TD DE MATHEMATIQUES : OPTIMISATION 2 (ECUE 4)

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice 2

On considère les fonctions $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Elles sont définies par :

$$f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, xy \sin(xy) \exp(y^2)), \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x, y)$ et $J_g(u, v, w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 3

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée du nombre suivant :

$\arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)]$

Exercice 4

Calculer les différentielles suivantes, sans calculer des dérivées partielles, en utilisant les propriétés des différentielles de sommes, produits et composées :

(a) $\mathrm{d}\left(\ln(xy)\right)$ (b) $\mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right)$ (c) $\mathrm{d}\left(\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)$

Exercice 5

Calculer les matrices hessiennes des fonctions □□définies par les expressions suivantes sur leur domaine de définition naturel :

$\sin(xyz), \quad \sin^2(y/x)$

Exercice 6

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Exercice 7 :

Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$

Exercice 8

Soit C la courbe d'équation $f(x, y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

1. Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe $\mathcal{C}$ au point $(0, 0)$.
2. Déterminer la limite de y/x quand (x, y) tend le long la courbe $\mathcal{C}$ vers $(0, 0)$.

Exercice 9

Déterminer les points stationnaires de la fonction f de deux variables définie par $f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.

Exercice 10

Trouver les extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
2. $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.