

Chapitre 2 ANALYSE HARMONIQUE DES SIGNAUX PERIODIQUES

Dans le chapitre précédent nous avons étudié les filtres passifs et actifs du premier et du second ordre. Ils sont caractérisés tous par les fréquences de coupure et la bande passante. Ces filtres sont insérés dans les systèmes (circuits) électroniques dans lesquels ils sont attaqués par des signaux de toutes sortes.

Un de ces signaux est le *signal périodique* dont le paramètre fondamental est la fréquence de répétition du motif et est décomposable en somme (infinie) de sinusoïdaux selon le théorème de FOURIER. La fréquence est le nombre du motif (répétés) pendant une seconde de fois. Ces filtres sont rencontrés dans les systèmes de transmission et occupent une bande de fréquence relativement grande.

Comment ces filtres réagissent-ils quand ils sont attaqués par des signaux périodiques ? Quelle est la forme du signal de sortie ? Si l'analyse de FOURIER nous donne le spectre fréquentiel du signal périodique ; une étude plus complète des filtres nous donnera la forme du signal de sortie. Ainsi notre chapitre s'axera sur l'analyse spectrale du signal périodique et l'effet des filtres sur les signaux périodiques.

1- Théorème de FOURIER

1-1 Définition

Tout signal périodique $x(t)$ de période T_0 peut se décomposer en une somme infinie de signaux sinusoïdaux de fréquence multiple de $F_0 = \frac{1}{T_0}$. On dit qu'on a décomposé $x(t)$ en série de Fourier. Autrement dit :

Soit $x(t)$, une fonction périodique de période T_0 . $x(t)$ peut être représenté par sa **série de FOURIER** si elle vérifie les conditions suivantes (conditions de DIRICHLET) :

- $\langle |x(t)| \rangle$ est finie ;
- $x(t)$ a un nombre fini de discontinuité, sur sa période ;
- $|x(t)|$ a un nombre fini de maxima, sur sa période.

Alors $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{T_0+t_0} x(t) \cos(n\omega t) dt$ (2.1)

et $b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{T_0+t_0} x(t) \sin(n\omega t) dt$ (2.2)

a_n et b_n sont les coefficients de la série de FOURIER de $x(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{T_0+t_0} x(t) dt \quad (2.3)$$

a_0 est la valeur moyenne du signal $x(t)$.

$h_n = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$ est **l'harmonique de rang n** du signal $x(t)$.

L'harmonique de rang 1 est appelé le **fondamental** ou **l'harmonique fondamentale** du signal $x(t)$.

Les suites a_n et b_n sont des réelles

N.B : les bornes de l'intégration sont généralement 0 et T_0 , mais elles peuvent choisies arbitrairement, en particulier si les nouvelles bornes de l'intégration facilitent les calculs, à condition de couvrir une période, par exemple, $[-\frac{T_0}{2}; +\frac{T_0}{2}]$.

Exemple 2.1 : Déterminer la série de FOURIER du signal représenté ci-dessous :

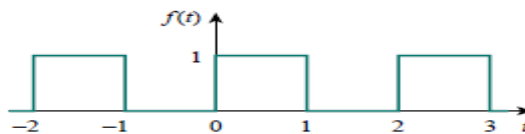


Fig1.1 Signal de l'Exemple 2.1

Notre objectif est de calculer coefficient de la série de FOURIER en utilisant les équations (2.1), (2.2) et (2.3). D'abord nous décrivons le signal

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad . f(t) = f(t+T) \text{ nous donne } T = 2 \text{ s et } \omega_0 = 2\pi/T = \pi \text{ (rad/s)}$$

L'équation (2.3) nous donne $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 1 dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{2} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Utilisant l'éq. (2.1) nous avons

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 1 \cos n\pi t dt + \int_1^2 0 \cos n\pi t dt \right] = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi = 0$$

De même de l'éq. (2.2) nous calculons b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 1 \sin n\pi t dt + \int_1^2 0 \sin n\pi t dt \right] = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1), \quad \cos n\pi = (-1)^n = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ impaire} \\ 0, & n \text{ paire} \end{cases}$$

On obtient $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi t + \dots$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, \quad n = 2k - 1$$

Exemple 2.2 : Déterminer les coefficients de FOURIER du signal suivant :

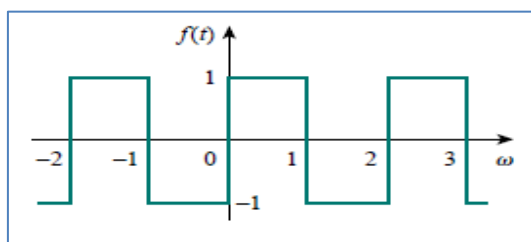


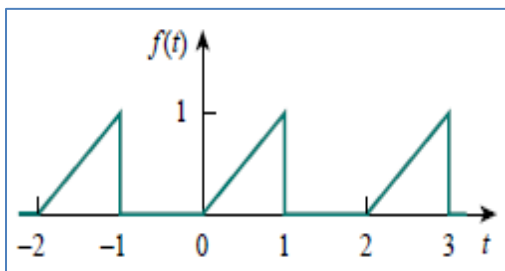
Fig1.2 Signal de l'Exemple 2.2

Réponse : $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, n = 2k - 1.$

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.1

Exercice de niveau 1 n° 1

1- Soit le signal suivant



- 1- Donner une écriture mathématique de $f(t)$.
- 2- Déterminer sa période et sa pulsation.
- 3- Calculer la valeur moyenne de $f(t)$.
- 4- Calculer les coefficients de FOURIER de $f(t)$.
- 5- Calculer $\lim_{t \rightarrow \infty} a_n$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} b_n$. Conclure.
- 6- Représenter a_n et b_n en fonction de n

2- Soit les signaux suivants

1- $x(t) = A |\cos(20t)|$

2

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -\tau_0/2 < t < -\tau_0/4 \\ 2 & \text{for } -\tau_0/4 \leq t < \tau_0/4 \\ 1 & \text{for } \tau_0/4 \leq t < \tau_0/2 \end{cases}$$

- 1- Représenter $f(t)$ sur trois périodes.
- 2- Déterminer sa période et sa pulsation(si possible).
- 3- Calculer la valeur moyenne de $f(t)$.
- 4- Calculer les coefficients de FOURIER de $f(t)$.
- 5- Calculer $\lim_{t \rightarrow \infty} a_n$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} b_n$. Conclure.
- 6- Représenter a_n et b_n en fonction de n .

1.1.1 Expression en cosinus du développement en série de FOURIER

Prenant en compte la relation trigonométrique suivante :

$$h_n = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = d_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (2.4) \text{ avec}$$

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.5) \text{ et } \varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ (+}\pi \text{ si } a_n < 0) \quad (2.6)$$

nous trouvons une nouvelle expression appelée *expression en cosinus de x(t)* et

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [d_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)] \quad (2.7) ; d_0 = a_0$$

Le terme d_n est *l'amplitude* de l'harmonique h_n et φ_n est *la phase à l'origine* de l'harmonique h_n . d_0 est l'amplitude de composante continue de $x(t)$. La représentation de d_n et φ_n en fonction de f_0 (ou en fonction de n) est appelée *spectre fréquentiel unilatéral* de $x(t)$. Ici, les fréquences sont positives ou nulles car le compteur n des harmoniques varie de 0 à $+\infty$. Les termes d_n sont des nombres réels positifs ou nuls.

Cette série en cosinus est extrêmement importante car elle correspond à la description bien connue des signaux en régime sinusoïdal permanent où l'on représente un courant ou une tension par leur amplitude et leur phase. D'un point de vue pratique, cela revient à considérer que le signal $x(t)$ est créé de manière équivalente par une infinité de générateurs sinusoïdaux.

Exemple 2.3 Déterminer les amplitudes et phases du signal de l'exemple 1

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ impaire} \\ 0, & n \text{ paire} \end{cases}$$

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.2

et

$$\varphi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} -90^\circ, & n \text{ impaire} \\ 0, & n \text{ paire} \end{cases}$$

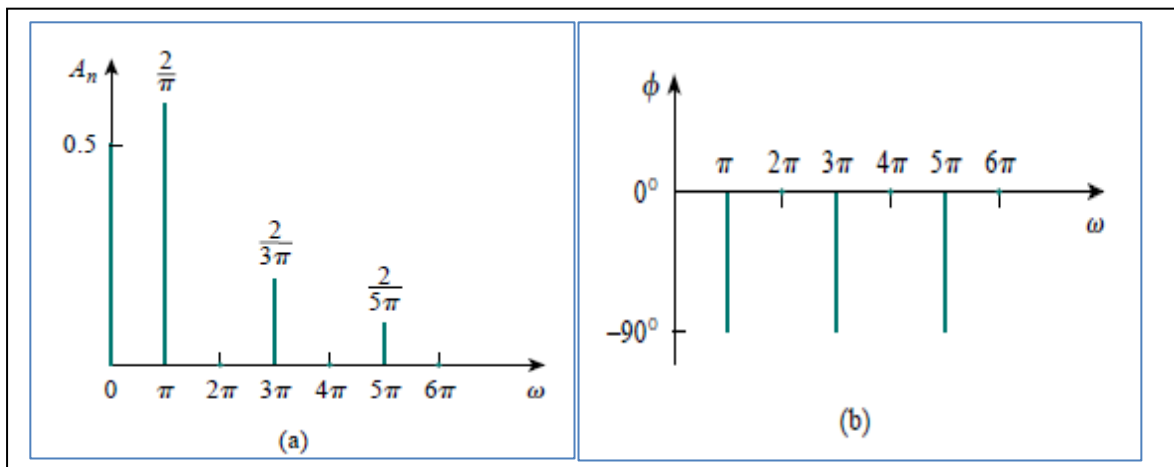


Fig1.3 Représentation spectrale de $x(t)$: a) spectre des amplitudes b) spectre des phases

Exercice de niveau 1 n° 2

- 1- Déterminer et représenter le spectre unilatéral de l'Exemple 2.2
- 2- Déterminer et représenter le spectre unilatéral de l'Exercice de niveau 1 n° 1

1.1.2 Expression complexe ou exponentielle du développement en série de FOURIER

En se souvenant des formules d'EULER :

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}]$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}]$$

En substituant ces deux formules dans l'équation (2.0) nous obtenons

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}]$$

Nous définissons un nouveau c_n coefficient appelé *coefficient complexe* ou *exponentiel* de $f(t)$

$$c_n = a_0 \quad (2.8), \text{ et pour } n \neq 0 \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (2.8), \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad (2.9)$$

$f(t)$ devient :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \quad (2.10)$$

ou

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) est *la série complexe ou exponentielle de $f(t)$* . Bien que c_n puisse s'obtenir à partir de l'équation (2.8) il s'obtient directement par la relation (2.12) :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.12)$$

et

$$|c_n| = \frac{d_n}{2} \quad (2.13) \text{ et } \theta_n = \arg(c_n) = \varphi_n \quad (2.14)$$

La représentation de $|c_n|$ et θ_n en fonction de f_0 (ou en fonction de n) est appelée *spectre fréquentiel bilatérale* de $x(t)$. Ici, les fréquences sont positives ou négatives car le compteur n des harmoniques varie de $-\infty$ à $+\infty$. Les termes $|c_n|$ sont des nombres réels positifs ou nuls.

Dans le cas des spectres bilatéraux, on notera que les spectres d'amplitudes sont toujours des fonctions paires car on a : $|c_n| = |c_{-n}| = \frac{d_n}{2}$ alors que les spectres de phases sont toujours des fonctions impaires. On a en effet $\theta_{-n} = -\theta_n$.

