TD N°1 : Optique physique

Exercice 1:

Une onde lumineuse a une fréquence $\nu = 5\ 10^{14}$ Hz dans le vide.

1. Calculer la période de cette onde ?
2. Calculer la longueur d'onde (en nm) de cette onde dans le vide ?
3. De quelle couleur s'agit-il ?
4. Que deviennent la longueur d'onde et la fréquence de cette onde dans un verre ordinaire d'indice n = 1,5 ?

Exercice 2 :

On considère deux vibrations lumineuses, monochromatiques et polarisées suivant la même direction ($E_1 = a_1\cos\omega t$ et $E_2 = a_2\cos(\omega t+\varphi)$), qui se superposent en un point M de l'espace.

1. Pour $a_1 = a_2 = a$, représenter graphiquement la vibration résultante ($E = E_1 + E_2$), en fonction du temps t, dans les cas suivants : $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$ et $\varphi = 2\pi$. Pour quelles valeurs du déphasage φ l'amplitude est-elle maximale ou minimale ?
2. Calculer l'intensité I de la vibration résultante en utilisant la représentation complexe.
3. Retrouver le résultat par application de la formule générale établie en cours.
4. Représenter I en fonction du déphasage.

Exercice 3 :

N vibrations sinusoïdales synchrones, polarisées suivant la même direction, ont des phases qui varient en progression arithmétique de raison φ : $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$, ..., $\varphi_N = (N-1)\varphi$.
Ces vibrations lumineuses se superposent en un point M de l'espace.

1. Calculer l'intensité résultante lorsque les N vibrations ont une même amplitude a.
2. Que devient cette intensité si, les amplitudes varient en progression géométrique de raison $|R<1$ et N est infini.
3. Représenter I en fonction de φ dans les deux cas des questions (1.) et (2.) pour N = 5 et R = 0,9 respectivement.

Exercice 4 :

Une source laser émet une raie, de longueur d'onde $\lambda = 0.63\mu m$, de largeur $\Delta\lambda = 0.005\mu m$.

1. Calculer la fréquence ν de cette raie.
2. Calculer la largeur, en fréquence, $\Delta\nu$ de cette raie.
3. Calculer le temps de cohérence de la source.
4. En déduire la longueur de cohérence de cette source.
5. Déduire la longueur des trais d'ondes émis par cette source.

Exercice 5 : trains

On considère deux sources de lumière identiques, S_1 et S_2, d'intensité I_0, produisant deux faisceaux lumineux qui se superposent dans une région de l'espace.

1. A quelle condition ces sources pourront-elles produire un phénomène d'interférences ? Justifier votre réponse.
2. Si cette condition n'est pas vérifiée, quelle serait l'intensité de l'onde résultante ?
3. Comment appelle-t-on les deux sources qui vérifient cette condition.
4. On suppose que cette condition est vérifiée, comment appelle-t-on la zone ou les deux faisceaux se superposent ?
5. Donner l'expression complexe du champ électrique E_1 de l'onde émise par la source S_1 (On prendra la phase de cette onde comme origine des phases).
6. Donner l'expression complexe du champ électrique E_2 de l'onde émise par la source S_2.
7. Établir l'expression de l'intensité I de l'onde résultante de la superposition des ondes issues des deux sources S_1 et S_2.
8. Déduire la condition (sur la différence de marche) qui détermine les postions des franges brillantes.
9. Calculer la visibilité des franges d'interférence. Conclure.

TD N°1 : Optique physique

Exercice 1 :

$\nu = 5.10^{14}$ hz

1°/ $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5}.10^{-14} = 2.10^{-15}$ s

2°/ Dans le vide $\lambda_0 = cT$

$\lambda_0 = 3.10^{8} \times 2.10^{-15} = 6.10^{-7}$ m $= 0,6$ µm

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \mu m = 10^{-6}\ m \\ 1\ nm = 10^{-9}\ m \end{array}\right| \Rightarrow 1\ \mu m = 10^{3}\ nm$$

$$\boxed{\lambda_0 = 600\ nm}$$

3°/ La coleur corespondante a cette longeur d'onde est le rouge.

