UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN
UFR DES SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION – LICENCE 2 -
STATISTIQUES ET PROBABILITES / Année Universitaire 2021-2022
UE 2. ECUE 3. ESTIMATIONS - 2h00 min TD 6- ECHANTILLONNAGE – ESTIMATION PONCTUELLE- METHODES DES MOMENTS ET MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE
CORRIGES

Exercice 1 - Soit un échantillon de taille n variables X_i : $(X_1; X_2; X_3; \dots ; X_n)$ indépendamment et identiquement distribuées selon la loi d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est :

$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3}x^2 & \text{si } x \in [0;\ \theta] \\ 0 & \text{si } x[0;\ \theta] \end{cases}$; θ > 0

a) Vérifier que f est une densité de probabilité ;

Montrer que $S = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais de θ et calculer sa variance.

[NB -on ne demande pas de déterminer l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance]

SOLUTION

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{\theta^3}x^2 & \text{si } x \in [0;\ \theta] \\ 0 & \text{si } x[0;\ \theta] \end{cases};\ \theta > 0$$

a) **Vérifions que f est une densité de probabilité**

f est une ddp si : $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(.)\ est\ définie\ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(.)\ est\ continue$
- $\theta > 0, \forall x \in [0;\ \theta], x \geq 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{\theta^3} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in [0;\ \theta], f(x) \geq 0$

  $\forall x \notin [0;\ \theta], f(x) = 0$

  $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{0}\, dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx + \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\, dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\theta} \left(\frac{3}{\theta^3}x^2\right) dx = \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\theta} = \frac{\theta^3}{\theta^3} = 1$ Conclusion : f est une ddp

b) **Montrons que $S = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais de θ**

S est un estimateur sans biais de θ si $E(S) = \theta$

$$E(S) = E\left(\frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{3n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$or\ E(X_i) = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\theta} x\left(\frac{3}{\theta^3}x^2\right)dx = \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\theta} = \frac{3}{4}\frac{\theta^4}{\theta^3} = \frac{3}{4}\theta$

$$\rightarrow E(S) = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{4}\theta = \frac{4}{3n}\frac{3}{4}n\theta = \theta$$

$E(S) = \theta$ donc S est un estimateur sans biais de θ.

Calcul de la variance

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{4}\theta$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\theta} x^2\left(\frac{3}{\theta^3}x^2\right)dx = \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\theta} = \frac{3}{5}\frac{\theta^5}{\theta^3} = \frac{3}{5}\theta^2$$

$$V(X) = \frac{3}{5}\theta^2 - \left(\frac{3}{4}\theta\right)^2 = \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$$

Exercice 2 Dans une population P, on définit la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par la densité de probabilité suivante :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad ; \ \theta > 0$$

On prélève un échantillon ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$) indépendamment et identiquement distribué selon la loi de X.

1°) Vérifier que f est une densité de probabilité ;

2°) Estimer par la méthode du Maximum de vraisemblance le paramètre θ. On notera $\hat{\theta}\ (X_n)$ cet estimateur.

3°) Estimer le paramètre θ par la méthode des moments.

4°) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

5°) Déduire de la question précédente que l'estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais et convergent.

SOLUTION

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad ; \ \theta > 0$$

1) **Vérifions que f est une densité de probabilité**

f est une ddp si : $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(.)\ est\ définie \ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(.)\ est\ continue$
- $\theta > 0, \forall x \geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}} \geq 0 \ \Rightarrow \ \forall x \geq 0, f(x) \geq 0$
  $\forall x < 0, f(x) = 0$

  $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{0}\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_0^{+\infty}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$

Conclusion : f est une ddp

2) **Estimateur par la méthode du Maximum de vraisemblance de θ**

$$L(x_i, \theta) = \prod_{i+1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i+1}^{n} \left(\frac{2x_i}{\theta}\, e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}\right) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{\frac{-1}{\theta}\sum x_i^2}$$

$$\log L = \log\left[\left(\frac{2}{\theta}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{\frac{-1}{\theta}\sum x_i^2}\right] = n\log 2 - n\log\theta + \log\prod x_i - \frac{1}{\theta}\sum x_i^2$$

CPO : $\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{\theta^2} = 0 \qquad \Rightarrow \ \hat{\theta} = \frac{\sum x_i^2}{n}$

CDO : $\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum x_i^2}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\, n\theta}{\theta^3} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$

$$\Rightarrow Estimateur\ par\ MV:\ \hat{\theta} = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

