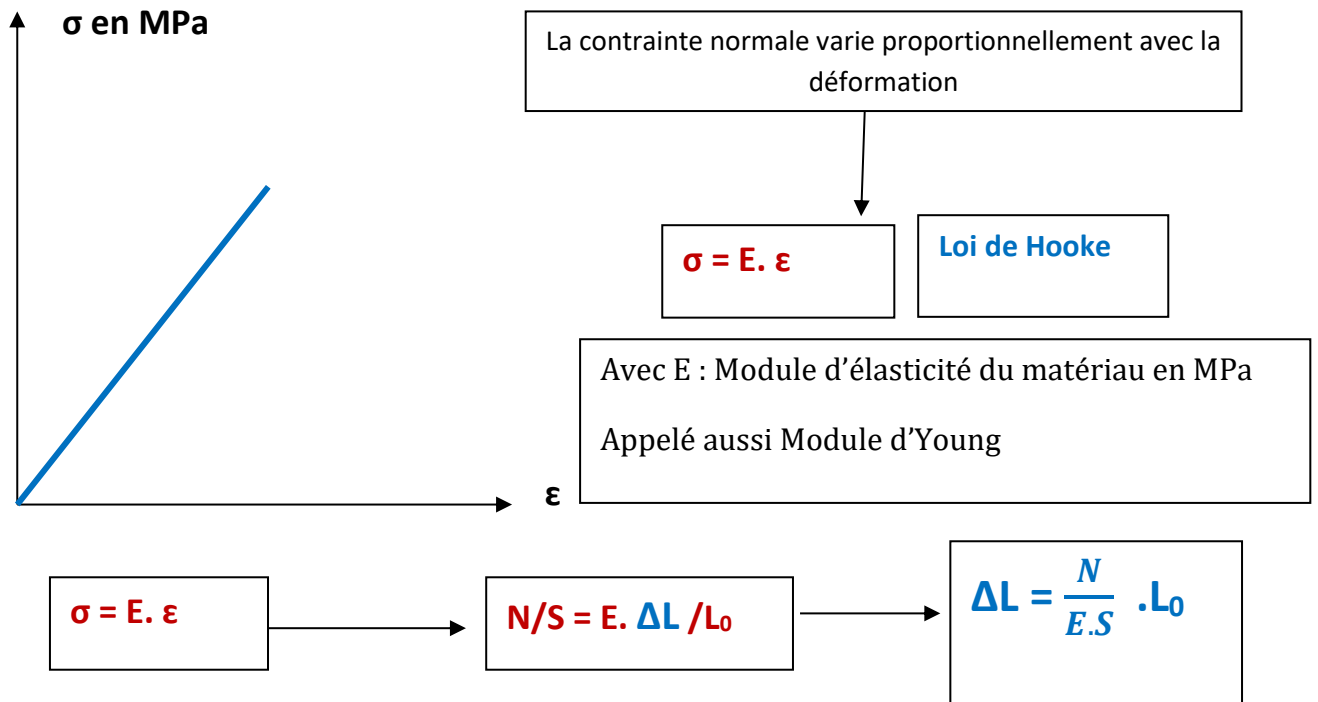
On définit aussi l'allongement unitaire comme étant l'allongement rapporté à la longueur initiale L_0

L'allongement unitaire de la barre $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

L'essai conduit à l'allure suivante :



Si on s'intéresse au domaine élastique, on obtient la courbe suivante :



Une fois la contrainte admissible est déterminée, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma = N/S \leq \sigma_{adm}$$

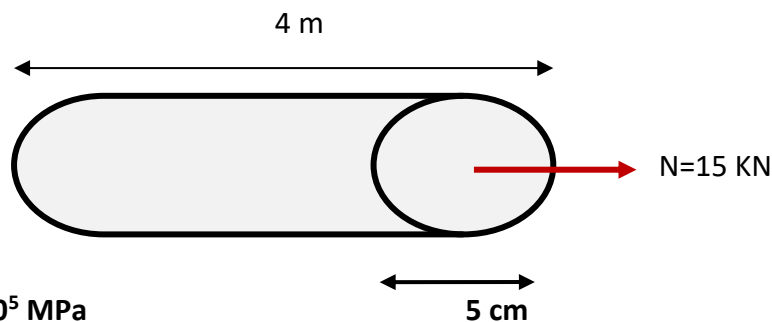
L'allongement se calcule par :

$$\Delta L = \frac{N}{E \cdot S} \cdot L_0$$

Exemple 1

Une barre en acier de diamètre D = 5 cm et de longueur 4 m est soumise à un effort de traction de 15 KN

La contrainte admissible de l'acier vaut : 50 MPa



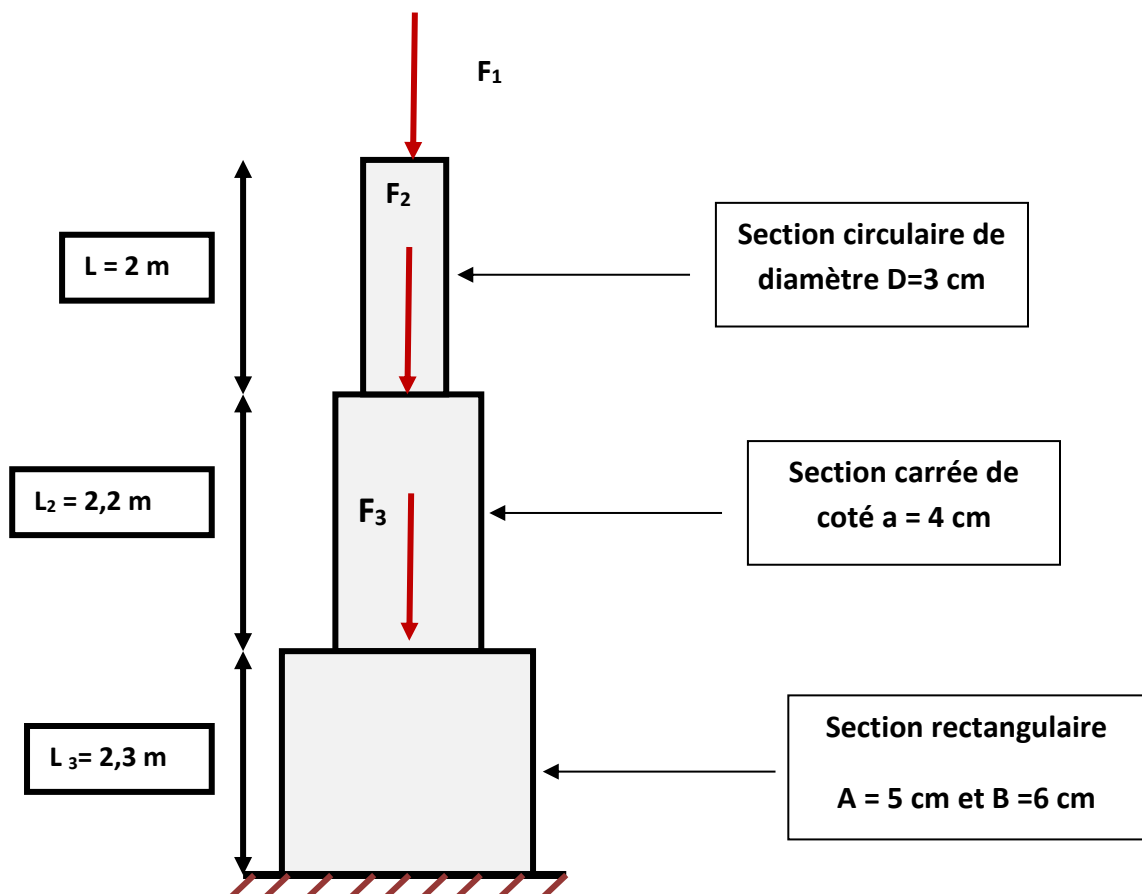
On donne : E= 2.10⁵ MPa

i) Calcul de la contrainte de traction :On a : $\sigma = N/S$ Avec $S = \pi D^2/4 = \pi 5^2/4 = 19,625 \text{ cm}^2 = 1962,5 \text{ mm}^2$ Donc : $\sigma = N/S = 15000 \text{ N} / 1962,5 \text{ mm}^2 = 7,64 \text{ N/mm}^2 = 7,64 \text{ MPa}$ On a : $\sigma = 7,64 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{adm}} = 50 \text{ MPa}$, alors la barre est vérifiée en traction.ii) Calcul de l'allongement :On a : $\Delta L = \frac{N}{E.S} \cdot L_0 = (15000 \text{ N} \cdot 4000 \text{ mm}) / (2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 1962,5 \text{ mm}^2) = 0,153 \text{ mm}$

e) Exercices d'application :