4°/ ν est carractéristique de la vibration, elle est la même dans tous les milieux

$\nu = 5.10^{14}$ Hz

$\lambda = v.T$ v : vetesse de propagation de l'onde dans le milieux

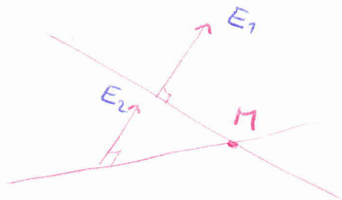
$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{cT}{n} = \frac{600}{3} \times 2 = 400$ nm

Exercice 2 :

$E_1 = a_1 \cos(\omega t)$ et $E_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi)$

1°/ $a_1 = a_2 = a$



$+\varphi/2 - \frac{\varphi}{2}$

$E = E_1 + E_2 = a\left[\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi)\right]$

$p = a + b$
$q = a - b$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$= 2\cos a \cos b = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

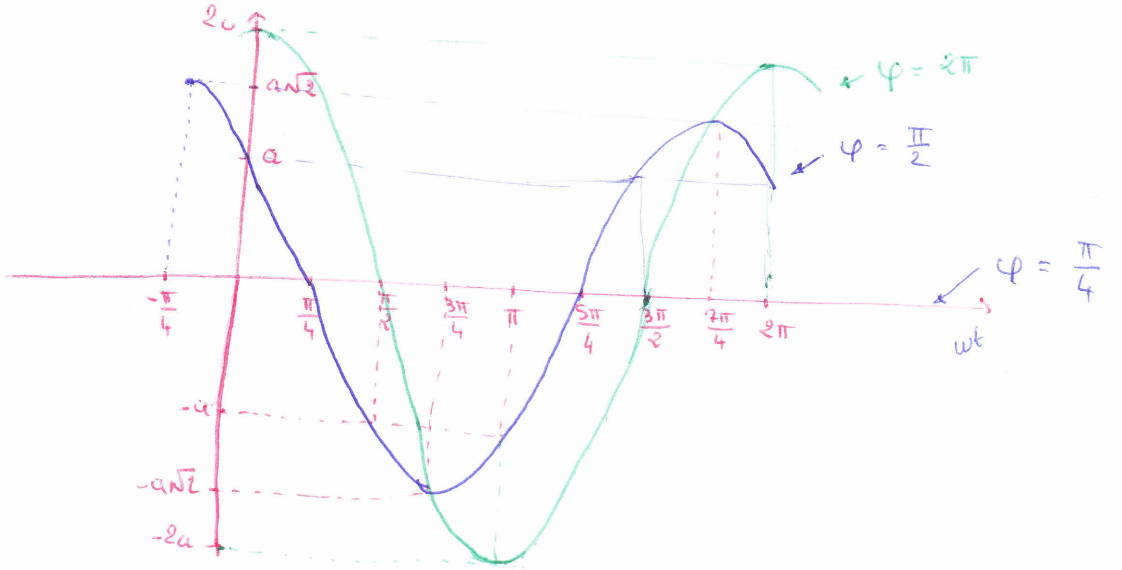
$$E = 2a \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \left(2a \cos\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

L'Ampletude de la vibration resultante est : $\mathcal{A} = 2a \cos\frac{\varphi}{2}$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathcal{A} = 2a \cos\frac{\pi}{4} = 2a\frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

$$E = a\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\varphi = \pi \longrightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\varphi = 2\pi \longrightarrow \mathcal{A} = 2a\,|\cos\pi| = 2a$$

$\mathcal{A}$ est maximal si $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 1$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 1 \longrightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi \Rightarrow \boxed{\varphi = 2k\pi}$$

$\mathcal{A}$ est minimal si $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \boxed{\varphi = (2k+1)\pi}$

2°/ **Remarque :**

La representation Algebrique donne $I = \mathcal{A}^2 = 4a^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}$

2°/ $E_1 = a \cos\omega t \longrightarrow \bar{E}_1 = a e^{j\omega t}$

$E_2 = a \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \bar{E}_2 = a e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = e^{j\omega t}\underbrace{\left[a\left(1+e^{j\varphi}\right)\right]}$$

L'ampletude Complexe de la vibration resultante est $\bar{\mathcal{A}} = a\left(1+e^{j\varphi}\right)$

L'intensité de la vibration est $I = \bar{\mathcal{A}}\,\bar{\mathcal{A}}^* = \left[a\left(1+e^{j\varphi}\right)\right]\left[a\left(1+e^{-j\varphi}\right)\right]$

$$= a^2\left(1 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} + 1\right)$$

