

TD DE MATHÉMATIQUES : OPTIMISATION 2 (ECUE 4)

Exercice 1

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Correction :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

D'où la relation demandée.

Exercice 2 (***)

On considère les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Elles sont définies par :

$$f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, xy \sin(xy) \exp(y^2)), \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiniennes $J_f(x, y)$ et $J_g(u, v, w)$ de f et de g .
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiniennes.

Correction

1. $g(f(x, y)) = xy^2 \sin^2(xy) \cos x \exp(y^2)$

- 2.

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = y^2 \sin(xy) \exp(y^2)(2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy))$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} = 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2)(xy \cos(xy) + (1 + y^2) \sin(xy))$$

3. Calculons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= y \sin(xy) \exp(y^2) + xy^2 \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y \exp(y^2)(\sin(xy) + xy \cos(xy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= x \sin(xy) \exp(y^2) + x^2 y \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy^2 \sin(xy) \exp(y^2) \\ &= x \exp(y^2)(\sin(xy) + xy \cos(xy) + 2y^2 \sin(xy)) \\ &= x \exp(y^2)((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)). \end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne J_f de f s'écrit

$$\begin{aligned} J_f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ -y \sin x & \cos x \\ y \exp(y^2)(\sin(xy) + xy \cos(xy)) & x \exp(y^2)((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne J_g de g est :

$$\begin{aligned} J_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w} \right] = [vw, uw, uv] \\ &= [xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2), xy \sin^2(xy) \exp(y^2), y \sin(xy) \cos x] \end{aligned}$$

4. La matrice jacobienne $J_{g \circ f}$ de la fonction composée $g \circ f$ s'écrit comme un produit matriciel :

$$J_{g \circ f} = J_g \circ J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2))y \cos(xy) \\ &\quad - (xy \sin^2(xy) \exp(y^2))y \sin x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x)y \exp(y^2)(\sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) - xy^2 \sin x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + y^2 \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y^2 \sin(xy) \exp(y^2)(2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2))x \cos(xy) \\ &\quad + (xy \sin^2(xy) \exp(y^2)) \cos x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x)x \exp(y^2)((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + xy \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + xy(1 + 2y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= 2x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy(1 + y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &= 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2)(xy \cos(xy) + (1 + y^2) \sin(xy)). \end{aligned}$$

Exercice 3

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée du nombre suivant :

$$\arctan[\sqrt{4.03} - 2 \exp(0.01)]$$

Correction :

Prendre

$$h(x, y) = \arctan[\sqrt{4+x} - 2 \exp(y)]$$

On a :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2(1 + (\sqrt{4+x} - 2 \exp(y))^2)\sqrt{4+x}}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{2 \exp(y)}{1 + (\sqrt{4+x} - 2 \exp(y))^2}$$

d'où, avec $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{1}{4}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = -2$

$$\Delta h = h(x, y) - h(0, 0) \approx \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)\Delta x + \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)\Delta y$$

avec $\Delta x = 0.03$ et $\Delta y = 0.01$

On obtient donc :

$$\arctan[\sqrt{4.03} - 2e^{0.01}] \approx h(0, 0) + \frac{1}{4}(0.03) + (-2)(0.01)$$

$$\text{avec } h(0, 0) = \arctan(\sqrt{4} - 2e^0) = \arctan(0) = 0$$

Ainsi,

$$\arctan[\sqrt{4.03} - 2e^{0.01}] \approx 0.0075 - 0.02 = -0.0125$$

Exercice 4 (*)**

Calculer les différentielles suivantes, sans calculer des dérivées partielles, en utilisant les propriétés des différentielles de sommes, produits et composées :

$$(a) \, d(\ln(xy)) \quad (b) \, d(xyz(1 + \sinh(yz))) \quad (c) \, d(\sin(x^2y)e^{x-y})$$

Correction :