Exercice 1 :

Déterminer les efforts, les contraintes et les déformations dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la figure suivante :

On donne : $F_1 = 20 \text{ KN}$; $F_2 = 30 \text{ KN}$; $F_3 = 40 \text{ KN}$; $E_1 = E_2 = E_3 = 23.000 \text{ MPa}$

i) Calcul des efforts dans les tronçons :

La barre 1 est soumise à un effort de compression égale à : $F_1 = 20 \text{ KN}$

La barre 2 est soumise à un effort de compression égale à : $F_1 + F_2 = 50 \text{ KN}$

La barre 3 est soumise à un effort de compression égale à : $F_1 + F_2 + F_3 = 90 \text{ KN}$

ii) Calcul des contraintes et des déformations

Section	Surface S en mm ²	Effort N (N)	Contrainte en MPa=N/S	Longueur en mm	Allongement en mm =N.L/E.S
S ₁	$(3,14 \cdot 30^2)/4 = 706,5$	-20.000	-28,31	2000	- 2,47
S ₂	$40 \cdot 40 = 1600$	-50.000	-31,25	2200	- 2,99
S ₃	$50 \cdot 60 = 3000$	-90.000	-30	2300	- 3

Exercice 2 :

Une console à deux barres en acier AB et AC articulées en A est soumise à un effort F.

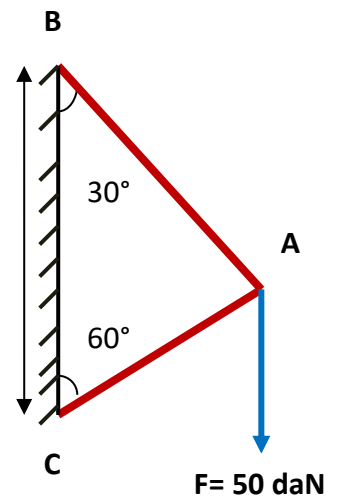
On donne :

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$: Module d'élasticité longitudinale.

Contrainte admissible de compression $\sigma_c = 60 \text{ daN/mm}^2$

Contrainte admissible de traction $\sigma_t = 150 \text{ daN/mm}^2$ $BC = 6 \text{ m}$

- 1) Déterminer les efforts normaux dans les barres.
- 2) Déterminer les sections des barres.
- 3) Déterminer les variations des longueurs des barres.



Solution

1) Détermination des efforts normaux dans les barres

On projette l'effort F sur les lignes des deux barres perpendiculaires.

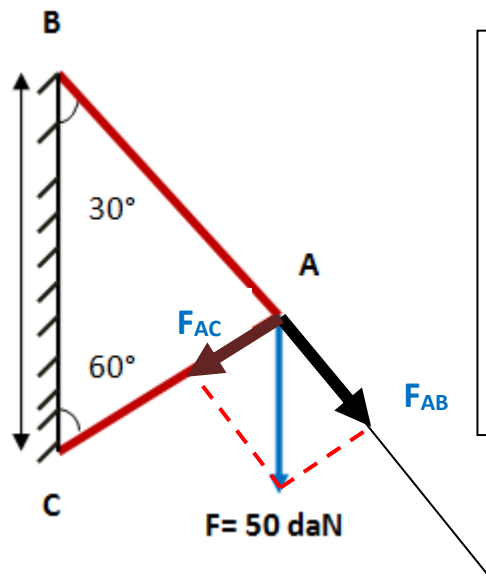
On obtient :

$F_{AB} = F \cos 30^\circ = 50 \cos 30^\circ$

$F_{AB} = 43,3 \text{ daN}$

$F_{AC} = F \sin 30^\circ = 50 \sin 30^\circ$

$F_{AC} = 25 \text{ daN}$



F_{AB} est un effort de traction qui tend à tendre la barre AB. (Effort dirigé vers l'extérieur)

Quand à F_{AC} tend à comprimer la barre AC (Effort dirigé vers l'extérieur)

2) Détermination des sections des barres.

a) Barre AB

La barre AB est soumise à un effort de traction, elle sera donc dimensionnée pour résister à l'effort de traction F_{AB}

On écrit la condition de résistance à la traction :

Contrainte appliquée \leq Contrainte admissible à la traction

C'est-à-dire $\sigma = F_{AB}/S_{AB} \leq \sigma_t = 150 \text{ daN/mm}^2$

D'où : $S_{AB} \geq F_{AB}/\sigma_t$

Application numérique : $S_{AB} \geq F_{AB}/\sigma_t = 43,3 \text{ daN} / 150 \text{ daN/mm}^2 = 0,29 \text{ mm}^2$

$$S_{AB} = 0,29 \text{ mm}^2$$

a) Barre AC

La barre AC est soumise à un effort de compression, elle sera donc dimensionnée pour résister à l'effort de compression F_{AC} .

On écrit la condition de résistance à la compression :

Contrainte appliquée \leq contrainte admissible à la compression

C'est-à-dire $\sigma = F_{AC}/S_{AC} \leq \sigma_c = 60 \text{ daN/mm}^2$

D'où : $S_{AC} \geq F_{AC}/\sigma_c$

Application numérique : $S_{AC} \geq F_{AC}/\sigma_c = 25 \text{ daN} / 60 \text{ daN/mm}^2 = 0,417 \text{ mm}^2$

$$S_{AC} = 0,417 \text{ mm}^2$$

3) Déterminations des variations des longueurs des barres.

Pour calculer les variations de longueurs des barres, on utilise la formule suivante :

$$\Delta L = \frac{N}{E.S} \cdot L_0$$

La barre AB est en allongement $\Delta L_{AB} > 0$

La barre AC est en rétrécissement $\Delta L_{AC} < 0$

Donc : $\Delta L_{AB} = \frac{N_{AB}}{E.S_{AB}} \cdot L_{AB}$ AVEC $L_{AB} = L_{BC} \cos 30 = 6 \cos 30 = 5,2 \text{ m} = 5200 \text{ mm}$

D'où $\Delta L_{AB} = + (433 \text{ N} \times 5200 \text{ mm}) / (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \times 0,29 \text{ mm}^2) = +38,82 \text{ mm}$

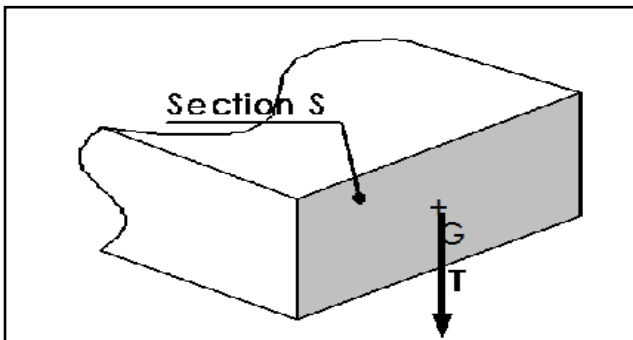
De même : $\Delta L_{AC} = - \frac{N_{AC}}{E.S_{AC}} \cdot L_{AC}$ AVEC $L_{AC} = L_{BC} \sin 30 = 6 \sin 30 = 3 \text{ m} = 3000 \text{ mm}$

D'où $\Delta L_{AC} = - (250 \text{ N} \times 3000 \text{ mm}) / (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \times 0,417 \text{ mm}^2) = -9 \text{ mm}$

4) Cisaillement.

a) Contrainte tangentielle de cisaillement.

On considère une section d'une poutre soumise un effort tranchant T.



L'effort tranchant T engendre une contrainte tangentielle uniforme dans la section S.

Cette contrainte tangentielle est exprimée par la formule suivante :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

τ : Contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²

T : Effort tranchant en N

S : Aire de la section droite cisailée en mm²

b) Déformation

Une section soumise au cisaillement se déforme par glissement de la section S_1 .