I' est periodique de periode 2π

$$= 2a^2\left(1+\cos\varphi\right)$$

$$I = 2a^2\left(1+\cos\varphi\right) = 2a^2\left(\cos 0 + \cos\varphi\right)$$

$$= 2a^2\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{-\varphi}{2}\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

3°/

$$E_i = a_i\, e^{j\varphi_i}\, e^{j\omega t} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, N$$

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{N}\bar{E}_i = e^{j\omega t}\sum_{i=1}^{N} a_i\, e^{j\varphi_i}$$

$$\bar{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{N} a_i\, e^{j\varphi_i} = \sum_{i=1}^{N} a_i\cos\varphi_i + j\sum_{i=1}^{N} a_i\sin\varphi_i = X + jY$$

$$I = \bar{\mathcal{A}}.\bar{\mathcal{A}}^* = X^2 + Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\cos\varphi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\sin\varphi_i\right)^2$$

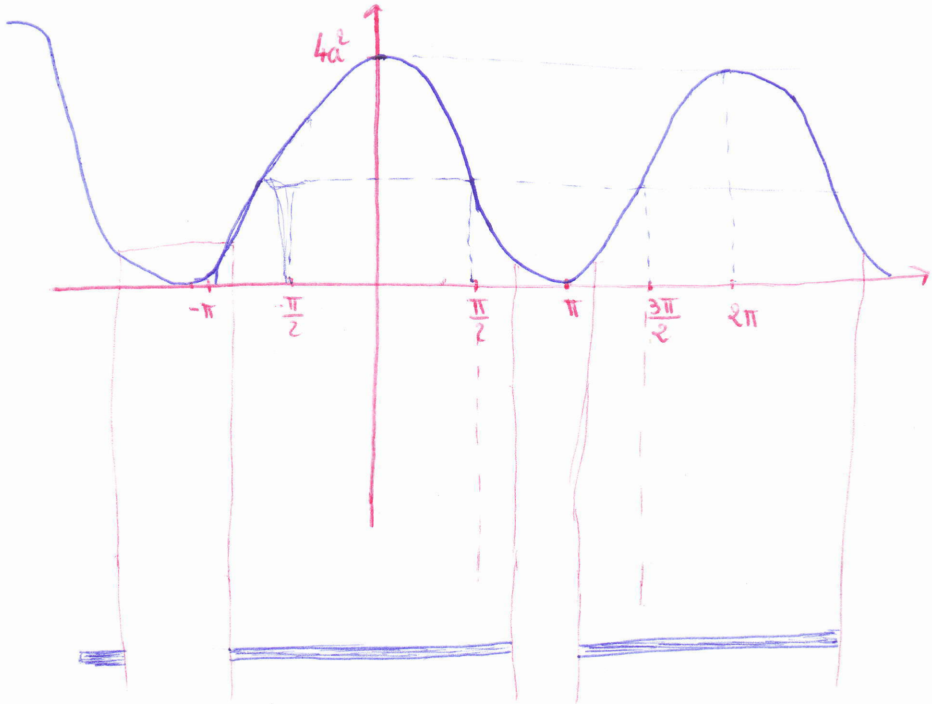
Dans Notre cas $i = 1, 2$

$$I = \left(a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2\right)^2 + \left(a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2\right)^2$$

$$= \cancel{2a^2}\left(\left(a + a\cos\varphi\right)^2 + \left(a^2\sin^2\varphi\right)\right.$$

$$= a^2\left(1 + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

$$= 2a^2\left(1+\cos\varphi\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$



Exercice 3 :

$E_1 = a_1 e^{j\omega t} \longrightarrow \bar{A}_1 = a$

$E_2 = a_2 e^{j(\omega t+\varphi)} \longrightarrow \bar{A}_2 = a e^{j\varphi}$

$E_3 = a_3 e^{j(\omega t+2\varphi)} \longrightarrow \bar{A}_3 = a e^{2j\varphi}$

$\vdots$

$E_N = a_N e^{j(\omega t+(N-1)\varphi)} \longrightarrow \bar{A}_N = a e^{j(N-1)\varphi}$

l'ampletude Complexe de la vibration resultante est

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{N} \bar{A}_i = a\left(1 + e^{j\varphi} + e^{2j\varphi} + \cdots\cdots + e^{j(N-1)\varphi}\right)$$