Utiliser les règles suivantes:

$$d(f + g) = df + dg,$$

$$d(fg) = f dg + g df,$$

$$d(f \circ h) = (f' \circ h) dh.$$

On a :

$$d(\ln(xy)) = \frac{d(xy)}{xy} = \frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x};$$

$$\begin{aligned}d(xyz(1 + \sinh(yz))) &= (1 + \sinh(yz))d(xyz) + xyzd(\sinh(yz)) \\&= yz(1 + \sinh(yz))dx + xz(1 + \sinh(yz))dy + xy(1 + \sinh(yz))dz \\&\quad + xyz \cosh(yz)d(yz) \\&= yz(1 + \sinh(yz))dx + xz(1 + \sinh(yz))dy + xy(1 + \sinh(yz))dz \\&\quad + xyz^2 \cosh(yz)dy + xy^2z \cosh(yz)dz \\&= yz(1 + \sinh(yz))dx \\&\quad + xz(1 + \sinh(yz) + yz \cosh(yz))dy \\&\quad + xy(1 + \sinh(yz) + yz \cosh(yz))dz;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(\sin(x^2y)e^{x-y}) &= (\cos(x^2y)e^{x-y}) d(x^2y) + \sin(x^2y)e^{x-y}d(x - y) \\&= x^2 \cos(x^2y)e^{x-y}dy + 2xy \cos(x^2y)e^{x-y}dx \\&\quad + \sin(x^2y)e^{x-y}dx - \sin(x^2y)e^{x-y}dy \\&= (x^2 \cos(x^2y) - \sin(x^2y))e^{x-y}dy + (2xy \cos(x^2y) + \sin(x^2y))e^{x-y}dx\end{aligned}$$

Exercice 5

Calculer les matrices hessiennes des fonctions définies par les expressions suivantes sur leur domaine de définition naturel :

$$\sin(xyz), \quad \sin^2(y/x)$$

Correction :

$$d \sin(xyz) = yz \cos(xyz)dx + zx \cos(xyz)dy + xy \cos(xyz)dz$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} -y^2 z^2 \sin(xyz) & z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz) & y \cos(xyz) - xy^2 z \sin(xyz) \\ z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz) & -x^2 z^2 \sin(xyz) & x \cos(xyz) - x^2 y z \sin(xyz) \\ y \cos(xyz) - xy^2 z \sin(xyz) & y \cos(xyz) - x^2 y z \sin(xyz) & -x^2 y^2 \sin(xyz) \end{bmatrix}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} d(\sin^2(y/x)) &= -2yx^{-2} \sin(y/x) \cos(y/x)dx + 2x^{-1} \sin(y/x) \cos(y/x)dy \\ &= \sin(2y/x) \left(-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) \end{aligned}$$

On obtient la matrice Hessienne suivante :

$$\begin{bmatrix} 2yx^{-3} \sin(2y/x) + 2y^2 x^{-4} \cos(2y/x) & -x^{-2} \sin(2y/x) - 2yx^{-3} \cos(2y/x) \\ -x^{-2} \sin(2y/x) - 2yx^{-3} \cos(2y/x) & 2x^{-2} \cos(2y/x) \end{bmatrix}$$

Exercice 6 (*)**

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0, 0)$;
2. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0, 0)$;
3. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0, 0)$.

Correction :

Rappel : Pour qu'un point critique non dégénéré présente un maximum relatif (resp. minimum relatif) il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit négative (resp. positive) ; pour qu'un point critique non dégénéré présente un point selle il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit (non dégénérée et) indéfinie.

On a :

$$1. df = (2x - y)dx + (2y - x)dy \text{ et } \text{Hess}_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (u, v)\text{Hess}_f(0, 0) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u, v) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u(2u - v) + v(2v - u) = 2(u^2 - uv + v^2) \\ &= 2 \left(\left(u - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0, 0)$ est positive et ce point présente donc un minimum local.

2. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6 = (x + y)^2 + 6$ d'où le point $(0, 0)$ présente un minimum local.