On remarquera au passage que la formule d'Euler remplace les fonctions sinus et cosinus par des exponentielles à exposant imaginaire appelées *phaseurs*. Ces phaseurs ne sont rien d'autres que des fonctions complexes oscillant cosinusoidalement sur l'axe réel et sinusoidalement sur l'axe imaginaire.

Exemple 2.4 Déterminer les coefficients complexe du signal de la Fig1.4

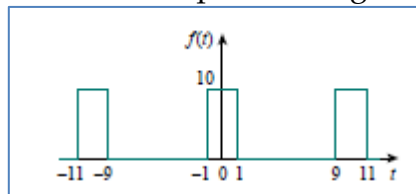


Fig 1.4 Signal de l'Exemple 2.4

La période du signal est $T = 10$ s ainsi $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/5$ (rad/s). En utilisant l'équation (2.12) nous avons

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{10} \int_{-1}^1 10 e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{-jn\omega_0} (e^{-jn\omega_0} - e^{jn\omega_0}) \\ &= \frac{2}{n\omega_0} \frac{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{2j} = 2 \frac{\sin n\omega_0}{n\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{5} \\ &= 2 \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5} \end{aligned}$$

et

$$f(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5} e^{jn\pi t/5}$$

Le spectre des amplitudes et des phases est

$$|c_n| = 2 \left| \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5} \right|$$

et

$$\theta_n = \begin{cases} 0^\circ, & \sin \frac{n\pi}{5} > 0 \\ 180^\circ, & \sin \frac{n\pi}{5} < 0 \end{cases}$$

La représentation du spectre bilatéral est le suivant :

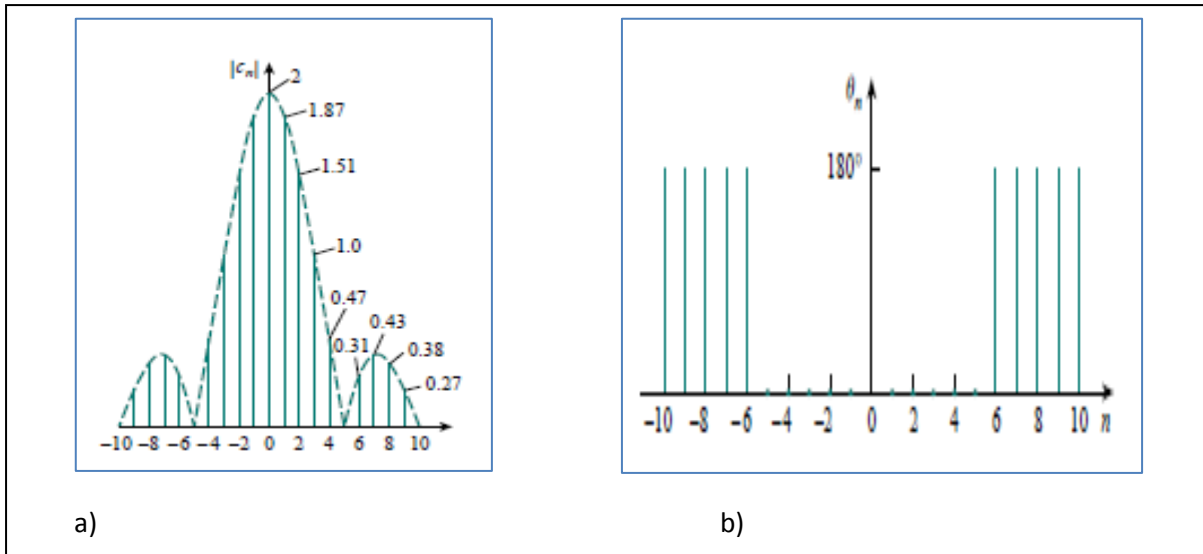


Fig1.5 Spectre bilatérale a) le spectre des amplitudes b) le spectre des phases

Exemple 2.5 Déterminer les coefficients complexes du signal $f(t)$ défini par

$$f(t) = e^t, 0 < t < 2\pi \text{ avec } f(t + 2\pi) = f(t).$$

$T = 2\pi$ (s) ce qui donne $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ (rad/s). Tout calcul fait nous donne $c_n = \frac{85}{1-jn}$ et l'expression complexe de

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{85}{1-jn} e^{jnt}$$

Le spectre est donné par les graphes suivants

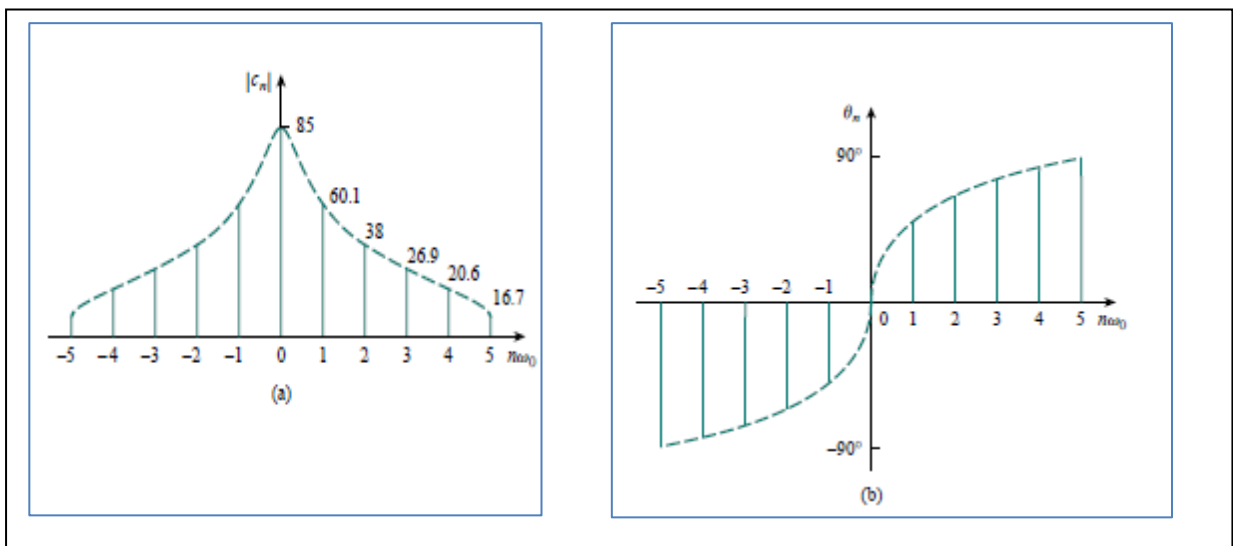


Fig1.6 Spectre bilatérale a) le spectre des amplitudes b) le spectre des phases

Exemple 2.6 Déterminer les coefficients complexes du signal $f(t)$ défini par

$$f(t) = e^t, 0 < t < 1 \text{ avec } f(t+1) = f(t).$$

$T = 1\text{s}$ ce qui donne $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$ (rad/s). Tout calcul fait nous donne

On a
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{1} \int_0^1 t e^{-j2n\pi t} dt$$

Après une intégration par partie
$$c_n = \frac{-j2n\pi}{-4n^2\pi^2} = \frac{j}{2n\pi}$$

Ce calcul ne prend pas en compte le $n = 0$; calculons donc c_0

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{1} \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 0.5$$

Ainsi
$$f(t) = 0.5 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{j}{2n\pi} e^{j2n\pi t}$$

$$|c_n| = \begin{cases} \frac{1}{2|n|\pi}, & n \neq 0 \\ 0.5, & n = 0 \end{cases}, \quad \theta_n = 90^\circ, \quad n \neq 0$$

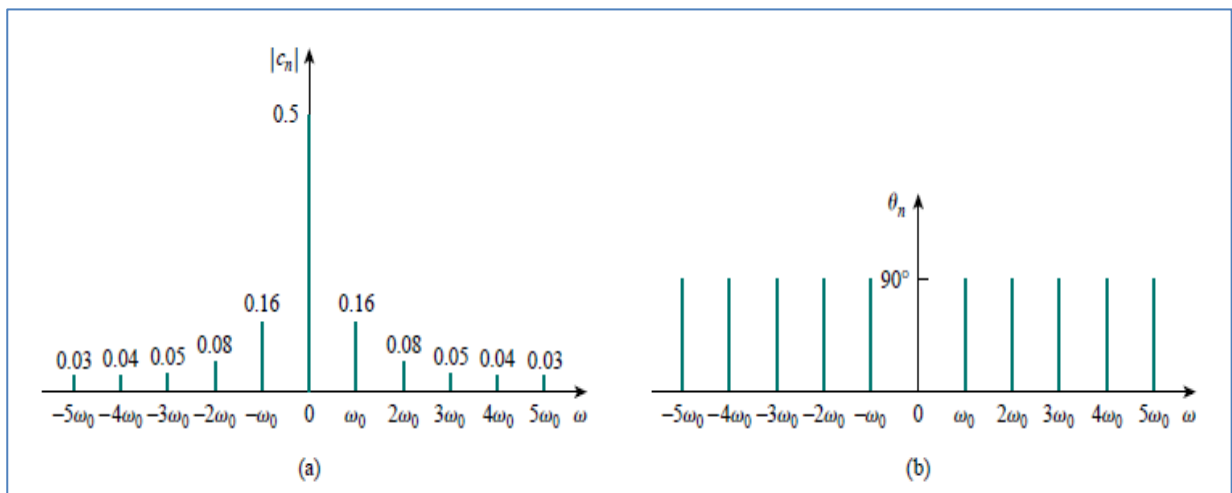
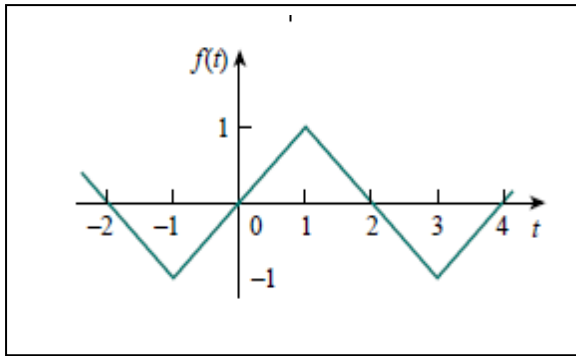