Les termes de S sont en progression géometrique de raison $e^{j\varphi}$

$$S = \frac{1-e^{jN\varphi}}{1-e^{j\varphi}}$$

$$\bar{\mathcal{A}} = a \, \frac{1-e^{jN\varphi}}{1-e^{j\varphi}}$$

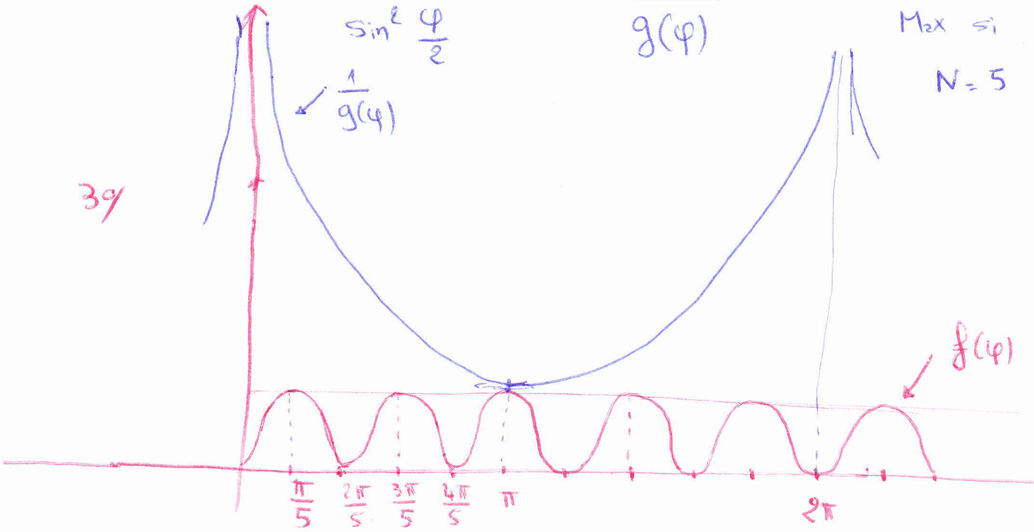
$$I = \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{A}}^* = a^2 \, S S^* = a^2 \, \frac{(1-e^{jN\varphi})(1-e^{-j\varphi N})}{(1-e^{j\varphi})(1-e^{-j\varphi})} = a^2 \left(\frac{1-e^{jN\varphi}-e^{-jN\varphi}+1}{1-e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}+1}\right)$$

$$= \frac{a^2 \times \cancel{\ell}\,(1-\cos N\varphi)}{\cancel{\ell}\,(1-\cos\varphi)} = a^2 \times \frac{-\ell \sin\frac{N\varphi}{2}\sin\left(-\frac{N\varphi}{2}\right)}{-\ell\,\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= a^2\,\frac{\sin^2\frac{N\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = a^2\,\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$$

Max si $N=5$ $\sin\frac{5}{2}\varphi$ $\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

3°/



$f(\varphi)$ est periodique de periode $\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$g(\varphi)$ " " " " 2π

$\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$ (donc I) est periodique de period 2π

si $\varphi \longrightarrow 0$ on a

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{f\varphi}{g(\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin^2\frac{N\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = N^2 = 25$$

2°/ $\bar{E}_1 = a\,e^{j\omega t} \longrightarrow \bar{A}_1 = a$

$\bar{E}_2 = aR\,e^{j(\omega t+\varphi)} \longrightarrow \bar{A}_2 = aR\,e^{j\varphi}$

$\bar{E}_3 = aR^2 e^{j(\omega t+2\varphi)} \longrightarrow \bar{A}_3 = aR^2 e^{2j\varphi}$

$\vdots$

$E_N = aR^{N-1} e^{j[\omega t+(N-1)\varphi]} \longrightarrow \bar{A}_N = aR^{N-1} e^{j(N-1)\varphi}$

Superposition de N onde en M (position de M se trouve dans φ)

$$\bar{E} = \sum_i E_i \longrightarrow \bar{\mathcal{A}} = \sum_i \bar{\mathcal{A}}_i$$

$$\bar{\mathcal{A}} = a\left[1 + Re^{j\varphi} + R^2 e^{j2\varphi} + \cdots + R^{N-1} e^{j(N-1)\varphi}\right] = a\,S$$

les termes de S sont en progression géometrique de raison

$$Re^{j\varphi} \implies S = \frac{1-(Re^{j\varphi})^N}{1 - Re^{j\varphi}}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{A}} = a\,\frac{1-(Re^{j\varphi})^N}{1-Re^{j\varphi}} = \frac{1-R^N e^{jN\varphi}}{1-Re^{j\varphi}}$$