Ce déplacement peut se calculer par l'angle de glissement γ en radians :

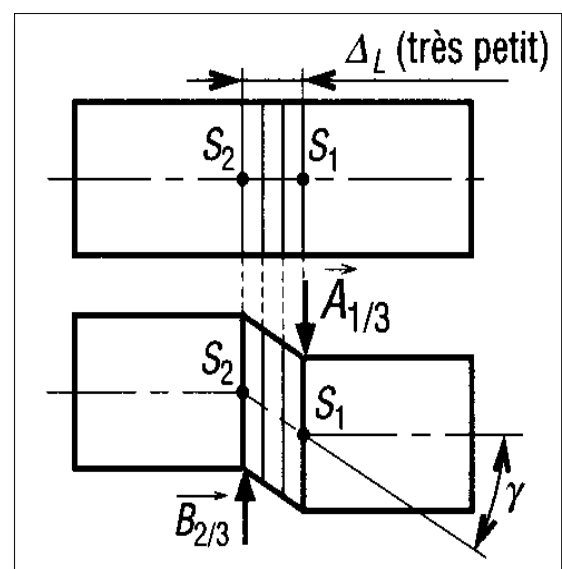
$$\tau = G \cdot \gamma \text{ Donc } \gamma = \tau / G$$

Avec :

G : module d'élasticité transversale exprimé en MPa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ AVEC } \nu : \text{coefficient de Poisson}$$

τ exprimée en MPa



Exemple :

Le module d'élasticité longitudinale d'un acier étant $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$, son module d'élasticité transversale est : $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$

Matériau	Module de cisaillement G en 10^6 MPa	Limite pratique de glissement R_{pg} en MPa
Acier	80 000	250
Aluminium	26 000	200
Verre	24 000	—
Polystyrène	10 500	—

Ordres de grandeur de quelques caractéristiques matériaux en cisaillement

Valeurs maximales des contraintes tangentielles pour quelques sections :

La contrainte maximale de cisaillement est calculée en fonction de la contrainte moyenne.

Elle dépend aussi de la répartition de la matière dans la section (Forme).

Pour des sections rectangulaires : $\tau_{Max} = 3/2 \tau_{moy}$ Pour des sections circulaires : $\tau_{Max} = 4/3 \tau_{moy}$ Pour des sections I : $\tau_{Max} = \frac{T}{\text{Section âme seule}}$	$T_{moy} = T/S$
--	-----------------

c) Condition de résistance au cisaillement

Chaque matériau a une contrainte admissible τ_{adm} au cisaillement exprimée en MPa.

La condition de résistance au cisaillement s'écrit :

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

d) Exemple :

Vérifier au cisaillement la section de la poutre, en béton, représentée sur la figure suivante :

The diagram shows a simply supported beam of length 4 m subjected to a uniformly distributed load $q = 10$ KN/m. The cross-section of the beam is a square with a width of 20 cm and a height of 30 cm.

<p>On donne :</p> <p>Contrainte admissible au cisaillement :</p> <p>$\tau_{adm} = 2$ MPa</p>

Solution :

Les réactions aux appuis de la poutre se calculent par :

$$R_A = R_B = qL/2 ; \text{ car la poutre est symétriquement chargée}$$

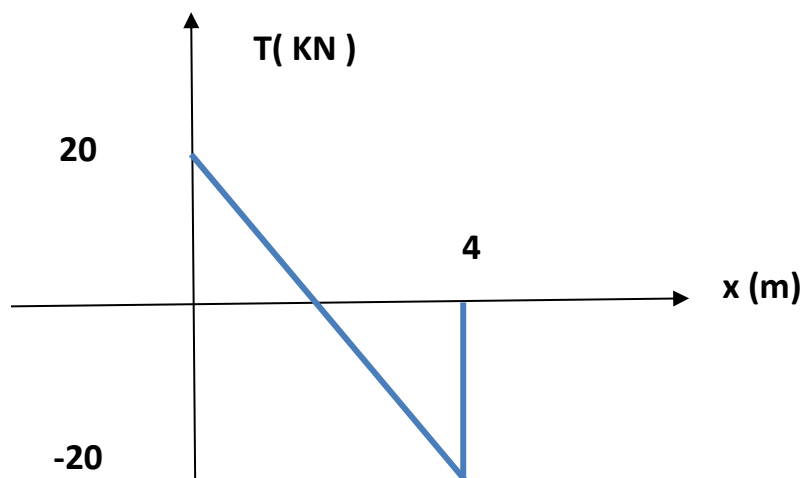
$$R_A = R_B = 10 \cdot 4 / 2 = 20 \text{ KN.}$$

L'effort tranchant dans la poutre s'exprime par :

$$T(x) = R_A - q(x - 0) = 20 - 10x$$

$$T(0) = 20 - 10 \cdot 0 = 20 \text{ KN}$$

$$T(4) = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \text{ KN}$$



L'effort tranchant maximal vaut donc : $T_{\max} = 20 \text{ KN}$

La contrainte maximale dans la section rectangulaire se calcule par :

$$\tau_{\max} = 3/2 T_{\max} / S = 3/2 \times 20.000 \text{ N} / (200 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}) = 0,5 \text{ MPa.}$$

On a : $\tau_{\max} = 0,5 \text{ MPa} \leq \tau_{\text{adm}} = 2 \text{ MPa}$, donc la section est vérifiée au cisaillement.

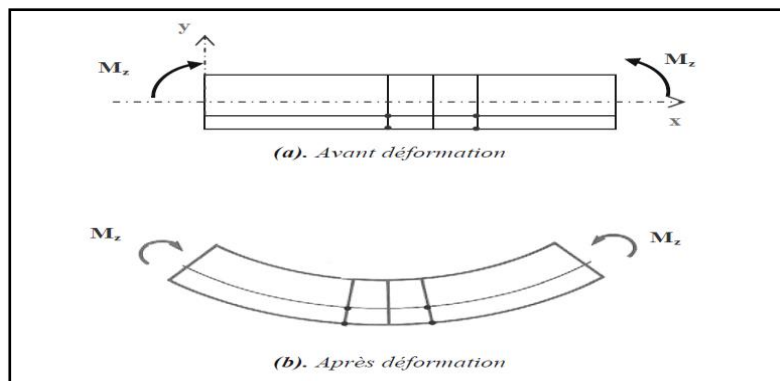
5) Flexion simple.

a) Définition

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque le torseur de cohésion s'écrit :

$$\{\tau_{Coh}\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Ty & M_{fy} \\ Tz & M_{fz} \end{pmatrix} \\ G \end{matrix}$$

La poutre est soumise donc un effort tranchant et un moment de flexion.



b) Contrainte normale de flexion

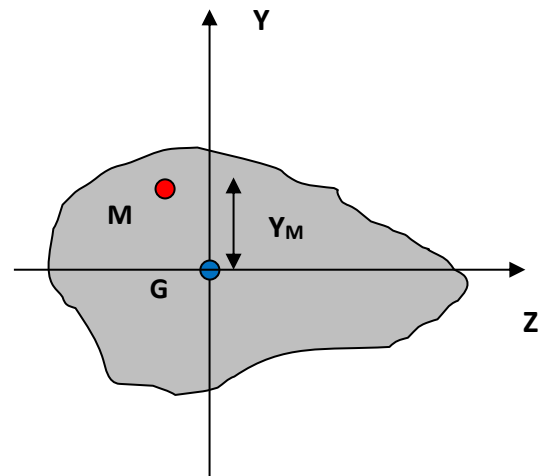
La contrainte normale de flexion en un point M de la section s'exprime par :

$$\sigma_M = \frac{Mfz}{\left(\frac{IGZ}{Y_M}\right)} = \frac{Mfz}{IGZ} \cdot Y_M$$

σ_M : Contrainte normale en point M en MPa.

IGZ : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe horizontal. (Noté aussi IGX)

Mfz : Moment fléchissant dans la section.



La contrainte normale maximale dans une section se calcule donc par :

$$\sigma_{Max} = \frac{Mmax}{\left(\frac{IGZ}{Ymax}\right)} = \frac{Mmax}{IGZ} \cdot Y_{max}$$

Y_{max} : La distance du CDG de la section à la fibre la plus éloignée.

