FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES (Suite)

On considère une fonction

$f_j\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}$

avec $j = 1, 2, \cdots, m$

Posons $F = \left(f_1, f_2, \ldots, f_m\right)$

$$DF(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathrm{m}\times n)}$$

$DF(a)$ *est la matrice Jacobienne de* F

Si $m = 1$, *alors*

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La matrice colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \nabla f(a)$ est le gradient de f au point a. et

Dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Retour sur la différentielle totale (Application)

$F = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

On peut écrire

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Exemple :

Soit $Q = F\left(K, L\right) = K^{1/4} L^{3/4}$

$\left(K^*, L^*\right) = \left(10000, 625\right)$

$$\Delta Q \simeq \frac{\partial F\left(K^*, L^*\right)}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial F\left(K^*, L^*\right)}{\partial L} \Delta L$$

Question: Déterminer la variation de Q suite à une augmentation de K de 10 unités et à une baisse de L de 2 unités

ΔK=10 et ΔL=-2

$$\Delta Q \simeq \frac{\partial F\left(K^*, L^*\right)}{\partial K} \left(10\right) + \frac{\partial F\left(K^*, L^*\right)}{\partial L} \left(-2\right)$$

$$\begin{aligned}
\textit{avec } \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(K^{1/4} L^{3/4}\right) = \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{3/4} \Rightarrow \frac{\partial F\left(K^*, L^*\right)}{\partial K} &= \frac{1}{4}\left(K^*\right)^{-3/4}\left(L^*\right)^{3/4} \\
&= \frac{1}{4}\left(10^4\right)^{-3/4}\left(5^4\right)^{3/4} \\
&= \frac{1}{4}\left(0,001\right)\left(125\right) \\
&= \frac{0.125}{4} = 0,03125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{et } \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(K^{1/4} L^{3/4}\right) = \frac{3}{4} K^{1/4} L^{-1/4} \Rightarrow \frac{\partial F\left(K^*, L^*\right)}{\partial L} &= \frac{3}{4}\left(K^*\right)^{1/4}\left(L^*\right)^{-1/4} \\
&= \frac{3}{4}\left(10^4\right)^{1/4}\left(5^4\right)^{-1/4} \\
&= \frac{3}{4}\left(10\right)\left(1/5\right) = \frac{3}{4}\left(2\right) \\
&= \frac{3}{2} = 1,5
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta Q \simeq 0,03125\left(10\right) + 1,5\left(-2\right) = 0.3125 - 3 = -2,6875$$

Fonctions implicites

$G(x,y) = x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$

On considère le point $(x_0, y_0) = (4,3)$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 3y \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) = 2(4) - 3(3) = -1$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -3x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = -3(4) + 3(3)^2 = 27 - 12 = 15$$

Puisque $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 15 \neq 0$, on peut écrire:

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)} = -\left(\frac{-1}{15}\right) = \frac{1}{15}$$

$Si\ \Delta x = 3,\ alors$

$$\Delta y \simeq y'(x_0)\Delta x = \frac{1}{15}(3) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$La\, nouvelle\, valeur\ y_1\ de\ y\, sera:$

$y_1 - y_0 \simeq 0.2$

$y_1 \simeq y_0 + 0.2 = 3 + 0.2 = 3.2$

En fait,

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} \quad si\ \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$$

Il est vrai que de la fonction G(x ;y) on ne peut pas trouver une expression claire de y en fonction de x. On dit donc que y n’est pas une fonction explicite de x. On dira alors que y est une fonction implicite de x.

Toutefois, il est possible de connaitre la dérivée de y par rapport à x, grâce au théorème des fonctions implicites. La condition majeure est que la fonction G soit dans la classe C^2 et que la dérivée partielle de G par rapport à y soit non nul autour d’un point $(x_0; y_0)$ d’intérêt. Une application de cette possibilité est l’approximation d’une fonction à plusieurs variables à la suite d’un changement dans un argument donné.