Fig1.8 (a) spectre des amplitudes (b) spectre des phases

Exemple 2.7 Déterminer les coefficients complexes du signal $f(t)$ défini par le graphe suivant :



$$f(t) = t, -1 < t < 1.$$

$$T = 4s, \omega_0 = 2\pi/T = \pi/2 \text{ (rad/s)}.$$

$$f(t) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{n\pi} e^{jn\pi t}.$$

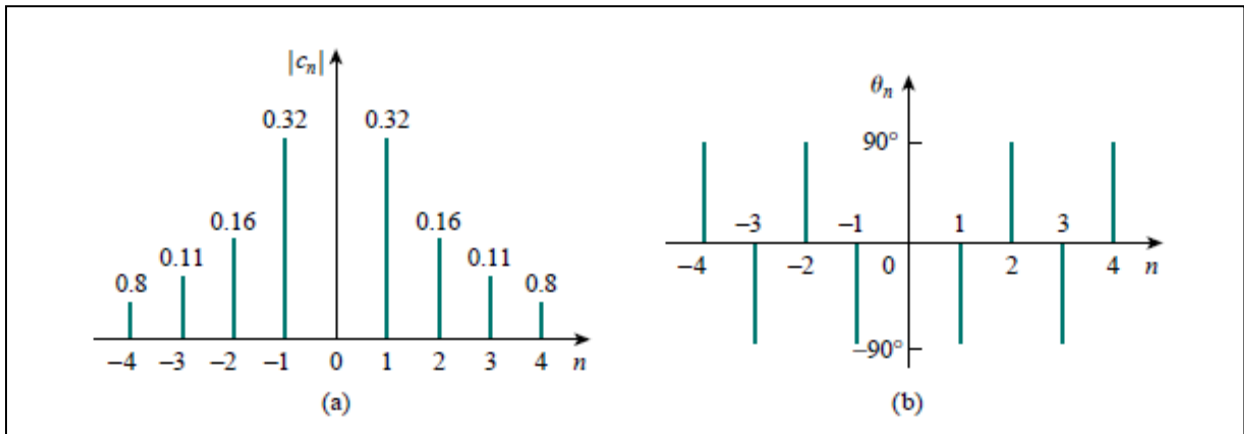


Fig1.9 (a) spectre des amplitudes (b) spectre des phases

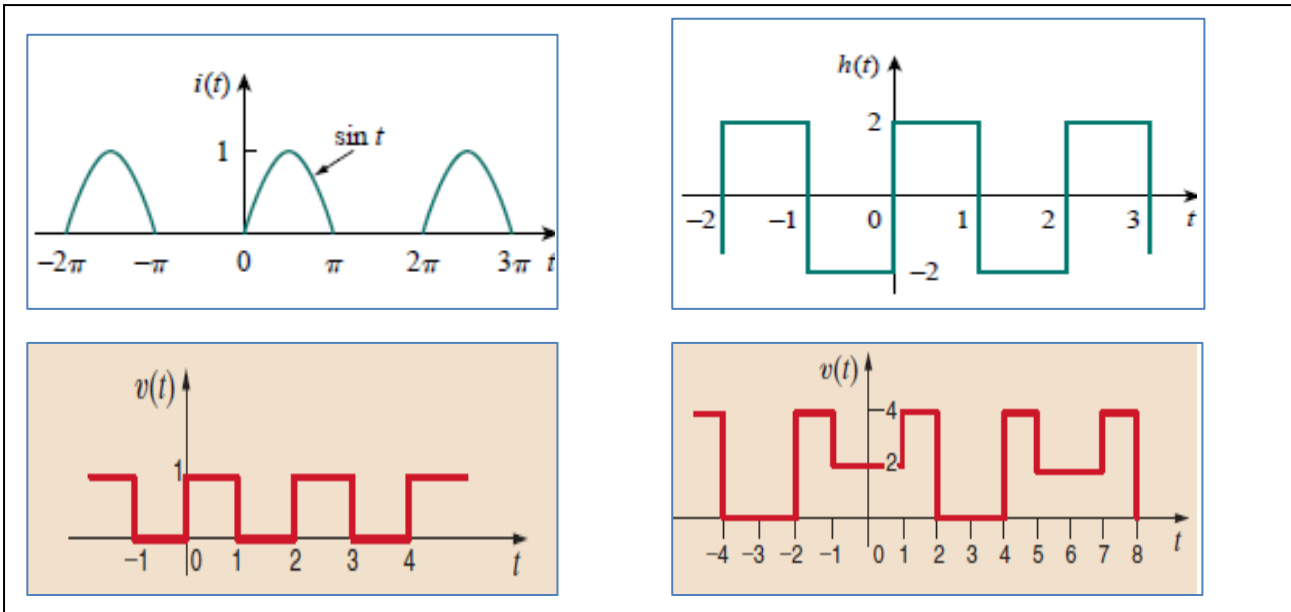
Exercice de niveau 1 n° 3

1- Pour les signaux suivants

$f(t) = t^2, -\pi < t < \pi, \text{ avec } f(t + 2\pi n) = f(t)$ $g(t) = e^t, -\pi < t < \pi, \text{ avec } f(t + 2\pi n) = f(t)$	<ol style="list-style-type: none"> 1- Donner la représentation sur trois périodes. 2- Déterminer la période et la pulsation 3- Calculer c_0. 4- Calculer les coefficients complexes de FOURIER. 5- Calculer l'amplitude et la phase. 6- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Conclure. 7- Représenter le spectre bilatéral.
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2- Pour les signaux suivants

- 1- Donner l'écriture mathématique.
- 2- Déterminer la période et la pulsation
- 3- Calculer c_0 .
- 4- Calculer les coefficients complexes de FOURIER.
- 5- Calculer l'amplitude et la phase.
- 6- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|$. Conclure.
- 7- Représenter le spectre bilatéral.



2- Propriétés des séries de FOURIER

2-1 Propriétés de parité

2-1.1 Fonction paire

Un signal f T_0 -périodique est paire si : $\forall t \in D_f \rightarrow -t \in D_f$ et $\forall t, f(t) = f(-t)$.

Si f est développable en série de Fourier et paire alors f est développable en série de cosinus : $\forall t, f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)]$ et

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{\frac{T_0}{2} + t_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_{t_0}^{\frac{T_0}{2} + t_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2} \forall n \geq 0$$
(2.15)

Les bornes de l'intégration peuvent être choisies arbitrairement seulement il faut que la longueur de l'intervalle soit égale à $T/2$. La figure suivante donne des exemples typiques de fonctions paires fréquemment utilisées.

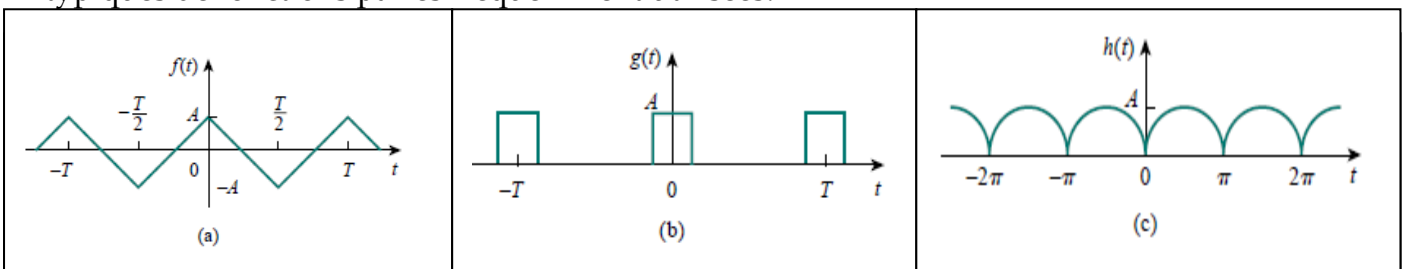


Fig. 2.1 (a) Exemples typiques de signaux pairs

Exemple 2.8 Déterminer les coefficients complexes du signal $f(t)$ défini par le graphe suivant

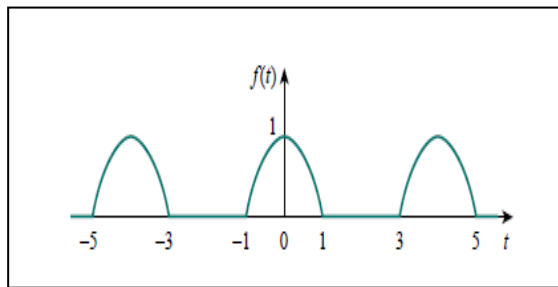


Fig. 2.2 Figure de l'Exemple 2.8

Ce signal est paire alors $b_n = 0, \forall n \geq 0$. $T_0 = 4s$, $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$ (rad/s). L'écriture mathématique de f est

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), & -1 < t < +1 \\ 0, & +1 < t < +2 \end{cases}$$

Sa valeur moyenne est $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} f(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = 1/\pi$.

Pour $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos \pi t + 1] dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi t}{\pi} + t \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{4} \int_0^2 f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right) dt$$

Or $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ donc

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos \frac{\pi}{2} t (n+1) + \cos \frac{\pi}{2} t (n-1)] dt = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

Si n est pair ($n=2k, k \in \mathbb{N}$) alors

$$\sin \frac{\pi}{2} (n+1) = \sin \frac{\pi}{2} (2k+1) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \quad \text{et}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} (n-1) = \sin \frac{\pi}{2} (2k-1) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Si n est impair ($n=2k+1, k \in \mathbb{N}^*$) alors

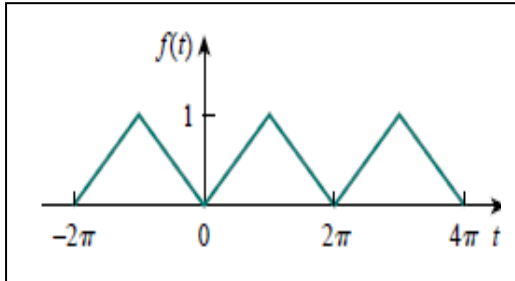
$$\sin \frac{\pi}{2} (n+1) = \sin \frac{\pi}{2} (2k+2) = \sin((k+1)\pi) = 0 \quad \text{et}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} (n-1) = \sin \frac{\pi}{2} (2k-2) = \sin((k-1)\pi) = 0$$

Ainsi $a_n = -\frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}$ avec $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. Finalement

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2-1)} \cos(k\pi t)$$

Exemple 2.8 Déterminer la série de FOURIER du signal suivant



f est paire de période $T = 2\pi$ (s) et $\omega_0 = 1$ rad/s.

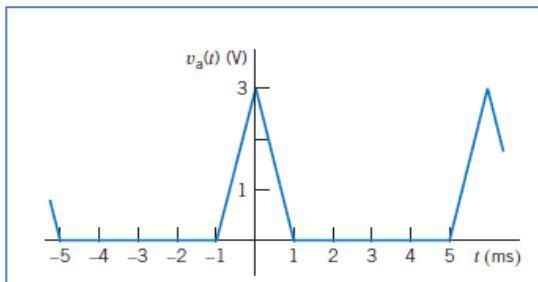
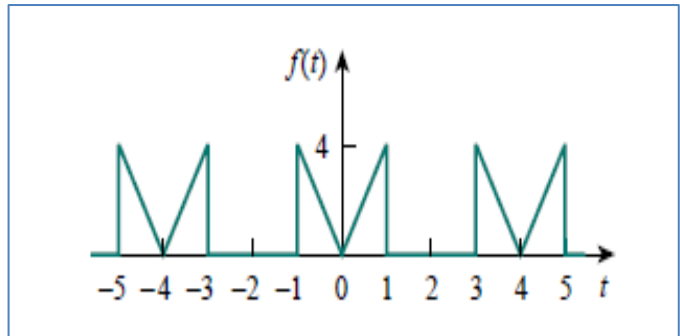
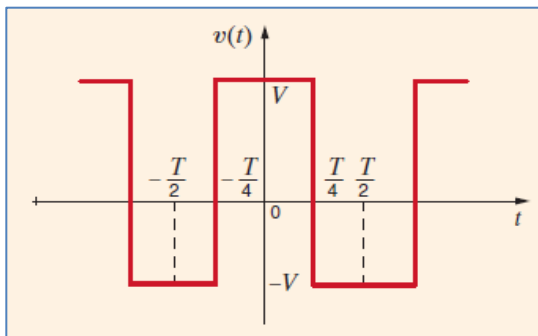
Tout calcul bien fait conduit à :

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t$$

Fig.2.3 Exemple 2.8

Exercice de niveau 1 n° 4

Pour les signaux pairs suivants :



- 1- Donner l'écriture mathématique.
- 2- Déterminer la période et la pulsation
- 3- Calculer a_0 .
- 4- Calculer a_n
- 5- Ecrire la série de FOURIER du signal

2-1.1 Fonction impaire

Un signal f T_0 -périodique est impaire si :

$$\forall t \in D_F \rightarrow -t \in D_F \text{ et } \forall t, f(t) = -f(-t).$$

Si f est développable en série de Fourier et paire alors f est développable en série de sinus : $\forall t, f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_0 t)]$ et