3) **Estimateur par la méthode des moments de θ :** On calcule $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2.f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2.\frac{2x}{\theta}\ e^{-\frac{x^2}{\theta}}\ dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{2x^3}{\theta}\ e^{-\frac{x^2}{\theta}}\ dx = \theta \int_{0}^{+\infty} u\, e^{-u} du = \theta.\Gamma(2) = \theta$$

Avec $u = \frac{x^2}{\theta}$ $\quad et \quad dx = \frac{\theta}{2x} du$

$$\rightarrow \theta = E(X^2) = m_2 \qquad \rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

n

4°) Loi de Probabilité de $Y = X^2$- soit G et F les fonctions de répartition de Y et X respectivement. Et g et f les d.d.p. de celles-ci respectivement. On a :

$$G(y) = P(Y<y) = P(X^2<y) = P(|X| < \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow g(y) = f(\sqrt{y}).\frac{1}{2\sqrt{y}} + f(-\sqrt{y}).\frac{1}{2\sqrt{y}} = f(\sqrt{y}).\frac{1}{2\sqrt{y}} + 0 = 2\frac{\sqrt{y}}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}.\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}$$

Et Y suit une loi exponentielle de paramètre θ.: E(Y) =θ.

5°) Or l'estimateur de θ est : $\hat{\theta} = \frac{\sum_i X_i^2}{n} = \frac{\sum_i Y_i}{n} = \overline{Y} \Rightarrow E(\hat{\theta}) = E(\overline{Y}) = E(Y) = \theta$. Cet estimateur est sans biais de θ.

Par ailleurs $V(\hat{\theta}) = V(\overline{Y}) = \frac{V(Y)}{n} = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Et l'estimateur est convergent.

Exercice2- Corrigé

X est une variable continue dont f est la d. d. p. *si* $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ et \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\ e^{-\frac{x^2}{\theta}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases} \ ;\ \theta > 0$$

1°) f est une densité de probabilité. En effet :

- $\theta > 0, x > 0 \Rightarrow \frac{2x}{\theta}\ e^{-\frac{x^2}{\theta}} \geq 0$ et $f(x) \geq 0; \forall x \in IR$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\ dx = 0 + \left[-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_0^{+\infty} = 1$

2°) Estimateur du Maximum de vraisemblance de θ.

$$L = \prod_i f(x_i, \theta) = \prod \left(\frac{2x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{\theta}} \right) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \prod_i (x_i) e^{-\frac{\sum_i x_i^2}{\theta}}$$

$$lnL(X_n;\theta) = nln2 - nln\theta + ln\left(\prod x_i\right) - \frac{\sum x_i^2}{\theta}$$

$$lnL(X_n;\theta) = nln2 - nln\theta + \sum lnx_i - \frac{\sum x_i^2}{\theta}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Log} L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_i x_i^2}{\theta^2} = \frac{-n\theta + \sum_i x_i^2}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_i x_i^2}{n}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \operatorname{Log} L}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = \left.\frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_i x_i^2}{\theta^3}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{2n\hat{\theta}}{\hat{\theta}^3} = -\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0 \quad \text{et} \quad \hat{\theta}(X_n) = \frac{\sum_i X_i^2}{n}$$

Donc l'estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV) est :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_i X_i^2$$

3°) Estimer par la méthode des moments.
La méthode des moments consiste à égaliser les moments simples théoriques $E(X^r)$ et les moments simples empiriques $\bar{X}_r = \frac{\sum x_i^r}{n}$

On calcule $E(X^2)$ et égalisons à $\bar{X}_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \left(\frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} ue^{-u}\theta du = \theta\Gamma(2) = \theta 1! = \theta}_{fonction\ gamma\ d'Euler}$$

$$\Rightarrow \theta = E(X^2) = m_2 \text{ ; et } \hat{\theta} = \frac{\sum_i X_i^2}{n}$$

Remarque : méthode d'intégration débouchant sur la fonction gamma d'Euler pour calculer

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \left(\frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) dx \ \ et\ posons\ u = \frac{x^2}{\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \theta u \\ et \\ du = \frac{2xdx}{\theta} \Rightarrow dx = \frac{\theta du}{2x} \\ et \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\theta} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} u = 0\ et\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\theta} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u = +\infty \end{cases}$$

On remplace u dans le calcul de $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \left(\frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) dx = \int_0^{+\infty} \theta u \frac{2x}{\theta} e^{-u} \left(\frac{\theta du}{2x}\right) = \int_0^{+\infty} \theta u e^{-u} du = \theta \int_0^{+\infty} u e^{-u} du$$