3. $df = (3x^2 + 2x + 2y^2 + 3y)dx + (4xy - 4y^3 + 3x + 2y)dy$ et

$$\text{Hess}_f = \begin{bmatrix} 6x + 2 & 4y + 3 \\ 4y + 3 & -12y^2 + 4x + 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} (u, v)\text{Hess}_f(0, 0) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u, v) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= (2u + 3v)u + (3u + 2v)v = 2(u^2 + 3uv + v^2) \\ &= 2 \left(\left(u + \frac{3v}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}v^2 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0, 0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

Exercice 7 :

Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

Correction

Puisque $df = \cos x dx + (2y - 2)dy$, les points critiques sont

les points $((k + 1/2)\pi, 1)$ ($k \in \mathbb{Z}$). En plus, $\text{Hess}_f = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et

$$-\sin((k + 1/2)\pi) = (-1)^{k+1}$$

d'où $\text{Hess}_f((k + 1/2)\pi, 1) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Par conséquent, si k est impaire, le point $((k + 1/2)\pi, 1)$ présente un minimum local et, si k est paire, le point $((k + 1/2)\pi, 1)$ présente un point selle.

Exercice 8 (***)

Soit C la courbe d'équation $f(x, y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

1. Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe C au point $(0, 0)$.
2. Déterminer la limite de y/x quand (x, y) tend le long la courbe C vers $(0, 0)$.

Correction :

Rappel du théorème des fonctions implicites pour une fonction f de classe C^1 de deux variables définie dans un ouvert du plan :

Soit (x_0, y_0) un point tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Au voisinage de x_0 , il existe une

fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0) = y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0, y_0) les coordonnées x

et y du point (x, y) satisfassent à l'équation $f(x, y) = 0$ il faut et il suffit que

$$y = h(x) \text{ et, s'il en est ainsi, } h'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Dès que l'intervalle de définition de la fonction h est fixé la fonction h est unique.

On a :

$$1. \text{ Puisque } \frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^y \cos(2x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + e^y \sin(2x)$$

il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$. Par conséquent, il existe une fonction h de la variable x définie au voisinage de 0 telle que

$h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0, 0)$ les coordonnées x et y du point (x, y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$; de même il existe une fonction k de la variable y définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0, 0)$ les coordonnées x et y du point (x, y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$. En plus,

$$h'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)} = -2, \quad k'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)} = -\frac{1}{2}$$

2. Puisque le point $(0, 0)$ appartient à la courbe \mathcal{C} , en 0, les fonctions h et k prennent les valeurs $h(0) = 0$ et $k(0) = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \neq 0 \\ ye^x + e^y \sin(2x) = 0}} y/x = h'(0) = -2.$$

Exercice 9 (***)

Déterminer les points stationnaires de la fonction à deux variables f définie par $f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.

Correction :

1. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ et

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1) = 3x^2 + 4x + 1,$$

les points stationnaires de f sont les points $(-1, 0)$ et $(-1/3, 0)$. En plus,

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x + 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{Hess}_f(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $\text{Hess}_f(-1/3, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Par conséquent la forme hessienne au point $(-1, 0)$ est définie négative et ce point présente un maximum local ; de même, la forme hessienne au point $(-1/3, 0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

Exercice 10 (*)**

Trouver les extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
2. $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.

Correction :

1. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) est un point critique de f .

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Réciproquement, $r = 6x + 6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt - s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt - s^2)(2, \frac{1}{4}) = (rt - s^2)(-2, -\frac{1}{4}) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $(2, \frac{1}{4})$ ou $(-2, -\frac{1}{4})$.

NB : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On en déduit le déterminant de la matrice Hessienne.

Conclusion : f n'admet pas d'extremum local sur \mathbb{R}^2 .

2. La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x - y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x - y) + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ -4(x - y) + 4x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .et

$$r(x, y)t(x, y) - s^2(x, y) = (-4 + 12x^2)(-4 + 12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

On a :

(i) $(rt - s^2)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 48(12 - 2 - 2) = 384 > 0$ Donc ; f admet un extremum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Plus précisément, puisque $r(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2(12) - 4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(x, y) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) &= -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - (-8) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \\
&\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 - 2(x+y)^2 \text{ car } (x+y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 - 2(x^2 + y^2 + 2xy) \\
&\geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 4xy - 4xy + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) \\
&\geq (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

et $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum global.

(ii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(-x, -y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ qui prend également la valeur 8.

(iii) $f(0, 0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x, x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement positives, et donc supérieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Par contre, pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}$, $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Par conséquent, il apparaît que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Conclusion :

La fonction f admet un minimum global égal à 8, atteint en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.