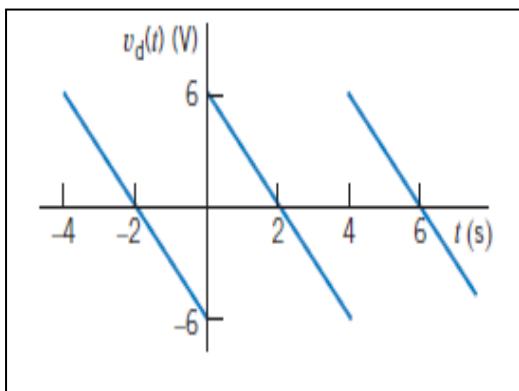
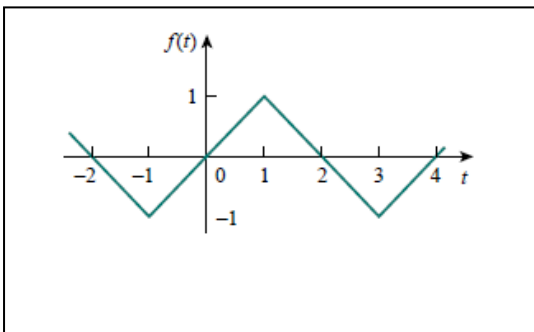
$$a_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_{t_0}^{\frac{T_0}{2} + t_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \forall n \geq 0 \quad (2.16)$$

$$c_n = -c_{-n} = -\frac{1}{2} j b_n, \forall n \geq 0$$

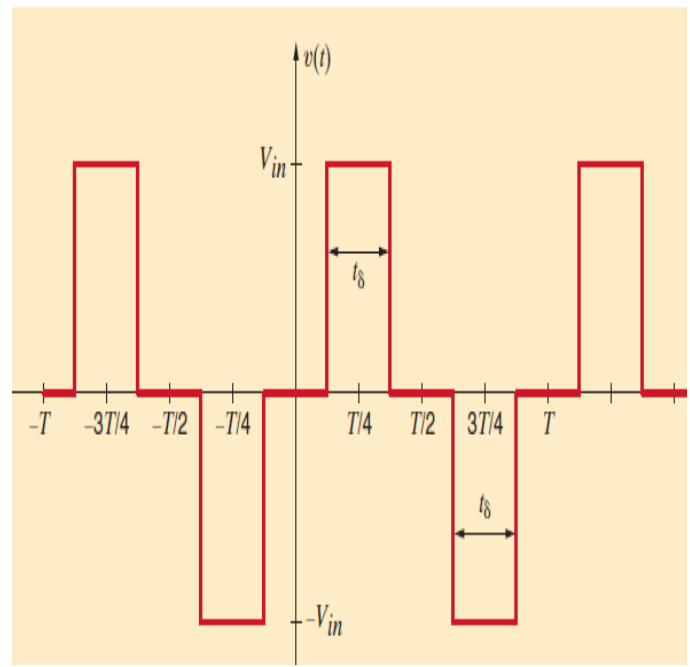
Exercice de niveau 1 n° 5

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.5



On prendra

$$\omega_0 t_\delta = \delta$$



- 1- Donner l'écriture mathématique.
- 2- Déterminer la période et la pulsation
- 3- Calculer b_n
- 4- Ecrire la série de FOURIER du signal

2.1.3 Propriétés de la symétrie glissante ou demi-onde

Un signal f T_0 -périodique a une symétrie glissante : $\forall t \in D_f \rightarrow t \pm \frac{T_0}{2} \in D_f$ et

$$\forall t, f\left(t - \frac{T_0}{2}\right) = -f(t).$$

Si f est développable en série de Fourier et a une symétrie glissante alors f est développable en série et :

- Les coefficients à indices paires sont tous nuls : $a_n = b_n = 0$ avec $n = 2k, k \in \mathbb{N}$
- Les coefficients à indices impaires sont donnés par

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \quad (2.18)$$

Graphiquement, en faisant « glisser » (Fig2.4) d'une demi-période la partie du signal compris entre t_0 et $t_0 + T_0/2$, on observe une symétrie par rapport à l'axe des temps.

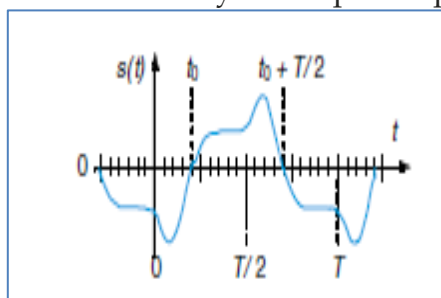


Fig.2.4 Exemple symétrie glissante

La figure suivante donne des exemples de signaux à symétrie glissante

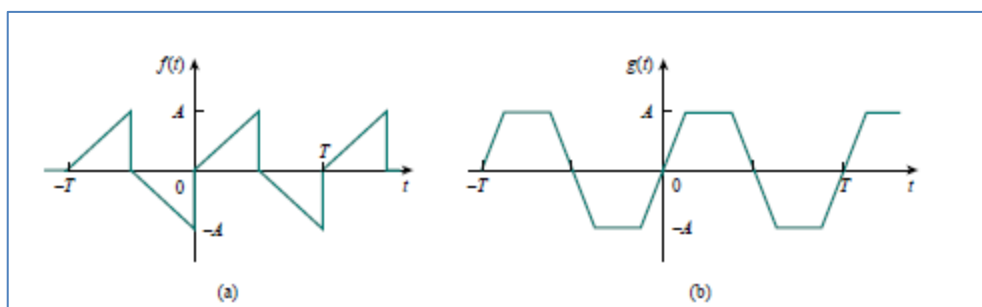


Fig.2.5 Exemple de signaux à symétrie glissante

2.3 Propriétés du décalage temporel ou translation temporel

Soit un signal f T -périodique. Le signal décalé de τ est $g(t) = f(t - \tau)$.

On a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{jn\omega_0 t}$ avec $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ et

$$g(t) = f(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{jn\omega_0(t-\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g) e^{jn\omega_0 t}$$

donc

$$c_n(g) = c_n(f) e^{-jn\omega_0 \tau} \quad (2.19)$$

En conséquence, le spectre d'amplitude est indépendant de l'origine des temps choisie contrairement au spectre de phase qui en dépend. Cette remarque peut être mise à profit pour :

- 1) Dédire le spectre de phase du signal décalé $s(t - \tau)$ à partir de celui de $s(t)$ en ajoutant $-2\pi n\tau/T$ à φ_n pour chaque terme ; **le décalage temporel correspond à un décalage de la phase dans le domaine fréquentiel ;**
- 2) Simplifier le calcul des coefficients en suivant la procédure suivante :

- Décaler arbitrairement le signal $s(t)$ de τ pour faire apparaître une symétrie afin de simplifier les calculs ;
- Déterminer le développement en série de Fourier du signal décalé $s(t - \tau)$;
- En déduire le développement en série de Fourier du signal $s(t)$ à partir de celui de $s(t - \tau)$ sachant que $s(t)$ et $s(t - \tau)$ ont même spectre d'amplitude et que le spectre de phase de $s(t)$ s'obtient en ajoutant $+2\pi n\tau/T$ à chaque terme de phase de $s(t - \tau)$.

Remarque : Si on ne s'intéresse qu'au spectre d'amplitude, il suffit de décaler arbitrairement le signal $s(t)$ de τ pour faire apparaître une symétrie, puis de déterminer le développement en série de Fourier du signal décalé $s(t - \tau)$.

2.4 Propriétés du décalage de niveau ou translation niveau

Soit un signal f T -périodique. La translation de niveau de E est le signal est $g(t) = E + f(t)$.

On a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{jn\omega_0 t}$ avec $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ alors

$$c_n(g) = c_n(f), \forall n \neq 1 \text{ et } c_0(g) = c_0(f) + E \quad (2.20)$$

2.5 Propriétés de la dérivation

Soit un signal f T - périodique et dérivable. Le signal f et f' sa dérivée f' sont développables en série de Fourier, alors le développement en série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f .

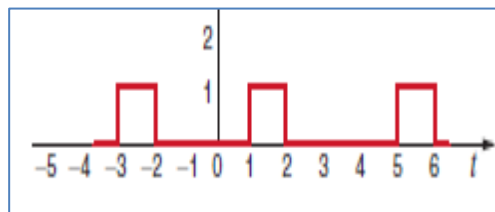
On a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{jn\omega_0 t}$ avec $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ alors

$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} jn\omega_0 c_n(f) e^{jn\omega_0 t}$ donc

$$c_n(f') = jn\omega_0 c_n(f) \quad (2.21)$$

Exercice de niveau 1 n° 6

Soit $x(t)$ un signal suivant



- 1- Donner l'écriture mathématique.
- 2- Calculer les coefficients complexes de FOURIER.
- 3- En déduire ses coefficients a_n et b_n .

Pour chacun des signaux suivants

- $x(t-\theta)$ avec $\omega_0 \theta = \pi/6$;
- $x'(t) + E$ avec $E = 3A$

déterminer

- a) Les coefficients complexes de FOURIER et en déduire les coefficients réels de FOURIER.
- b) Le spectre d'amplitude et de phase.
- c) Représenter le spectre bilatéral.

4 Puissance des signaux périodiques

4.1 Puissance moyenne absorbée par un dipôle

Un dipôle D est traversé par un courant périodique $i(t)$ et aux bornes duquel règne une tension $v(t)$ (périodique) alors

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v_n})$$

avec $\omega_0 = 2\pi/T_0$ et $V_{dc} = \langle v(t) \rangle$

Et

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i_n})$$

et $I_{dc} = \langle i(t) \rangle$

La puissance moyenne absorbée par D sur une période est :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} p(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} v(t)i(t) dt$$

$$P = V_{dc} * I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n})$$

(2.22)

Cette relation (2.22) montre que la puissance absorbée par un dipôle est la somme des puissances absorbées due à chaque harmonique.

Exemple 2.9 Calcul de puissance

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.7, 8

La tension aux bornes d'un dipôle et le courant le traversant sont donnés par :

$$v(t) = 80 + 120 \cos(120\pi t) + 60 \cos(360\pi t - 30^\circ) \text{ V et}$$

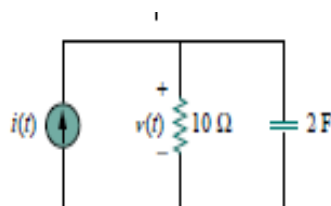
$$i(t) = 5 \cos(120\pi t - 10^\circ) + 2 \cos(360\pi t - 60^\circ) \text{ A.}$$

La puissance moyenne est donnée par la relation (2.22)

$$P = 80 * 0 + (120 * 5) \cos(10^\circ) / 2 + (60 * 2) \cos(30^\circ) / 2 = 374.4 \text{ W}$$

Exemple 2.10 Calcul de puissance

Soit le réseau électrique suivant :



Déterminer la puissance absorbée ce réseau si

$i(t) = 2 + 10 \cos(2\pi\omega t + 10^\circ) + 6\cos(6\pi\omega t + 45^\circ)$ A. Pour calculer la puissance absorbée par le circuit nous devons déterminer V_n .