Y_{max} et IGZ (ou IGX) sont traités dans le chapitre sur les caractéristiques géométriques des sections

c) Condition de résistance :

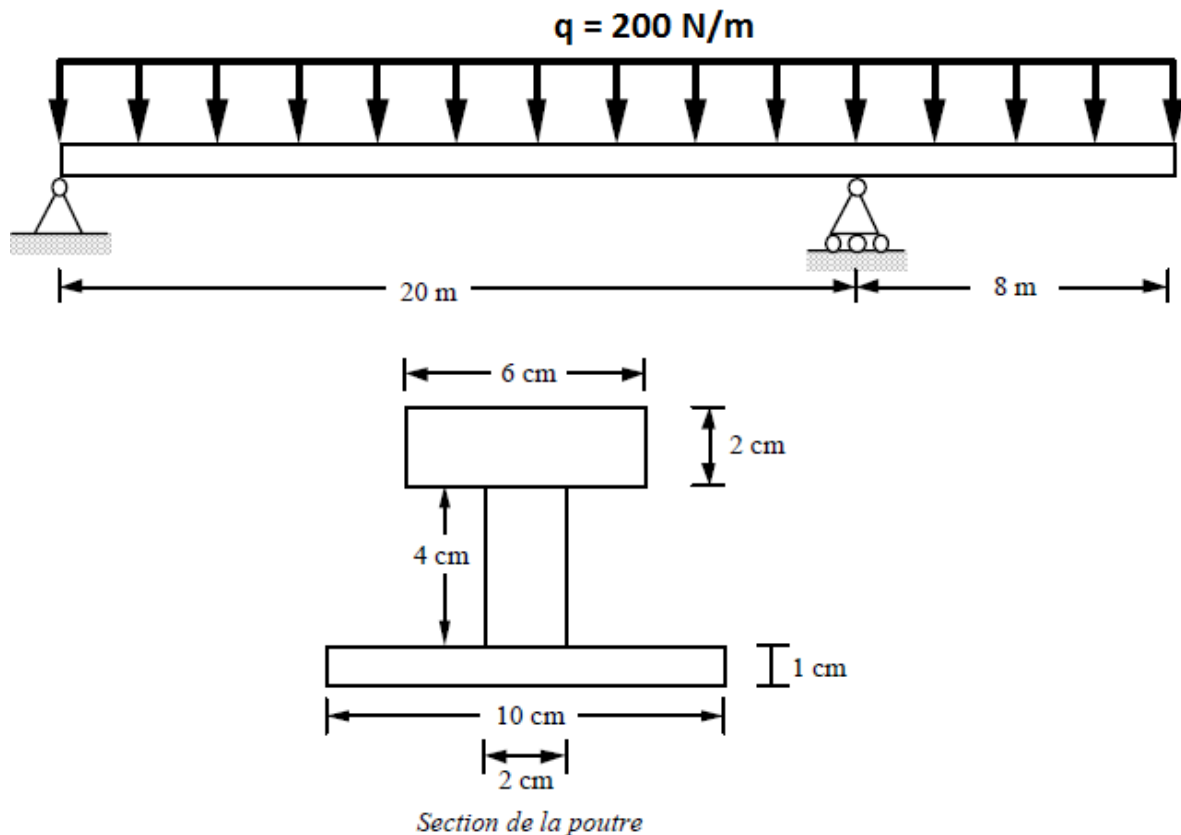
Dans une poutre soumise à la flexion, on peut rencontrer des contraintes de compression et des contraintes de traction.

La vérification d'une poutre à la flexion conduit à la vérification des conditions de résistance à la compression et à la traction.

On calcule alors les contraintes maximales de traction et de compressions et on les compare aux contraintes admissibles connues.

d) Exercices d'application

Exercice d'application : on considère la poutre isostatique en acier, de section en double T, représentée sur la figure suivante :



On donne :

- La contrainte admissible à la compression = 200 MPa
- La contrainte admissible à la traction = 150 MPa
- La contrainte admissible au cisaillement = 40 MPa

- 1) Calculer les réactions aux appuis de la poutre.
- 2) Etablir les équations des efforts internes $T(x)$ et $M(x)$.
- 3) Tracer les diagrammes des efforts internes et en déduire leurs valeurs extrêmes.
- 4) Calculer les contraintes normales maximales dans la section de la poutre et faire les vérifications nécessaires.
- 5) Calculer la contrainte tangentielle maximale et vérifier la poutre au cisaillement.

Solution

1) Calcul des réactions aux appuis de la poutre A et B.

On a: $Q = (q \times L) = 200 \times 28) = 5600 \text{ N}$; $a = b = 28/2 = 14 \text{ m}$

$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \longrightarrow R_A + R_B = Q = 5600 \text{ N}$

$\sum MF/A = 0 \longrightarrow 14 \times Q - 20 R_B = 0$

$R_B = (14 \times Q) / 20$

$R_B = 3920 \text{ N}$

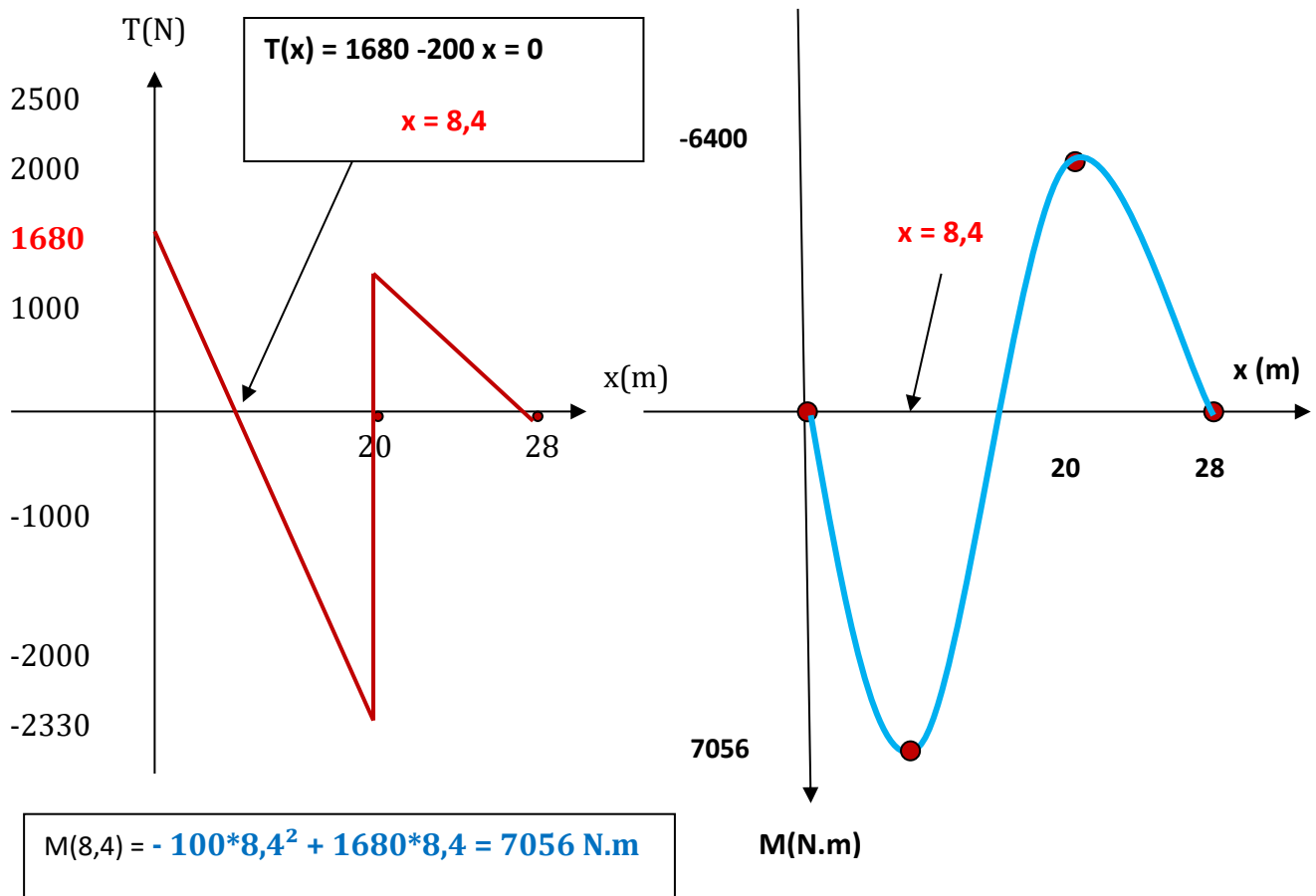
$R_A + R_B = 5600 \text{ N}$

$R_A = 1680 \text{ N}$

2) Les équations du moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$ le long de la poutre :