Rappel : la fonction gamma d'Euler est: $\begin{cases} \quad\quad\quad pour\ n > 0 \\ \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = (n-1)! \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} ue^{-u}du = \Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \theta \int_0^{+\infty} ue^{-u}du = \theta \times 1! = \theta \ \ soit \ \ E(X^2) = \theta$$

4°) Loi de Probabilité de Y= X²

Soient F et f respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité (ddp) de X.
Soient G et g respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité (ddp) de Y.
On a :

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 < y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow g(y) = G'(y) = [F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})]' = [F(\sqrt{y})]' - [F(-\sqrt{y})]'$$

$$on\ sait\ que: (gof)(x)' = f' \times g'(f(x))$$

$$g(y) = [(\sqrt{y})' \times F'(\sqrt{y})] - [(-\sqrt{y})' \times F'(-\sqrt{y})]$$

$$g(y) = [(\sqrt{y})' \times f(\sqrt{y})] - [(-\sqrt{y})' \times f(-\sqrt{y})]$$

$$\Rightarrow g(y) = \left[\frac{1}{2\sqrt{y}} \times f(\sqrt{y})\right] - \left[-\frac{1}{2\sqrt{y}} \times \underbrace{f(-\sqrt{y})}_{f(x)=0\ si\ x<0}\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \underbrace{f(\sqrt{y})}_{f(x)=\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}},\ si\ x\geq 0} + 0$$

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{2\sqrt{y}}{\theta} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{\theta}} = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}}$$

$$soit\ g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

Et Y suit une loi exponentielle de paramètre θ, avec E(Y) = θ et V(Y) = θ^2.

5°) Or l'estimateur de θ est : $\hat{\theta} = \frac{\sum_i X_i^2}{n} = \frac{\sum_i Y_i}{n} = \overline{Y} \Rightarrow E(\hat{\theta}) = E(\frac{\sum_i Y_i}{n}) = \frac{1}{n} \times n\theta = \theta$. Cet estimateur est sans biais de θ.

Par ailleurs $V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{\sum_i Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(\sum_i Y_i) = \frac{1}{n^2} \times n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$

Et l'estimateur est convergent.

Exercice 3 – Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 1 \\ \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}-1} & si\ x \geq 1 \end{cases} \quad ; \alpha > 0$$

1°) Vérifier que f est une densité de probabilité. Calculer l'espérance mathématique de X.
2°) Estimer α par la méthode du maximum de vraisemblance puis par la méthode des moments.
3°) Montrer que cet estimateur est sans biais et Convergent.

SOLUTION

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 1 \\ \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}-1} & si\ x \geq 1 \end{cases} \quad ; \alpha > 0$$

1) **Vérifions que f est une densité de probabilité**

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(.) est\ définie\ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(.) est\ continue$

- $\forall \alpha > 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\, x^{-\frac{1}{\alpha}-1} \geq 0 \Rightarrow \forall x \geq 1, f(x) \geq 0$

  $\forall x < 1, f(x) = 0$

  $$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\, x^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, dx = 1$

Conclusion : f est une ddp

2) **Estimateur par la méthode du Maximum de vraisemblance de α**

$$L = \prod_{i+1}^{n} f(x_i, \alpha) = \prod_{i+1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha}\, x^{-\frac{1}{\alpha}-1}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{-1/\alpha-1}\right)$$

$$\log L = \log\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{-1/\alpha-1}\right)\right] = -n\log\alpha - \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\sum \ln x_i$$

CPO : $\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum \ln x_i}{\alpha^2} = 0 \qquad \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum \ln x_i}{n}$

CDO : $\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{2\sum \ln x_i}{\alpha^3} = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{2\, n\alpha}{\alpha^3} = -\frac{n}{\alpha^2} < 0$

$$\Rightarrow Estimateur\ par\ MV: \ \hat{\alpha} = \frac{\sum \ln x_i}{n}$$

3)

- Posons $Y = \ln x_i$

$$E(\hat{\alpha}) = E\left(\frac{\sum \ln x_i}{n}\right) = E\left(\frac{\sum Y}{n}\right) = E(\bar{Y}) = E(Y) = \bar{Y} = \frac{\sum \ln x_i}{n}$$

$E(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ ➔ L'estimateur est sans biais

- $V(\hat{\alpha}) = V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{n} = \frac{\alpha^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ➔ l'estimateur est convergent