L'impédance du réseau est $Z = Z_R // Z_C = R / (1 + j\omega RC) = 10 / (1 + 20j\omega)$ ainsi

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} = 10\mathbf{I} / (1 + 20j\omega).$$

$i(t)$ est composée de trois pulsations. Pour chacune des calculons le module et la phase de V dans le domaine complexe :

Pour $n = 0$, la composante continue $\mathbf{V} = 10\mathbf{I} = 10 \cdot 2 = 20$ V. En effet en continu le condensateur se comporte comme un circuit ouvert, la tension est aux bornes de R.

$$\text{Pour } n = 1, \mathbf{I} = 10e^{j10} \text{ A} \rightarrow \mathbf{V} = 10(10e^{j10}) / (1 + 20j) = 5 e^{-j77.14} \text{ V}$$

$$\text{Pour } n = 3, \mathbf{I} = 10e^{j45} \text{ A} \rightarrow \mathbf{V} = 10(10e^{j45}) / (1 + 60j) = 5 e^{-j44.05} \text{ V}$$

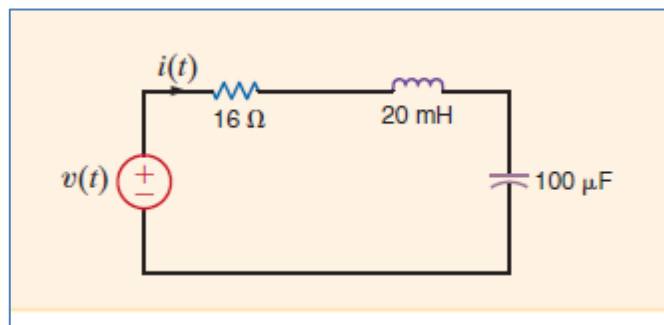
Donc dans le domaine temporel $v(t) = 20 + 5 \cos(2\pi\omega t - 77.4^\circ) + \cos(6\pi\omega t - 44.05^\circ)$ V

$$\text{En fin } P = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 \cos(-77.14^\circ - 10^\circ) / 2 + 1 \cdot 6 \cos(-44.05^\circ - 45^\circ) / 2 = 41.35 \text{ W.}$$

Exercice de niveau 1 n° 7

Calculer le courant $i(t)$ et la puissance absorbée le réseau suivant si

$$v(t) = 42 + 16 \cos(377t + 30^\circ) - 12 \cos(754t - 20^\circ) \text{ V.}$$



Exercice de niveau 1 n° 8

À l'entrée d'un réseau électrique, la tension $v(t)$ et le courant $i(t)$ sont donnés par les expressions suivantes:

$$i(t) = 1.8 \cos(377t + 45^\circ) + 1.2 \cos(754t + 100^\circ) \text{ A}$$

$$v(t) = 64 + 36 \cos(377t + 60^\circ) - 24 \cos(754t + 102^\circ) \text{ V}$$

Trouver la puissance absorbée par ce réseau.

4.2 Valeur efficace et théorème de Parseval

Rappel sur la valeur efficace :

- 1- La valeur efficace d'un courant périodique est égale à la valeur d'un courant continu fictif qui produirait la même quantité de chaleur (même énergie apportée) dans une même résistance et pendant une période.

$$\Delta W_{\text{Apportée}} = \int_0^T Ri^2 dt \Rightarrow I_{\text{Eff}}^2 = \frac{\Delta W_{\text{Apportée}}}{RT} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$$

$$\Rightarrow P = \frac{\Delta W_{\text{Apportée}}}{T} = RI_{\text{Eff}}^2$$

- 2- À la place du qualificatif « efficace », on utilise souvent l'abréviation anglo-saxonne « R.M.S. » qui signifie « Root Mean Square » et qui se traduit littéralement par « racine de la moyenne du carré ».
- 3- La valeur efficace S_{Eff} d'un signal périodique $s(t)$ de période T est donnée par :

$$S_{\text{Eff}}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt$$

- 4- Attention, la valeur efficace d'une somme est, en général, différente de la somme des valeurs efficaces. On a :

$$\langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + 2\langle s_1 s_2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle = S_{1\text{Eff}}^2 + 2\langle s_1 s_2 \rangle + S_{2\text{Eff}}^2$$

Soit f un signal périodique développable en série de FOURIER :

$$f_{\text{eff}}^2 = F^2 = \langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f^2(t) dt \quad (2.23)$$

F^2 s'obtient par la formule de BESSEL-PARSEVAL :

$$F^2 = \langle f^2(t) \rangle = d_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.24)$$

$$F^2 = \langle f^2(t) \rangle = F_{DC}^2 + F_{AC}^2 \quad (2.25)$$

Avec F_{DC}^2 : la valeur efficace de la composante continue

F_{AC}^2 : la valeur efficace des harmoniques

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.9, 10, 11

Si $f(t)$ est le courant traversant la résistance R , alors la puissance moyenne (normalisée) dissipée est $P = RF^2$. Ou si $f(t)$ est la tension à ses bornes alors $P = F^2 / R$. En choisissant $R = 1\Omega$ alors $P_{1\Omega} = F^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$. On retrouve bien le théorème de BESSEL-PARSEVAL dont nous tirons plusieurs interprétations :

1- Cette identité de Parseval exprime que l'énergie totale sur une période est égale à la somme des énergies de chaque harmonique ou que la puissance est la somme des puissances de chaque harmonique ;

2- L'énergie ou la puissance se répartit sur les toutes les harmoniques ;

3- L'énergie ou la puissance d'un signal périodique est la même le domaine temporel que fréquentiel. L'énergie n'est donc pas liée au domaine d'étude mais au signal lui-même.

Les unités de la puissance normalisée ne s'expriment donc pas en [W], mais par exemple en [V²] ou [A²] selon que le signal est une tension ou un courant électrique.

Exemple 2.11

Calculer la puissance moyenne dissipée dans une résistance de 100Ω , aux bornes desquelles la tension est de la forme :

$$u(t) = 4 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) + 2 \sin(2\omega t) + \sin(3\omega t).$$

La puissance moyenne dissipée dans un conducteur ohmique est : $P = (U_{\text{eff}})^2 / R$ où U_{eff} est la tension efficace aux bornes de R . La relation (2.24) nous donne

$$(U_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{2} (4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2) = 15 \text{ V}^2 \text{ donc } P = (U_{\text{eff}})^2 / R = 0.15 \text{ W}$$

Exemple 2.12

Calculer la valeur efficace du courant périodique $i(t) = 8 + 30 \cos 2t - 20 \sin 2t + 15 \cos 4t - 10 \sin 4t$ A

$$I_{\text{eff}}^2 = 8^2 + \frac{1}{2} (30^2 + (-20)^2 + 15^2 + (-10)^2) = 876.5 \text{ A}^2 \text{ donc } I_{\text{eff}} = 29.61 \text{ A}$$

Exercice de niveau 1 n° 9

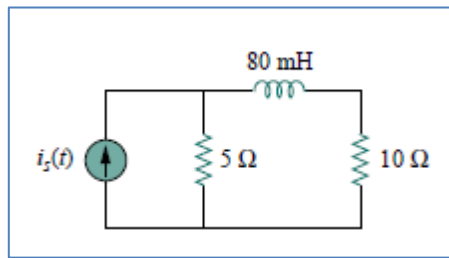
La tension aux bornes d'un dipôle est $v(t) = 30 + 20 \cos(60\pi t + 45^\circ) + 10 \cos(120\pi t - 45^\circ)$ V et le courant le traversant est $i(t) = 6 + 4 \cos(60\pi t + 10^\circ) - 2 \cos(120\pi t - 60^\circ)$ A

Déterminer :

- la valeur efficace de la tension,
- la valeur efficace du courant,
- la puissance moyenne absorbée par le dipôle.

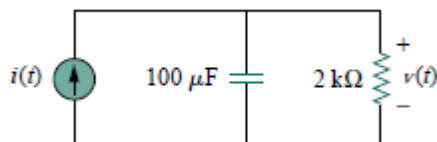
Exercice de niveau 1 n° 10

Calculer la puissance dissipée par la résistance de 10Ω si $i(t) = 3 + 2 \cos(50t - 60^\circ) + 0.5 \cos(100t - 120^\circ)$ A



Exercice de niveau 1 n° 11

Pour le circuit suivant, déterminer $v(t)$ et calculer la puissance moyenne dissipée par la résistance si $i(t) = 20 + 16\cos(10t + 45^\circ) + 12\cos(20t - 60^\circ)$ mA



4.3 Taux de distorsion harmonique

D'un point de vue spectral, la caractéristique remarquable des systèmes non-linéaires est de déformer les signaux sinusoïdaux. Le signal de sortie d'un système non-linéaire qui serait ainsi soumis à une entrée sinusoïdale pure est donc, tout en restant périodique, non-sinusoïdal. Il s'ensuit que son spectre est constitué d'un grand nombre de raies spectrales, alors qu'à l'entrée il n'y avait qu'une seule raie.

Dans la pratique, il est important de pouvoir chiffrer cette déformation puisque les amplificateurs réels, quelle que soit leur qualité, possèdent des non-linéarités. On mesure cette déformation à l'aide du **taux de distorsion harmonique** (TDH). Celui-ci est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques d'ordre supérieur à 1 avec la valeur efficace du premier harmonique :

$$T_{DH} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} d_n^2}{d_1^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}}{d_1} \quad (2.26)$$

Exemple 2.13

Considérons le schéma suivant

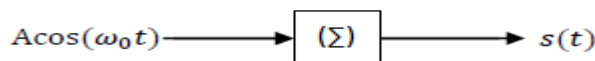


Fig.2.6 Exemple 2.13

Si est (Σ) un système linéaire (amplificateur), la sortie $s(t)$ a forme sinusoïdale (pas de déformation). Dans ce cas le TDH $\gg 1$.

- Si est (Σ) un système linéaire (redresseur par exemple), la sortie $s(t)$ sest constitué d'une infinité d'harmoniques ; n'a pas une forme sinusoïdale. Dans ce cas le TDH $\ll 1$.

5-Synthèse des signaux

5.1 Signal continu

Notons $s_{Fn}(t)$ la série de FOURIER d'un signal périodique continu $s(t)$, limitée à ses n premiers termes. Lorsque n tend vers l'infini $s_{Fn}(t)$ tend vers $s(t)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{Fn}(t) = s(t)$. Lors de la synthèse d'un tel signal, la somme des premiers harmoniques $s_{Fn}(t)$ suffit pour représenter de façon suffisante, comme le montre les fig.2.6 a et b où les signaux présentent, cependant, une discontinuité de pente.