Pour $N \longrightarrow \infty$

$$\bar{\mathcal{A}} = \lim_{N\to\infty} a\,\frac{1-R^N e^{jN\varphi}}{1-Re^{j\varphi}}$$

$$e^{jN\varphi} = \cos N\varphi + j\sin N\varphi$$

$$-1 < \cos N\varphi < 1$$

$$-1 < \sin N\varphi < 1$$

$$R < 1$$

$$\lim_{N\to\infty} R^N = 0$$

$$\bar{\mathcal{A}} = \frac{a}{1-Re^{j\varphi}}$$

$$I = \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{A}}^* = \frac{a^2}{(1-Re^{j\varphi})(1-Re^{-j\varphi})} = \frac{a^2}{1-Re^{j\varphi}-Re^{-j\varphi}+R^2}$$

$$I = \frac{a^2}{1+R^2-2R\cos\varphi}$$

$I(\varphi)$ est periodique de periode 2π

I_{max} obtenu pour un dénomerateur minimale c.a.d $\cos\varphi = 1$

$$\varphi = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$I_{max} = \frac{a^2}{1+R^2-2R} = \frac{a^2}{(1-R)^2}$$

I_{min} est obtenu pour denomerateur maxima c.a.d - $\cos\varphi = -1$

$\Rightarrow \varphi = (2k+1)\pi$

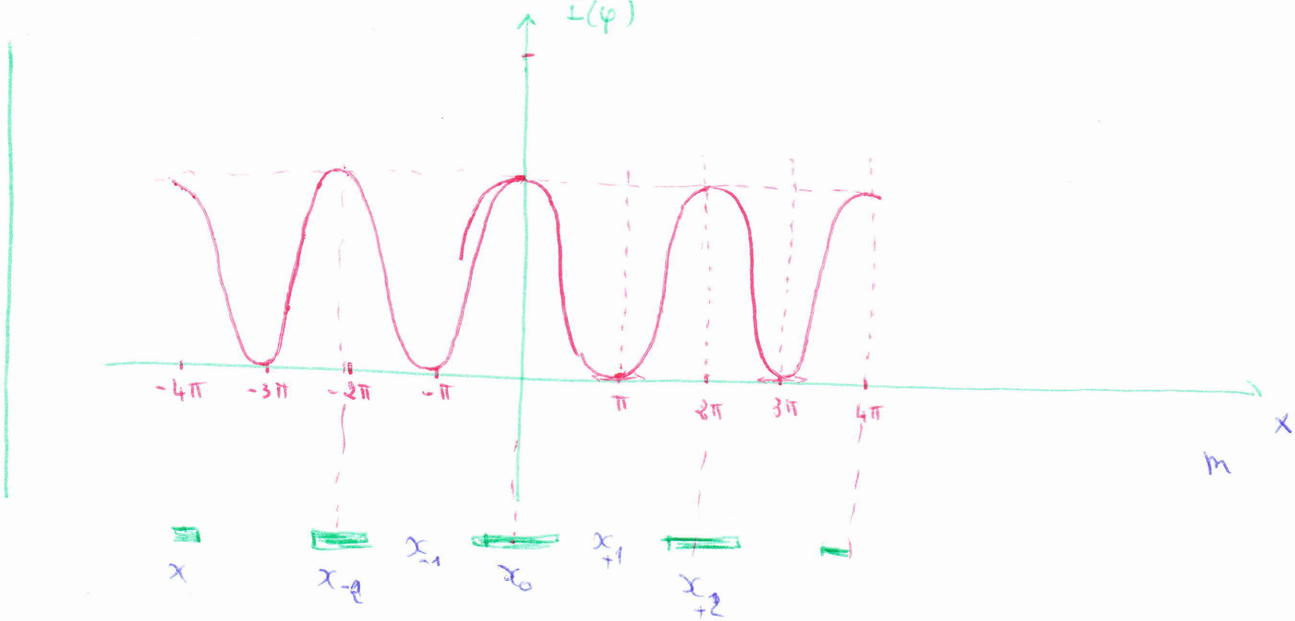
$$I_{max} = \frac{a^2}{1+R^2+2R} = \frac{a^2}{(1+R)^2}$$