	<u>Intervalle [0,20]</u>	<u>Intervalle [20,28]</u>
	On laisse à gauche la réaction R_A on coupe la charge répartie q qui commence à $x = 0$	On laisse à gauche les réactions R_A et R_B et on coupe la charge répartie q qui commence à $x = 0$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - q_1 (x - 0)$ $= 1680 - 200 x$ $T(0) = 1680$ $T(20) = -2320$	$= R_A - q_1 (x - 0) + R_B$ $= 1680 - 200 x + 3920$ $= 5600 - 200 x$ $T(20) = 1600$ $T(28) = 0$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A x - (q_1/2) (x - 0)^2$ $= - 100 x^2 + 1680 x$ $M(0) = 0$ $M(20) = -6400$	$R_A x - (q_1/2)(x - 0)^2 + R_B (x-20)$ $= - 100 x^2 + 1680 x + 3920 x - 78400$ $= - 100 x^2 + 5600 x - 78400$ $M(20) = -6400$ $M(28) = 0$

3) Diagrammes de M(x) et T(x) :



Les valeurs extrêmes :

T_{\max} (en valeurs absolues) = 2330 N

$M_{\max}^+ = 7056 \text{ N.m}$

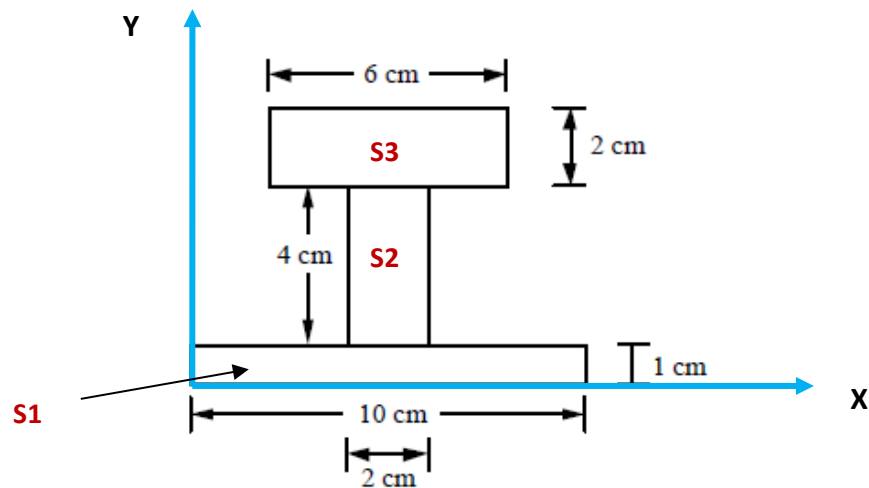
$M_{\max}^- = 6400 \text{ N.m}$

4) Calcul des contraintes normales maximales dans la section de la poutre et vérifications des contraintes maximales :

Ces contraintes sont calculées par la formule suivante :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\left(\frac{IGx}{Y_{\max}}\right)} = \frac{M_{\max}}{IGx} \cdot Y_{\max}$$

Pour calculer les contraintes normales de flexion, on aura besoin des caractéristiques géométriques de la section en double T à ailes inégales.



Détermination de la position du centre de gravité de la section.

	Surface S_i	X_{Gi}	Y_{Gi}	$X_{Gi} \cdot S_i$	$Y_{Gi} \cdot S_i$
Section 1	$1 \times 10 = 10$	5	0,5	$5 \times 10 = 50$	$0,5 \times 10 = 5$
Section 2	$4 \times 2 = 8$	5	3	$5 \times 8 = 40$	$3 \times 8 = 24$
Section 3	$2 \times 6 = 12$	5	6	$5 \times 12 = 60$	$6 \times 12 = 72$
Somme	30			150	101

La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

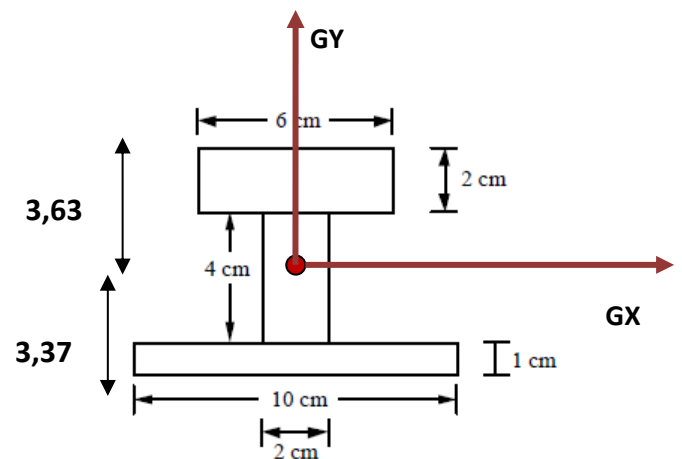
$$X_G = \frac{\sum X_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$= \frac{150}{30} = 5 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$= \frac{101}{30} = 3,37 \text{ cm}$$

$$Y_{\max} = 3,63 \text{ cm} = 36,3 \text{ mm}$$



Calcul du moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre

On a :

$$I_{GX} (S) = \sum [(I_{GiX} (S_i) + S_i (Y_G - Y_{Gi})^2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 I_{GX}(\mathbf{S}) &= I_{G1X}(S1) + S1(YG - YG1)^2 + I_{G2X}(S2) + S2(YG - YG2)^2 + I_{G3X}(S3) + S3(YG - YG3)^2 \\
 &= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(YG - YG1)^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(YG - YG2)^2 + \frac{b_3(h_3)^3}{12} + (b_3 \times h_3)(YG - YG3)^2 \\
 &= \frac{10 \times 1^3}{12} + (1 \times 10)(3,37 - 0,5)^2 + \frac{2 \times 4^3}{12} + (2 \times 4)(3,37 - 3)^2 + \frac{6 \times 2^3}{12} + (2 \times 6)(3,37 - 6)^2
 \end{aligned}$$

$$I_{GX}(\mathbf{S}) = 181,97 \text{ cm}^4 = 181,97 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Calcul des contraintes normales maximales dans la section de la poutre et vérifications des contraintes maximales.

On a :

$$\sigma_{\text{Max}} = \frac{M_{\text{max}}}{\left(\frac{I_{GX}}{Y_{\text{max}}}\right)} = \frac{M_{\text{max}}}{I_{GX}} \cdot Y_{\text{max}}$$

Contrainte maximale de compression : Fibre supérieure

$$\begin{aligned}
 \sigma^+_{\text{Max}} &= (M^+_{\text{max}} \cdot Y_{\text{max}}) / I_{GX} = (7056 \times 10^3 \text{ N.mm} \times 36,3 \text{ mm}) / (181,97 \times 10^4 \text{ mm}^4) \\
 &= 140,42 \text{ MPa} < \text{La contrainte admissible à la compression} = 200 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Donc, la poutre est vérifiée à la compression.

Contrainte maximale de traction : Fibre inférieure

$$\begin{aligned}
 \sigma^-_{\text{Max}} &= (M^+_{\text{max}} \cdot Y^-_{\text{max}}) / I_{GX} = (7056 \times 10^3 \text{ N.mm} \times 33,7 \text{ mm}) / (181,97 \times 10^4 \text{ mm}^4) \\
 &= 130,67 \text{ MPa} < \text{La contrainte admissible à la traction} = 150 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Donc, la poutre est vérifiée à la traction.

- 5) Calcul de la contrainte tangentielle maximale et vérification de la poutre au cisaillement.