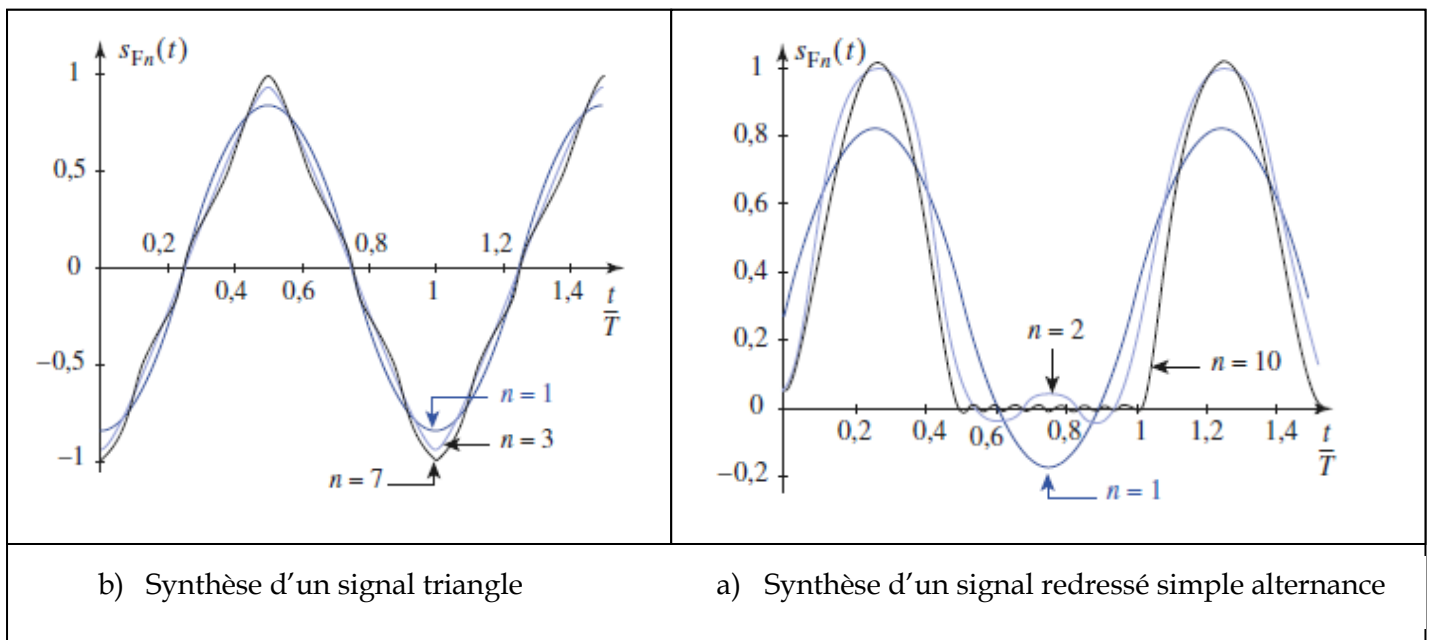


Fig.2.6 Synthèse de signaux

Une bande passante limitée suffira généralement à la transmission d'un signal périodique continu.

5.2 Signal discontinu, phénomène de GIBBS

Soit $s(t)$ un signal développable en série de FOURIER et présentant une discontinuité en $t = t_0$.

La série de FOURIER $s_F(t)$ est continu et tend vers

$$s_F(t) = \frac{1}{2} (s(t_{0+}) + s(t_{0-}))$$

quand t tend vers t_0 . Au voisinage de t_0 , l'écart entre les graphes de $s_{Fn}(t_0)$ et $s(t_0)$ est irréductible, quel que soit le nombre d'harmoniques considérés. Cet effet, connu sous le nom de **phénomène de GIBBS**, est illustré par les figures suivantes. D'un point de vue pratique, nous retiendrons qu'il faut une très large bande passante pour transmettre un signal périodique discontinu.

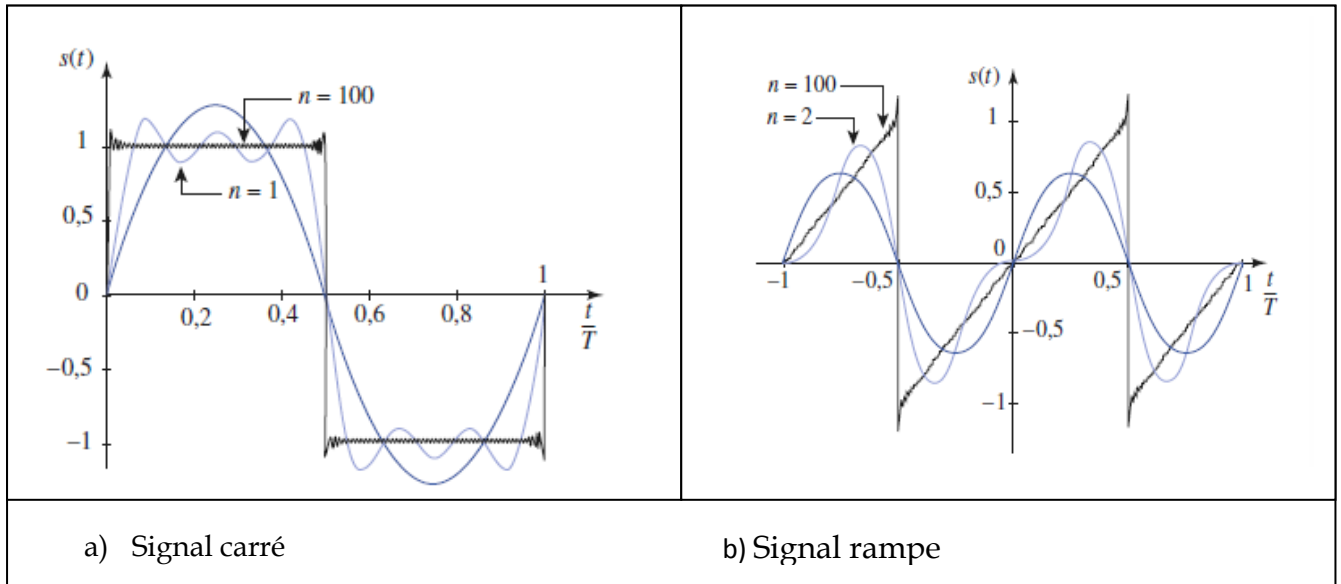
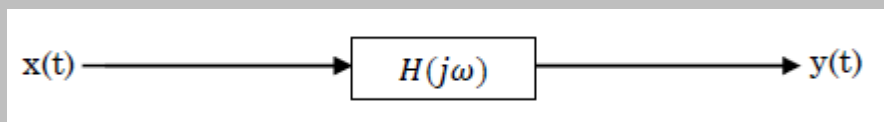


Fig.2.7 Mise en évidence du phénomène de GIBBS : a) Signal carré, b) Signal rampe

6- Réponse d'un système linéaire à un signal périodique

6-1 Expression de la sortie d'un système linéaire

Soit un système linéaire de fonction de transfert H , $x(t)$ un signal périodique appliqué à son entrée et $y(t)$ sa sortie :



On rappelle que $x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$.

On montre en utilisant le théorème de superposition que

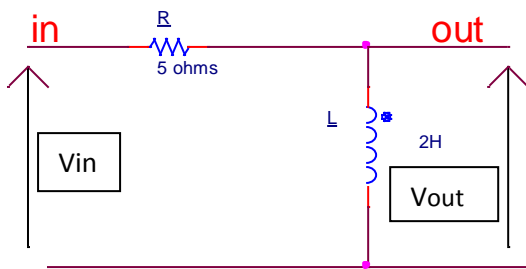
$$y(t) = d_0 |H(0)| + \sum_{n=1}^{\infty} d_n |H(jn\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n + \theta_n) \quad (2.28)$$

avec $\theta_n = \text{Arg}[H(jn\omega_0)]$

Exemple 2.14 Signal de sortie d'un filtre RL

Soit le filtre RL suivant ; déterminons le signal de sortie si v_{in} est le signal de l'Exemple 2.1

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.12, 13



$$V_{in}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi t) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi t - 90^\circ)$$

$$\omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

Le système linéaire H est le filtre RL dont la fonction de transfert est $H(j\omega) = \frac{2j\omega}{5+2j\omega}$.

$$H(n\omega_0) = \frac{2n\pi}{\sqrt{25+(2n\pi)^2}} \text{ et } \varphi(n\omega_0) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{2n\pi}{5}\right)$$

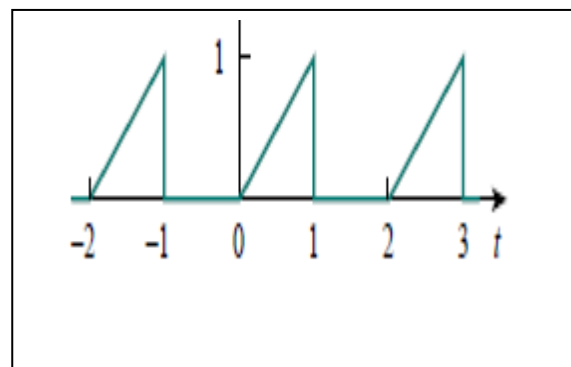
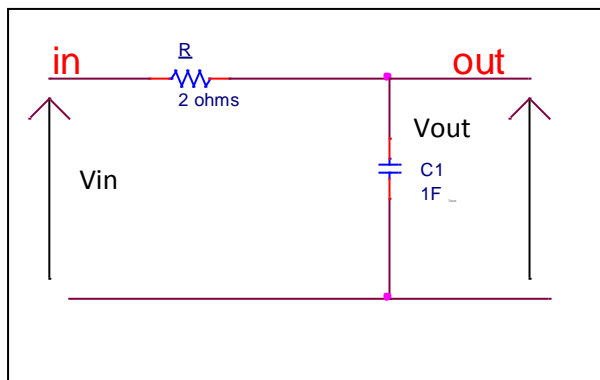
Pour $\omega = 0 \text{ rad/s}$ donc en régime continu : $Z_L = 0 \Omega$ donc $V_{out} = 0 \text{ V}$.

$$\text{Finalement } v(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2n\pi}{\sqrt{25+(2n\pi)^2}} \cos\left(n\pi t - 90^\circ + 90^\circ - \arctan\left(\frac{2n\pi}{5}\right)\right), n = 2k-1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{25+(2n\pi)^2}} \cos\left(n\pi t - \arctan\left(\frac{2n\pi}{5}\right)\right), n = 2k-1$$

Exemple 2.15 Signal de sortie d'un filtre RC

Soit le filtre RC suivant déterminer la sortie si V_{in} est un signal triangle ci-dessus



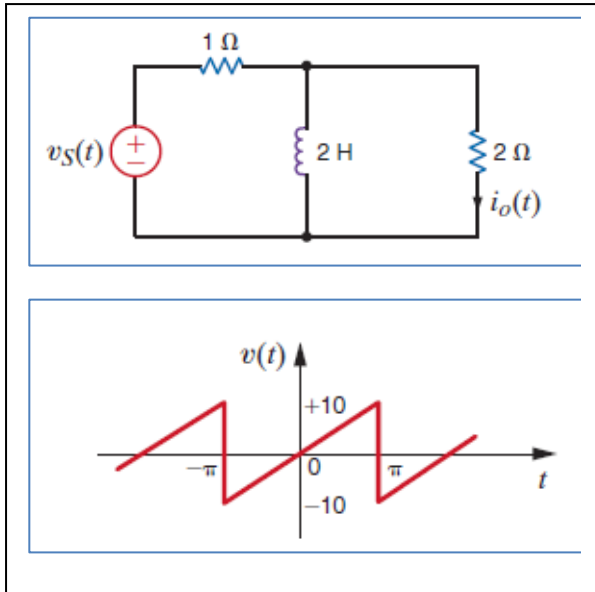
$$H(j\omega) = 1/(1+2j\omega) \text{ donc } H(n\omega_0) = 1/\sqrt{1+(2n\omega_0)^2} = 1/\sqrt{1+(4n\pi)^2} \text{ et}$$

$$\varphi(n\omega_0) = -\arctan(4n\pi).$$

Pour $\omega = 0 \text{ rad/s}$ donc en régime continu : $Z_c = \infty \Omega$ donc $V_{out} = V_{in}$ donc $H(0) = 1$

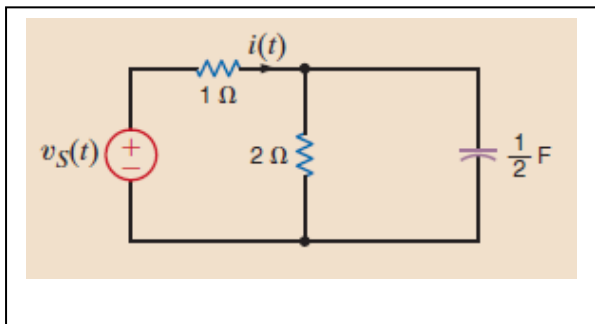
$$\text{Donc } v(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+(4n\pi)^2}} \sin(n\pi t - \arctan(4n\pi))$$

Exercice de niveau 1 n° 12



- 1- Déterminer la fonction de transfert.
- 2- Déterminer l'amplitude et la phase pour les différents harmoniques.
- 3- $V_S(t) = V(t)$, déterminer la série de FOURIER de $V_S(t)$
- 4- Déterminer $i_o(t)$.