3°/ Pour ②

A.N $\qquad R = 0,9$

$$I_{max} = \frac{a^2}{(1-0,9)^2} = \frac{a^2}{(0,1)^2} = 100\,a^2$$

$$I_{min} = \frac{a^2}{(1+0,9)^2} \simeq \frac{a^2}{4}$$



Exercice 4 :

$\lambda = 0,63\ \mu m$

$\Delta\lambda = 0,005\ \mu m$

1°/ $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,63 \cdot 10^{-6}} = 4,7\cancel{8} \cdot 10^{14}\ Hz$

$$\boxed{\nu = 4,7\cancel{8} \cdot 10^{14}\ Hz}$$

2°/ Largeur en frequence

$d\nu = \frac{-c}{\lambda^2} d\lambda \longrightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$

$\Delta\nu = \frac{3 \cdot 10^8}{(0,63)^2 \cdot 10^{-12}} \times 5 \cdot 10^{-9} = \frac{15}{(0,63)^2} \cdot 10^{11} = 3,8 \cdot 10^{12}\ Hz$

Rq :

l'origine naturelle de $\Delta\nu$ est la durée finie des traines d'onde

3°/

$\Delta\nu \simeq \frac{1}{\tau_c} \Longrightarrow \tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{3,8} \cdot 10^{-12} s = 2,63 \cdot 10^{-13} s$

(du (durée du train d'onde)

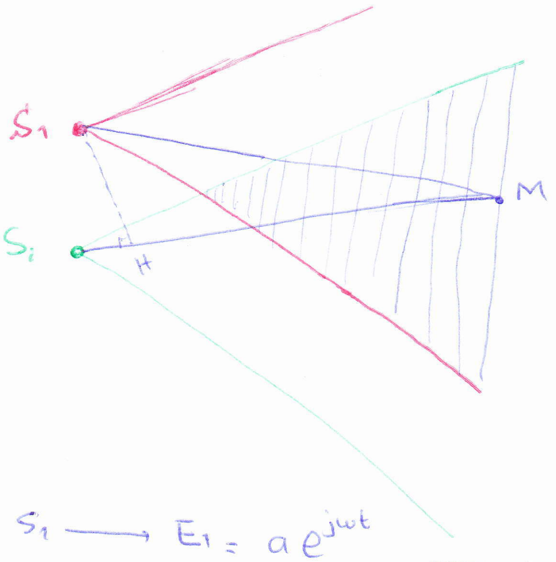
4°/ $l_c = c\tau_c$: longeur de coherance

$= 3 \cdot 10^8 \times 2,63 \cdot 10^{-13} = 7,89\ 10^{-5} m$

$$\boxed{l_c \simeq 79\ \mu m}$$

5°/ $l = l_c$ longeur du train d'onde $= l_c$

Exercice 5



$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$S_1 \longrightarrow E_1 = a e^{j\omega t} \longrightarrow \bar{A}_1 = a$

$S_2 \longrightarrow E_2 = a e^{j(\omega t + \varphi)} \longrightarrow \bar{A}_2 = a e^{j\varphi}$

en M on a $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = a(1 + e^{j\varphi})$

$\Rightarrow$ l'intensité en M

$$I(M) = a(1+e^{j\varphi})\, a(1+e^{-j\varphi})$$
$$= a^2(1 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} + 1)$$
$$= 2a^2(1 + \cos\varphi)$$
$$= 2I_0 + 2I_0 \cos\varphi$$

En fait

$$I = \langle \bar{A}\bar{A}^* \rangle = 2I_0 + 2I_0 \langle \cos\varphi(M,t) \rangle$$

Pour avoir interference c.a.d pour avoir $I \neq 2I_0$ il faut $\langle \cos\varphi(M,t) \rangle \neq 0$

il faut que φ soit independant de t

2°/ Si φ depend de t on aura $\langle \cos\varphi \rangle = 0$

$\Rightarrow I(M) = 2I_0 \quad \forall M$

3°/ Si φ est indépendant de t on dit que S_1 et S_2 sont cohérentes.