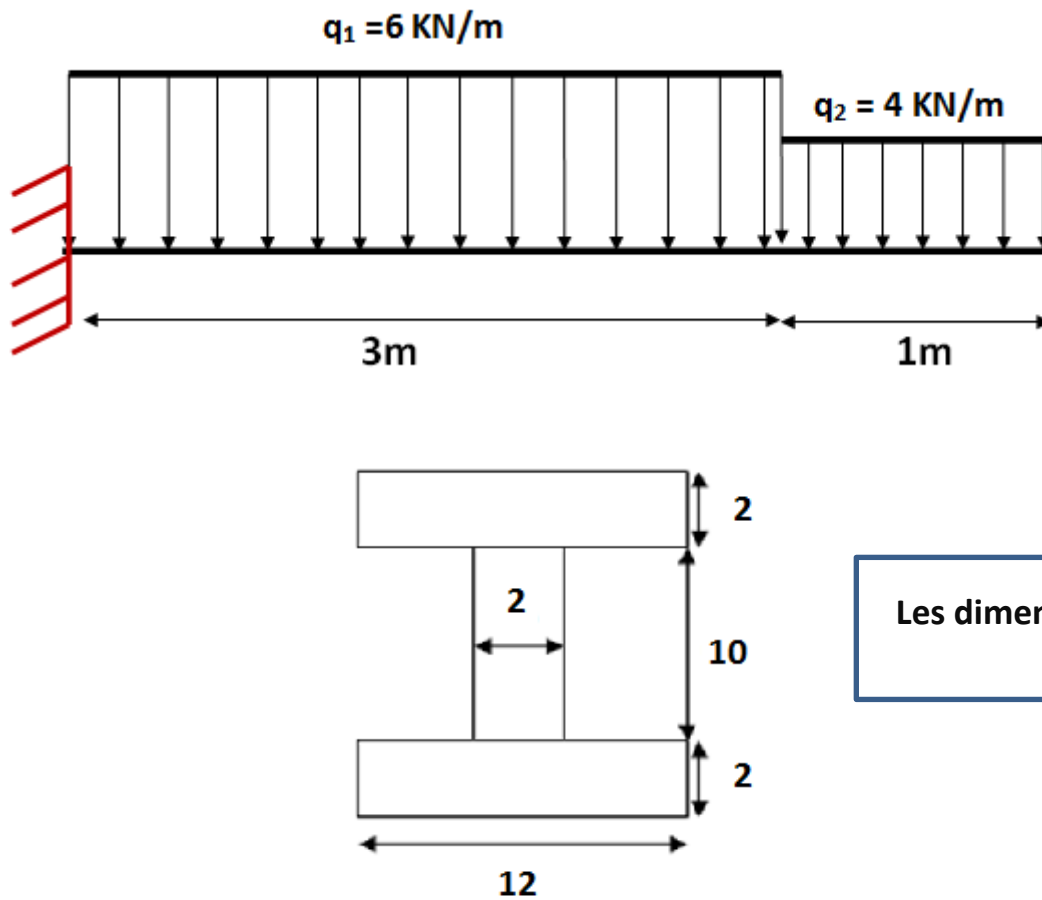
La contrainte tangentielle maximale dans la section en I = Effort tranchant maximal / section de l'âme

$$\text{Application numérique : } \tau_{\text{max}} = T_{\text{max}} / \text{section de l'âme} = 2330 \text{ N} / (20 \times 70 \text{ mm}^2)$$

$$\tau_{\text{max}} = 1,67 \text{ MPa}$$

On a : $\tau_{\text{max}} = 1,67 \text{ MPa} < \text{La contrainte admissible au cisaillement} = 40 \text{ MPa}$. Donc, la poutre est vérifiée au cisaillement.

Exercice 1 : Calculer les contraintes maximales dans la poutre représentée sur la figure suivante :



Le calcul des réactions aux appuis ainsi que des efforts internes est traité dans l'exercice sur les pages 69 -70 -71.

Les résultats trouvés sont résumés comme suit :

$$T_{\max} (\text{ en valeur absolue }) = 22 \text{ kN} = 22000 \text{ N}$$

$$M_{\max +} = 0 \text{ kN.m}$$

$$M_{\max -} = -41 \text{ kN.m} = -41 \cdot 10^6 \text{ N.mm}$$

Le calcul des caractéristiques géométriques de la section est traité dans les pages 99 - 100

Les caractéristiques calculées sont résumées comme suit :

$$Y_{\max +} = 7 \text{ cm} = 70 \text{ mm} \quad Y_{\max -} = -7 \text{ cm} = -70 \text{ mm}$$

$$I_{Gx}(S) = 1910,67 \text{ cm}^4 = 1910,67 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Calcul des contraintes normales maximales dans la section de la poutre

On a :

$$\sigma_{\text{Max}} = \frac{M_{\text{max}}}{\left(\frac{IGx}{Y_{\text{max}}}\right)} = \frac{M_{\text{max}}}{IGx} \cdot Y_{\text{max}}$$

Contrainte maximale de traction : Fibre supérieure tendue.

$$\begin{aligned} \sigma^+_{\text{Max}} &= (M_{\text{max}} * Y^-_{\text{max}}) / IGx = (-41 * 10^6 \text{ N.mm} * (70 \text{ mm})) / (1910,67 * 10^4 \text{ mm}^4) \\ &= -150,2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Contrainte maximale de compression : Fibre inférieure comprimée.

$$\begin{aligned} \sigma^-_{\text{Max}} &= (M_{\text{max}} * Y^+_{\text{max}}) / IGx = (-41 * 10^6 \text{ N.mm} * (-70 \text{ mm})) / (1910,67 * 10^4 \text{ mm}^4) \\ &= +150,2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Calcul de la contrainte tangentielle maximale et vérification de la poutre au cisaillement.

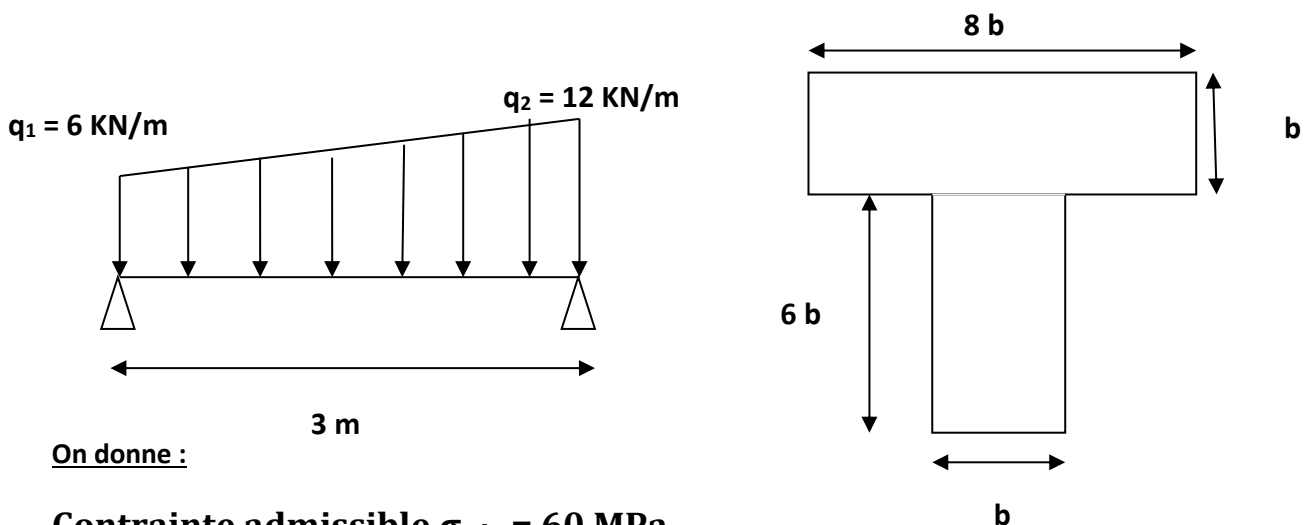
La contrainte tangentielle maximale dans la section en I = Effort tranchant maximal / section de l'âme

Application numérique : $\tau_{\text{max}} = T_{\text{max}} / \text{section de l'âme} = 22000 \text{ N} / (20 * 140 \text{ mm}^2)$

$$\tau_{\text{max}} = 7,86 \text{ MPa}$$

Exercice 2 : Dimensionnement d'une poutre en flexion.

Soit à dimensionner la poutre, de section en T, représentée sur la figure suivante :



On donne :

Contrainte admissible $\sigma_{\text{adm}} = 60 \text{ MPa}$

1) Calculer les réactions aux appuis de la poutre.

- 2) Etablir les équations des efforts internes et tracer leurs diagrammes.
- 3) En déduire leurs valeurs extrêmes
- 4) Déterminer la position du centre de gravité de la section en fonction de b.
- 5) Calculer le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre GX.
- 6) En écrivant les conditions de résistance, calculer l'épaisseur minimale de la poutre pour qu'elle soit vérifiée en flexion.
- 7) Vérifier la poutre dimensionnée au cisaillement sachant que la contrainte admissible au cisaillement vaut : 10 MPa.

Solution

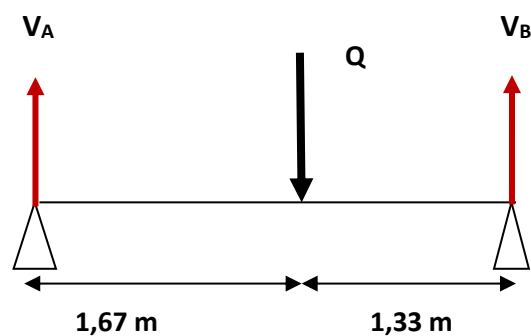
1) Calcul des réactions aux appuis de la poutre A et B.