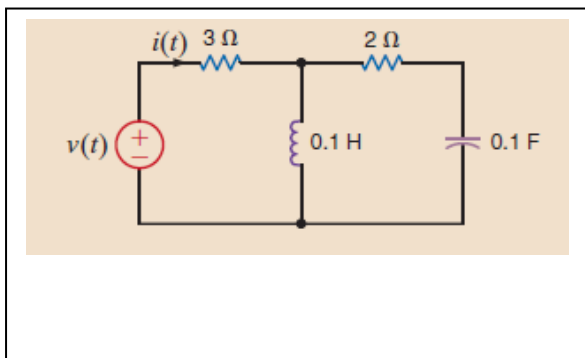
Exercice de niveau 1 n° 13



Déterminer $i(t)$ si $v(t)$ a pour expression :

$$v_S(t) = \frac{20}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nt \text{ V}$$

Exercice de niveau 1 n° 14



Déterminer les trois premiers termes de $i(t)$ si

$$v(t) = \frac{30}{\pi} + 15 \sin 10t + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ even}}}^{\infty} \frac{60}{\pi(1 - n^2)} \cos 10nt \text{ V.}$$

(even = pair)

La majorité des systèmes linéaires introduisent une modification de l'amplitude et de la phase. Ainsi la sortie est déterminée par les fréquences qui sont faiblement atténuées par ces systèmes c'est-à-dire les fréquences qui sont comprises dans la bande passante ; les autres fréquences sont 'éliminées'. Par conséquent tous les harmoniques d'un signal périodiques ne seront pas transmis à travers les systèmes linéaires selon leur type.

6-2 Effet d'un filtre passe-bas sur signal périodique

Nous étudierons les effets d'un filtre passe-bas d'ordre un. L'étude des filtres d'ordre deux utilisent la même méthode sauf qu'il faut se rappeler qu'il peut avoir résonance et que la coupure à la fréquence haute est brutale.

Le filtre passe-bas est caractérisé par sa fréquence de coupure f_h et sa bande passante $B_h = [0 ; f_h]$. Si un signal périodique de fréquence fondamentale F y est introduit alors sont transmis : (1) la composante continue et (2) les n harmonique tel que $nF < f_h$. Pour les harmoniques nous distinguons alors trois (3) cas (posons $N = f_h/F$) :

1^{er} cas : $N = f_h/F \ll 1$: seule la composante continue est transmise. Les différents harmoniques sont fortement atténués. (Fig.2.8)

2^e cas : $N = f_h/F \gg 1$: une grande partie des harmoniques sont transmises sans modifications. Le signal de sortie est voisin du signal d'entrée. La déformation du signal de sortie au niveau des discontinuités provient de l'élimination des harmoniques de rang élevés ($N \gg F/f_c$)

3^e cas : $N = f_h/F \cong 1$: le fondamental et quelque harmoniques sont transmises. Les hautes fréquences sont éliminées. Le signal de sortie ne ressemble pas au signal d'entrée. (Fig.2.9)

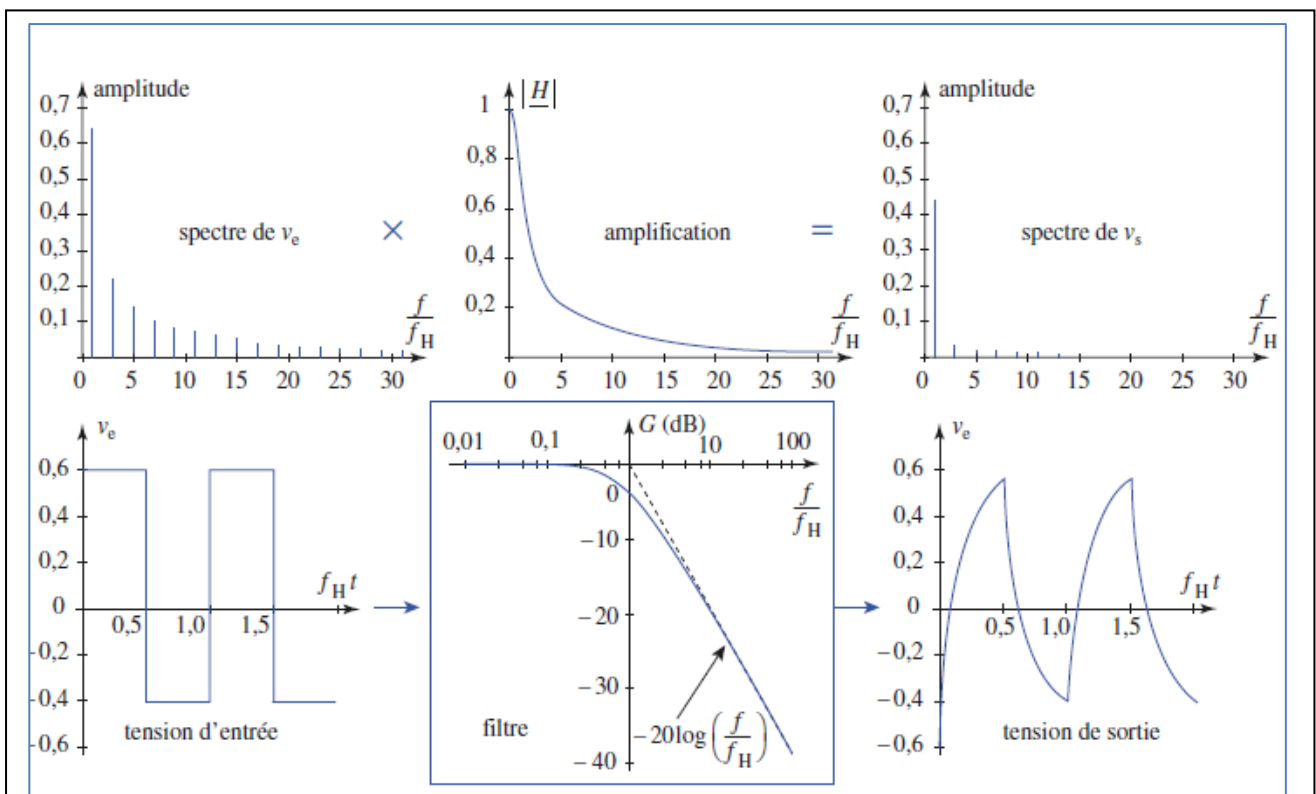


Fig.2.8. Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence f_h , superposé à une composante continue de 0.1 V.

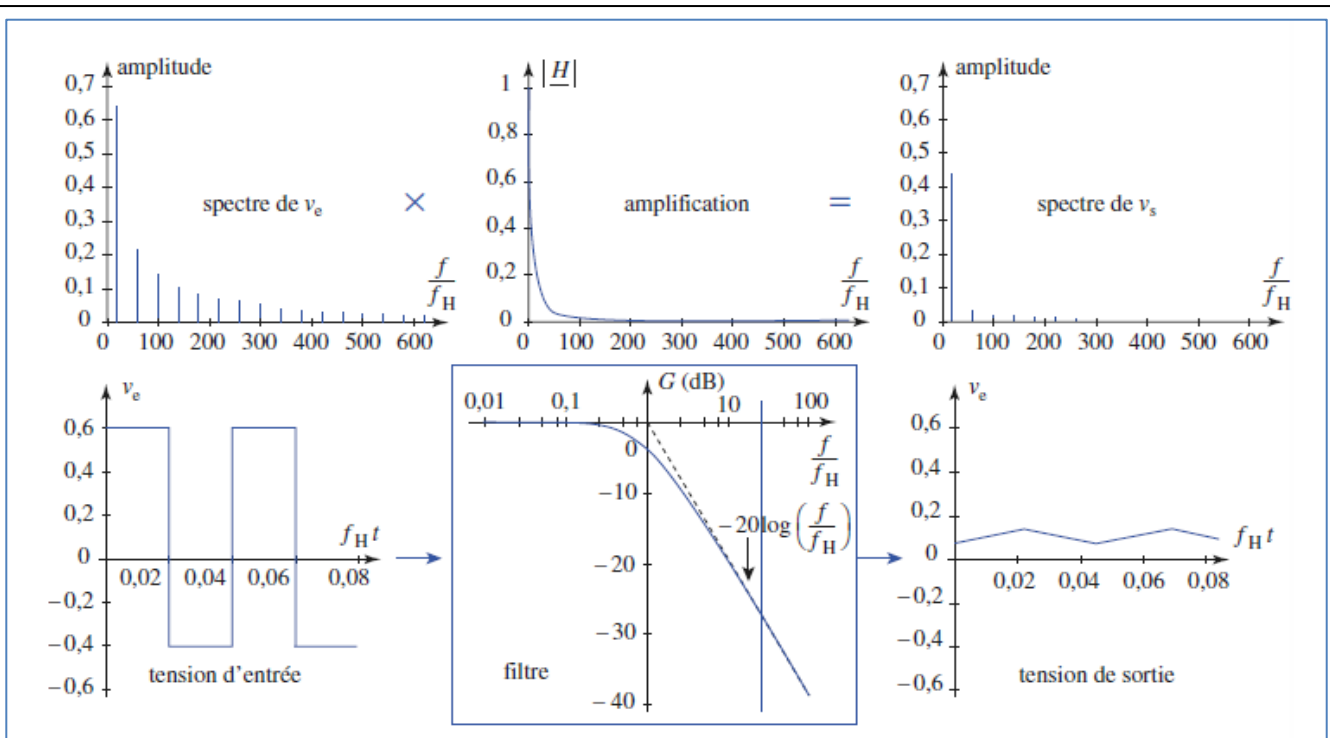


Fig.2.9 Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f = 20 f_H$, superposé à une composante continue de 0.1 V.

Quelle que soit la fréquence de coupure et la bande passante **la composante est entièrement transmise**. Le signal de sortie ne présente jamais de discontinuité.

Exercice de niveau 1 n° 14 : Filtre RC

Soit un filtre RC avec $R = 5.6 \text{ k}\Omega$ et $C = 2.8 \text{ nF}$.

1-Calculer la fréquence de coupure f_c et la bande passante BW

Ce filtre RC est attaqué par $e(t)$ un signal triangle paire de la valeur min = 0 V et valeur max = 2 V et fréquence $f = 2.5 \text{ kHz}$.

2-Déterminer la série de FOURIER de $e(t)$

3-Déterminer le nombre harmonique transmis à travers le filtre RC.

4-Déterminer l'expression de $s(t)$ le signal de sortie.

6-3 Effet d'un filtre passe-haut sur signal périodique

Nous étudierons les effets d'un filtre passe-bas d'ordre un. L'étude des filtres d'ordre deux utilisent la même méthode.

Le filtre passe-bas est caractérisé par sa fréquence de coupure f_b et sa bande passante $B_h \geq f_b$. Si un signal périodique de fréquence fondamentale F y est introduit alors sont transmis : les n harmonique tel que $nF > f_b$. **La composante continue est donc éliminée et les discontinuités sont transmises sans atténuation**. Pour les harmoniques nous distinguons alors trois (3) cas:

1^{er} cas $f \ll f_b$: une grande partie des harmoniques est transmise. Seuls les harmoniques de rang élevé sont transmis. (Fig. 2.10)

2^e cas $f \gg f_b$: seule la composante continue est atténuée ; les autres harmoniques sont transmis par le filtre.