4°/ Cette zone s'appelle champ d'interference

5/ $\bar{E}_1 = a e^{j\omega t} = \sqrt{I_0}\, e^{j\omega t} \longrightarrow \mathcal{A}_1 = \sqrt{I_0}$

6/ $E_2 = a e^{j(\omega t+\varphi)} = \sqrt{I_0}\, e^{j(\omega t+\varphi)} \longrightarrow \mathcal{A}_2 = \sqrt{I_0}\, e^{j\varphi}$

7/ l'ampletude de l'onde resultant est $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}_1 + \bar{\mathcal{A}}_2$

$$= \sqrt{I_0}\,(1 + e^{j\varphi})$$

L'intensité de l'onde resultant est :

$$I = \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{A}}^* = I_0(1 + e^{j\varphi})\cancel{I_0}(1 + e^{-j\varphi})$$

$$= 2I_0(1 + \cos\varphi)$$

$$= 2I_0(\cos 0 + \cos\varphi)$$

$$= 2I_0\, 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$I = 4I_0\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

~~8/~~ $\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda}$

$\Rightarrow I = 4I_0\cos^2\dfrac{\pi\delta}{\lambda}$ $\qquad \delta = (S_2M) - (S_1M)$

8/ Les ~~Condition~~ franges brillant correspendent a $I = I_{max}$

c.a.d a $\cos^2\dfrac{\pi\delta}{\lambda} = 1$

$\cos\dfrac{\pi\delta}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \dfrac{\pi\delta}{\lambda} = K\pi$

$\boxed{\delta = K\lambda}$ $\qquad K \in \mathbb{Z}$

Les Frange Sombre correspendent a $I = I_{min}$

c.a.d $\cos^2\dfrac{\pi\delta}{\lambda} = 0$

$\dfrac{\cancel{\pi}\delta}{\lambda} = (2K+1)\dfrac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{\delta = (2K+1)\dfrac{\lambda}{2}}$

9°/ Visibilité des franges

$$\mathcal{V} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4I_0 - 0}{4I_0 + 0} = 1$$

On a le maximum de visibilité

Remarque

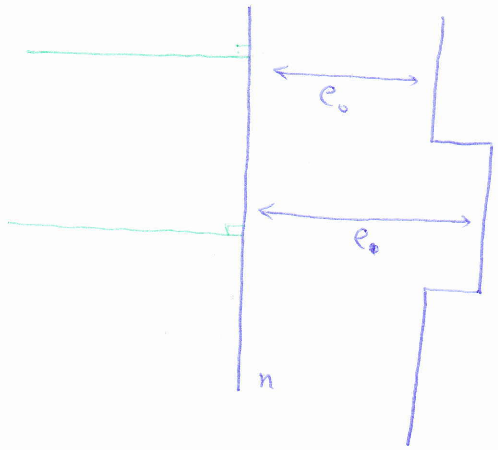
Si $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \cos\varphi$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)}$$

Exercice d'application suplementaire

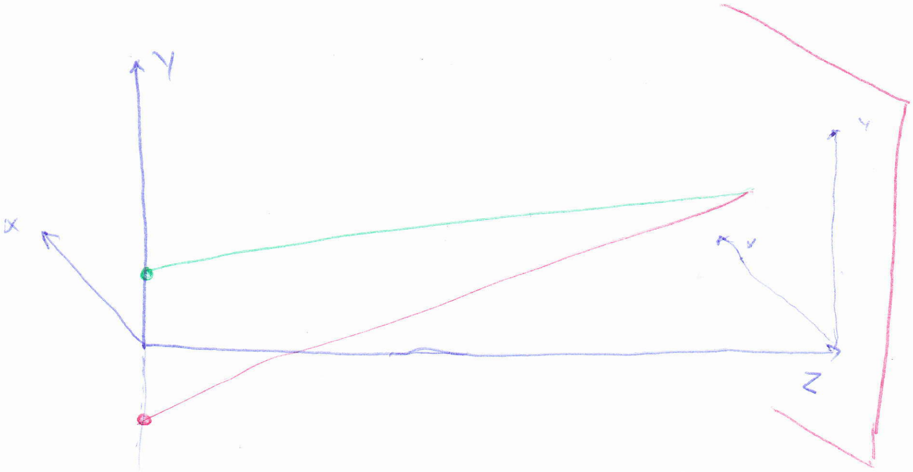


Soient 1' et 2' les conjugués de 1 et 2 à travers la lame

1°/ Tracer 1' et 2'. Quelle est le point de rencontre de 1' et 2'

2°/ Calculer la difference de marche δ entre (11'M) et (22'M)

3°/ Tracer une surface d'onde après la traversée de la lam


Y
x
Z