On a:

$$Q = \frac{(q_1+q_2) \times L}{2} = \frac{(6+12) \times 3}{2} = 27 \text{ KN}$$

$$a = \frac{(q_1+2q_2) \times L}{3(q_1+q_2)} = \frac{(6+2 \times 12) \times 3}{3(6+12)} = 1,67 \text{ m}$$

$$b = \frac{(q_2+2q_1) \times L}{3(q_1+q_2)} = \frac{(12+2 \times 6) \times 3}{3(6+12)} = 1,33 \text{ m}$$



$$\sum F \uparrow = \sum F \downarrow \longrightarrow R_A + R_B = Q = 27 \text{ KN}$$

$$\sum MF/A = 0 \longrightarrow 1,67 Q - 3 R_B = 0 \longrightarrow R_B = (1,67 \times Q) / 3$$

$$R_B = 15 \text{ KN}$$

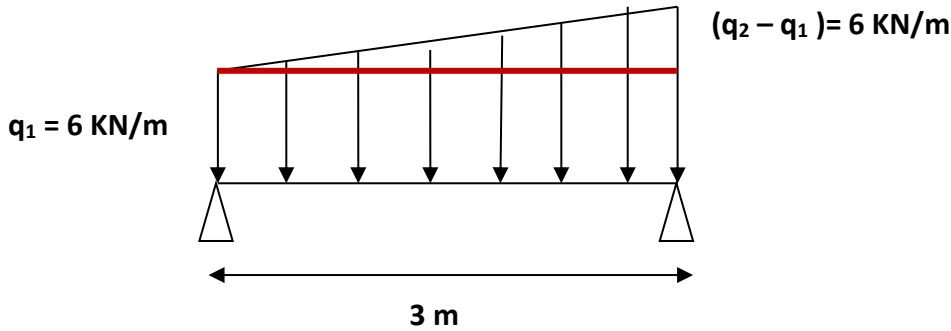
$$R_A + R_B = 27 \text{ KN}$$

$$R_A = 12 \text{ KN}$$

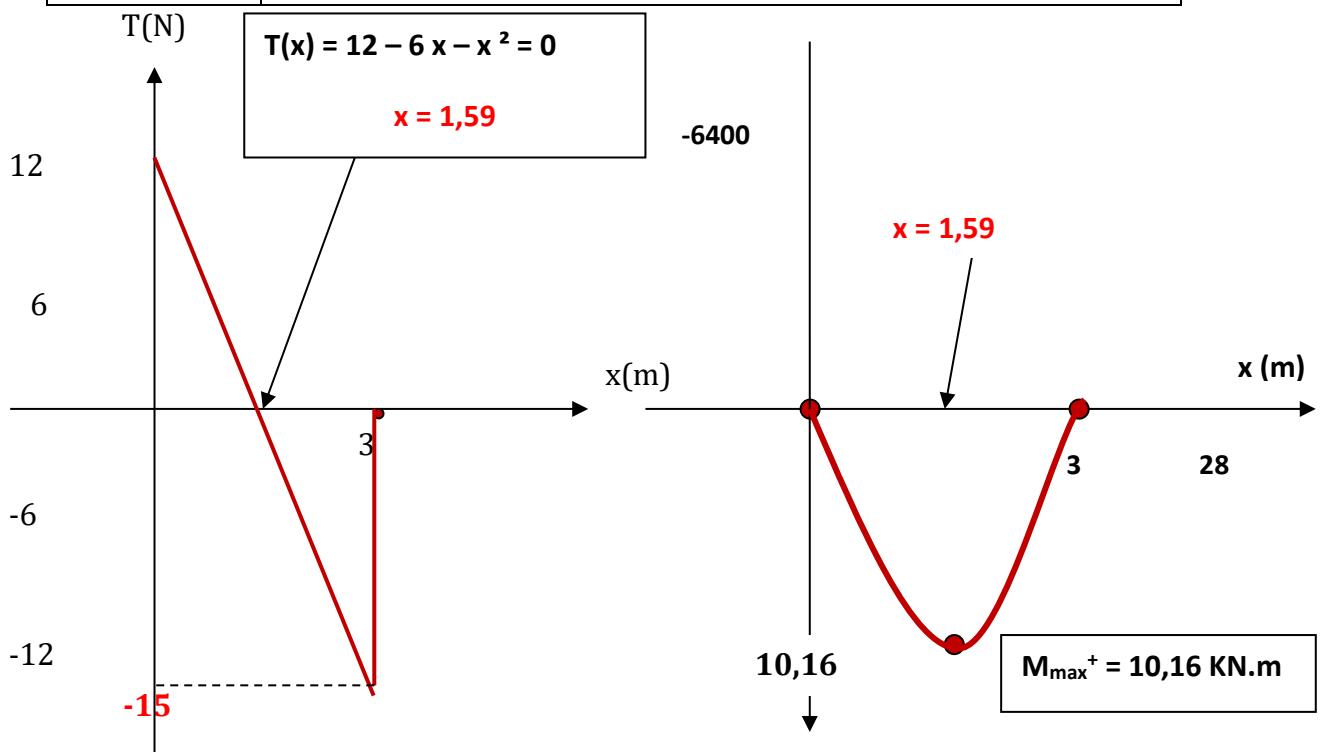
2) Les équations du moment fléchissant M(x) et l'effort tranchant T(x) le long de la poutre :

On a un seul intervalle [0 ; 3]

On décompose la charge trapézoïdale en deux charges : une rectangulaire d'intensité q₁ et l'autre charge triangulaire d'intensité (q₂-q₁)



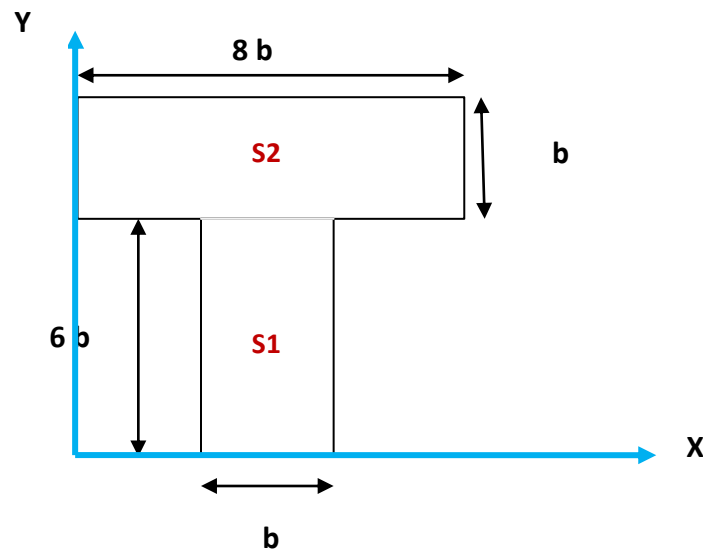
<u>Intervalle [0,3]</u>	
	On laisse à gauche la réaction R_A on coupe les charges rectangulaire et triangulaire qui commencent à $x = 0$
Effort tranchant $T(x)$ (KN)	$= R_A - q_1 (x - 0) - (q_2 - q_1)(x-0)^2/2L$ $= 12 - 6 (x-0) - 6 (x - 0)^2 / (2 \cdot 3)$ $= 12 - 6x - x^2$ $T(0) = 12$ $T(3) = -15$
Moment fléchissant $M(x)$ (KN.m)	$= R_A (x-0) - (q_1/2) (x - 0)^2 - (q_2 - q_1)(x-0)^3/6L$ $= 12(x-0) - (6/2) (x-0)^2 - 6 (x - 0)^3 / (6 \cdot 3)$ $= 12x - 3x^2 - (x^3)/3$ $M(0) = 0$ $M(3) = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $M(1,59) = 12 \cdot 1,59 - 3 \cdot 1,59^2 - (1,59^3)/3 = 10,16$ </div>



3) Les valeurs extrêmes :

T_{max} (en valeurs absolues) = 15 KN $M_{max} = 10,61$ N.m

4) Détermination de la position du centre de gravité de la section.