3^e cas $f \cong f_b$: la composante continue et le fondamental sont éliminés, les autres harmoniques sont transmis. Le signal de sortie ne ressemble pas au signal d'entrée.

(Fig.2.11)

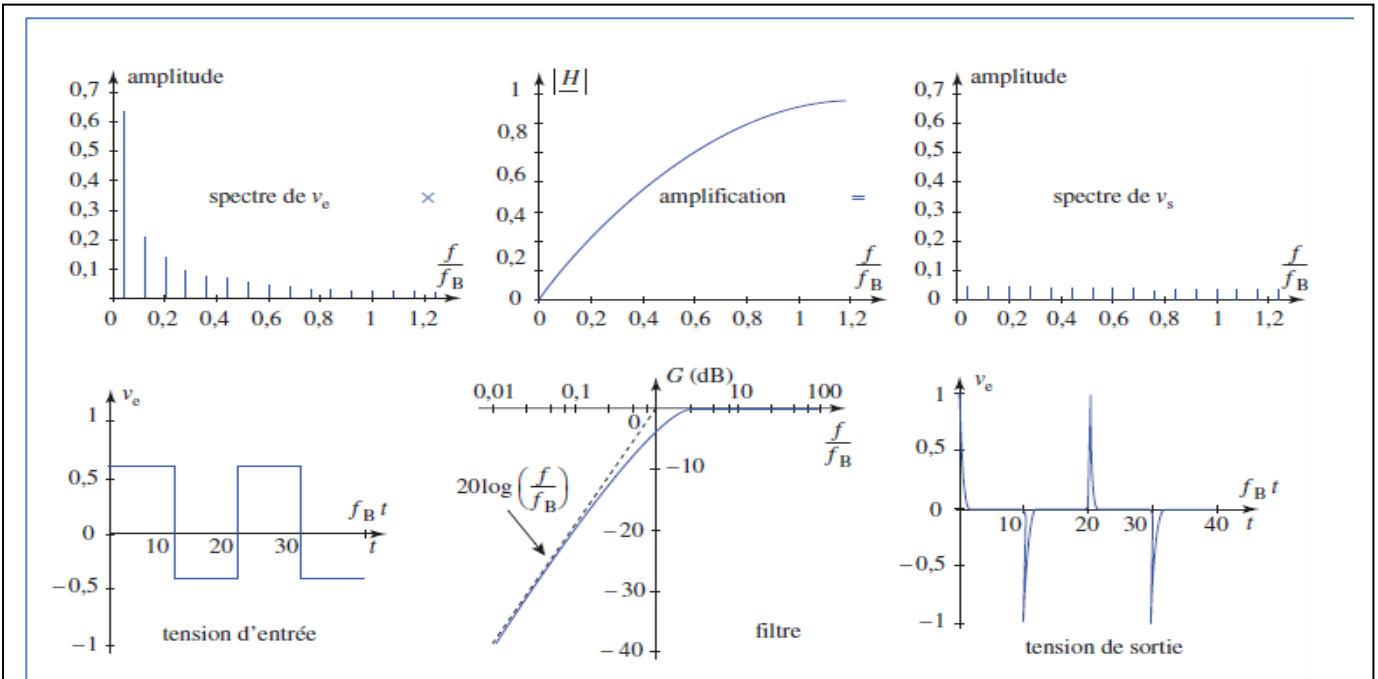


Fig.2.10 Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f = f_b/20$, superposé à une composante continue de 0.1 V. Analyse des harmoniques du signal d'entrée et du signal de sortie.

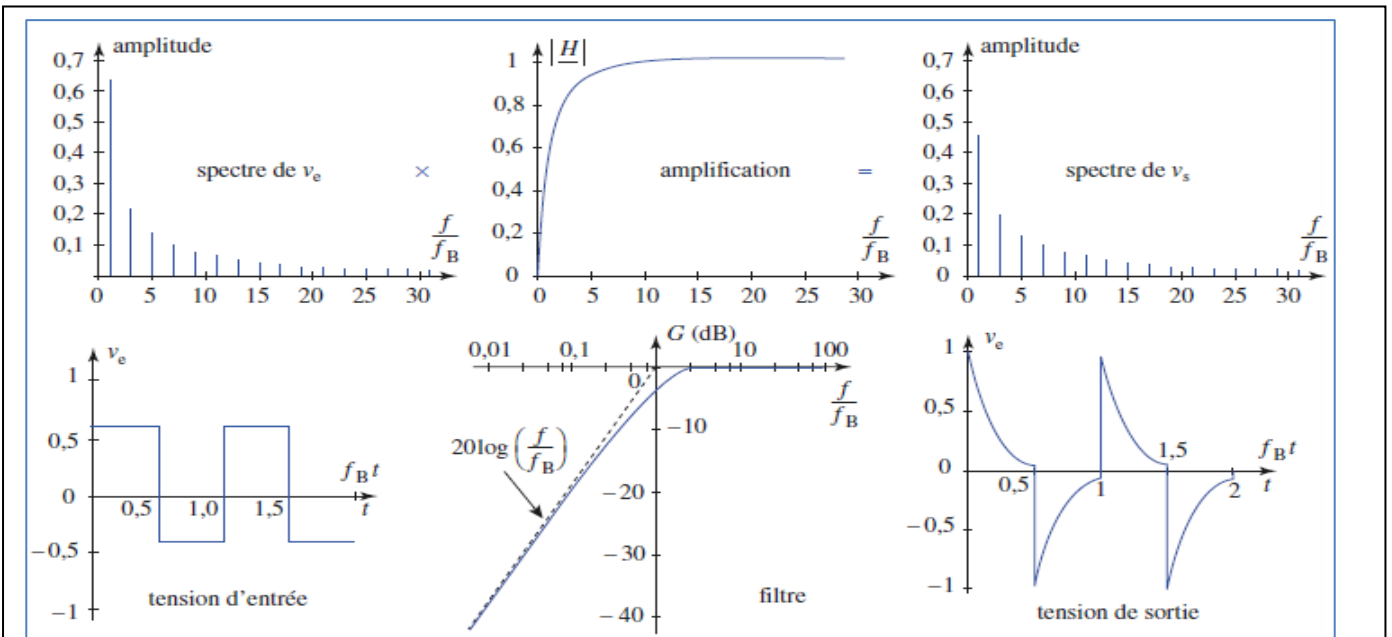


Fig.2.11 Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence f_b , superposé à une composante continue de 0.1 V. Analyse des harmoniques du signal d'entrée et du signal de sortie.

Exercice de niveau 1 n° 15 : Filtre CR

Soit un filtre RC avec $R = 5.6 \text{ k}\Omega$ et $C = 2.8 \text{ nF}$.

1-Calculer la fréquence de coupure f_c et la bande passante BW

Ce filtre RC est attaqué par $e(t)$ un signal triangle paire de la valeur $\min = 0 \text{ V}$ et valeur $\max = 2 \text{ V}$ et fréquence $f = 2.5 \text{ kHz}$.

2-Déterminer la série de FOURIER de $e(t)$

3-Déterminer le nombre harmonique transmis à travers le filtre CR.

4-Déterminer l'expression de $s(t)$ le signal de sortie.

6-4 Effet d'un filtre passe-bande sur signal périodique

Un filtre passe-bande est caractérisé par ses fréquences de coupure basse f_b et haute f_h qui détermine sa bande passante $BW = [f_b ; f_h]$. Rappelons aussi que $f_h - f_b = \frac{f_0}{Q}$. Il atténue les fréquences qui sont en dehors de sa bande passante qui peut être large ou étroite. Dans le cas de la bande étroite il ne transmet que les sinusoïdales dont les fréquences sont proches de la fréquence de résonance f_0 du filtre ; il élimine la composante continue et les discontinuités.

Les harmoniques qui seront transmis sans déformation importante sont tels que

$f_b < nf < f_h$ ou $\frac{f_b}{f} < n < \frac{f_h}{f}$. Le nombre d'harmoniques transmis est de l'ordre :

$$\frac{f_h - f_b}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{f_0}{Qf}$$

(Δf est la largeur de la bande passante BW et Q le coefficient de qualité)

Nous distinguons alors trois cas (Fig.2.12):

1^{er} cas : $\frac{f_0}{Qf} \ll 1$: un ou aucun harmonique est dans la bande passante du filtre ;

2^e cas : $\frac{f_0}{Qf} \gg 1$: de nombreux harmoniques sont dans la bande passante du filtre

3^e cas : $\frac{f_0}{Qf} \approx 1$: peu de fréquence sont dans la bande passante du filtre ;

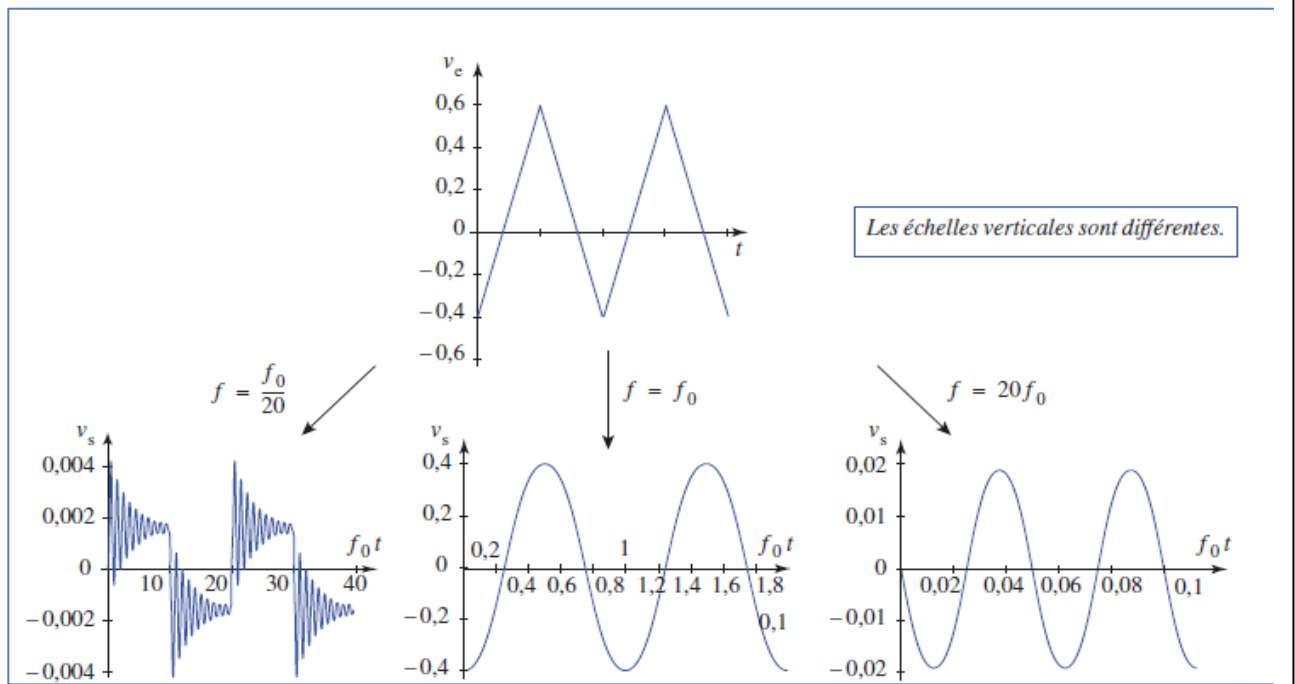


Fig.2.12 Filtre passante-bande de facteur de qualité $Q = 20$. Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_0/20$, f_0 et $20f_0$ superposé à une composante continue de 0.1 V.