	Surface Si	XGi	YGi	XGi.Si	YGi.Si
Section 1	$b \times 6b = 6b^2$	$4b$	$3b$	$4b \times 6b^2 = 24b^3$	$3b \times 6b^2 = 18b^3$
Section 2	$b \times 8b = 8b^2$	$4b$	$6,5b$	$4b \times 8b^2 = 32b^3$	$6,5b \times 8b^2 = 52b^3$
Somme	$14b^2$			$56b^3$	$70b^3$

La position du centre de gravité est déterminée alors par les formules suivantes :

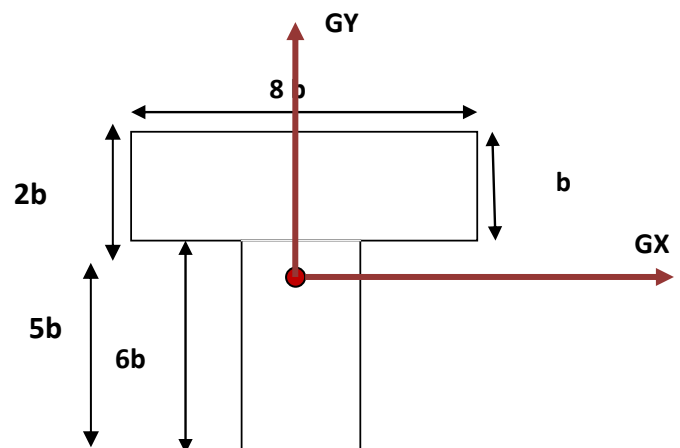
$$X_G = \frac{\sum XGi .Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{(56 b^3)}{14b^2} = 4b$$

$$Y_G = \frac{\sum YGi .Si}{\sum Si}$$

$$= \frac{(70 b^3)}{14b^2} = 5b$$

$Y_{max} = 5b$



5) Calcul du moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre GX.

On a :

$$I_{GX} (S) = \sum [(I_{GiX} (S_i) + S_i(Y_G - Y_{Gi})^2)]$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_{GX} (S) &= I_{G1X} (S1) + S_1(Y_G - Y_{G1})^2 + I_{G2X} (S2) + S_2(Y_G - Y_{G2})^2 \\ &= \frac{b_1(h_1)^3}{12} + (b_1 \times h_1)(Y_G - Y_{G1})^2 + \frac{b_2(h_2)^3}{12} + (b_2 \times h_2)(Y_G - Y_{G2})^2 \\ &= \frac{b \times (6b)^3}{12} + (b \times 6b) ((5b - 3b)^2) + \frac{8b \times b^3}{12} + (8b \times b) (5b - 6,5)^2 \end{aligned}$$

$$I_{GX} (S) = 60,67 b^4$$

6) Dimensionnement de la section de la poutre en flexion :

Pour que la poutre soit vérifiée à la flexion, il faut que :

$\sigma_{Max} < \sigma_{adm}$: La contrainte admissible à la flexion = 60 MPa

$$\text{Or : } \sigma_{Max} = (M_{max} * Y_{max}) / I_{GX} = (M_{max} * 5b) / (60,67 b^4)$$

$$\text{Donc : } (M_{max} * 5b) / (60,67 b^4) \leq \sigma_{adm}$$

$$\text{C'est-à-dire : } (M_{max}^+ / 12,134 b^3) \leq \sigma_{adm}$$

$$\text{Alors : } b^3 \geq (M_{max}^+ / 12,134 \sigma_{adm}) = (10,16 * 10^6 \text{ N.mm} / (12,134 * 60 \text{ N/mm}^2))$$

$$b^3 \geq 13955,27 \text{ mm}^3$$

$$\text{D'où : } b \geq 24,1 \text{ mm} = 2,5 \text{ cm}$$

7) Calcul de la contrainte tangentielle maximale et vérification de la poutre au cisaillement.

La contrainte tangentielle maximale dans section en T = Effort tranchant maximal / section de l'âme.

$$\text{Application numérique : } \tau_{max} = T_{max} / \text{section de l'âme} = 15000 \text{ N} / (25 * (7 * 25) \text{ mm}^2)$$

$$\tau_{max} = 3,43 \text{ MPa}$$

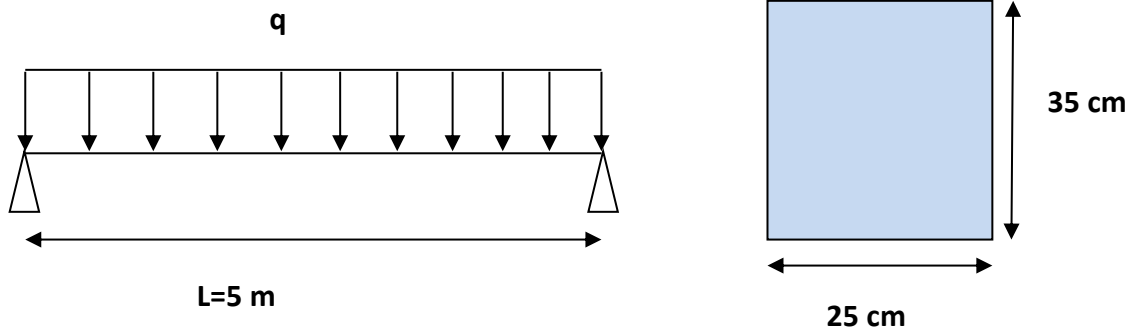
On a : $\tau_{max} = 3,43 \text{ MPa} < \text{La contrainte admissible au cisaillement} = 10 \text{ MPa}$

Donc, la poutre est vérifiée au cisaillement.

Exercice 3 :

Calculer la charge maximale q_{\max} que peut supporter la poutre dont le schéma mécanique est représenté sur la figure suivante :

On donne la contrainte admissible à la compression $\sigma = 25 \text{ MPa}$

**Solution :**

Les réactions aux appuis se calculent par : $R_A = R_B = qL/2$

L'équation de l'effort tranchant s'exprime par :

$T(x) = R_A - qx$ avec : $T(0) = R_A$ et $T(L) = R_B$ et la fonction $T(x)$ s'annule en $x = L/2$

L'équation du moment fléchissant s'exprime par :

$$M(x) = R_A x - (q/2) x^2$$

$M(0) = 0$ et $M(L) = 0$ et la fonction $M(x)$ admet une valeur extrême en $x = L/2$

$$M(L/2) = R_A (L/2) - (q/2) (L/2)^2 = (qL/2)(L/2) - (q/2) (L/2)^2 = qL^2/4 - qL^2/8 = qL^2/8$$

Dans une poutre de longueur L et qui supporte une charge uniformément répartie, les valeurs extrêmes dans la poutre sont :

$$T_{\max} = \frac{qL}{2} \quad \text{et} \quad M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$$

Pour que la poutre soit vérifiée à la compression, il faut que :

$$\sigma_{\max}^+ \leq \sigma_c \quad \text{La contrainte admissible à la compression} = 25 \text{ MPa}$$

$$\text{Avec : } \sigma_{\max} = (M_{\max} * Y_{\max}) / I_{Gx}$$

Pour la section rectangulaire, on a :

$$I_{GX} = bh^3/12 = 25 \cdot 35^3/12 = 89322,92 \text{ cm}^4 = 89322,92 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$Y_{\max} = h/2 = 17,5 \text{ cm} = 175 \text{ mm}$$

La condition s'écrit : $\sigma_{\max} = (M_{\max} \cdot Y_{\max})/I_{GX} \leq \sigma_c$

$$\text{Alors : } \left(\frac{qL^2}{8} \cdot Y_{\max} \right) / I_{GX} \leq \sigma_c \quad \text{D'où : } q \leq (\sigma_c \cdot 8 \cdot I_{GX}) / (Y_{\max} \cdot L^2)$$

Application numérique :

$$q \leq (25 \text{ MPa} \cdot 8 \cdot 89322,92 \cdot 10^4 \text{ mm}^4) / (175 \text{ mm} \cdot 5000^2 \text{ mm}^2) = 40,83 \text{ N/mm}$$

Soit : $q \leq 40,83 \text{ KN/m}$

La poutre peut supporter une charge rectangulaire maximale égale à 40,83 KN/m

Bibliographie

Ouvrage	Auteur	Édition
Cours de résistance des matériaux	R. MONTAGNER	EYROLLES
Cours de résistance des matériaux	Armand GIET (1 et 2)	DUNOD
Problèmes de RDM	Armand GIET (1 et 2)	DUNOD
Programme de RDM (OFPPT)	CDC BTP OFPPT	
RESISTANCE DES MATERIAUX DE BASE	Nouredine BOURAHLA	GECOTEC