CORRECTION de TD (ECUE 3)

Exercice 1

1. Montrons que u n'est pas inversible.
   On a : $0 = \det u^n = (\det u)^n$, d'où $\det u = 0$, ce qui prouve que u n'est pas inversible.
2. Déterminons les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
   Soit λ une valeur propre de u, il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Or, $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$. Mais, $u^n(x) = 0$ et $x \neq 0$, d'où $\lambda^n = 0$ et donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de u est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme u n'est pas inversible, le noyau de u n'est pas réduit à $\{0\}$. L'endomorphisme u admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est $\ker u$.

Exercice 2

1. Déterminons les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
   Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M - \lambda I) = 0$.

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = (\lambda^2-4)(\lambda^2-9)$$

D'où, $\det(M - \lambda I_4) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3)$.

Les valeurs propres de M sont donc $2, -2, 3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or}\quad \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 4x \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x \end{cases}$$

ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 2, -2, -3)$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\ &= \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\big\} \end{aligned}$$

$$\text{or}\quad \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}$$

ainsi, E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1, -2, -2, 3)$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\ &= \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\big\} \end{aligned}$$

$$\text{or}\quad \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}$$

ainsi, E_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 3, -7, -7)$.

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\ &= \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\big\} \end{aligned}$$

$$\text{or}\quad \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}$$

ainsi, E_{-3} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_4 = (1, -3, -7, 7)$.

2. Montrons que M est diagonalisable.

   La matrice M admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminés en 1) forment une base de $\mathbb{R}^4$. L'endomorphisme dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est représenté par une matrice diagonale dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) puisque $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2$, $Mu_3 = 3u_3$ et $Mu_4 = -3u_4$.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

   Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de passage est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.

   On a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ donc } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

   Mais, $M = PDP^{-1}$, d'où, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$. Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

   On résout le système, et on a :

$$\begin{matrix} u_1 = i + 2j - 2k - 3l \\ u_2 = i - 2j - 2k + 3l \\ u_3 = i + 3j - 7k - 7t \\ u_4 = i - 3j - 7k + 7l \end{matrix} \iff \begin{cases} i = \dfrac{1}{10}(7u_1 + 7u_2 - 2u_3 - 2u_4) \\ j = \dfrac{1}{10}(7u_1 - 7u_2 - 3u_3 + 3u_4) \\ k = \dfrac{1}{10}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\ l = \dfrac{1}{10}(3u_1 - 3u_2 - 2u_3 + 2u_4) \end{cases}$$

   d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Expliquons sans calcul pourquoi la matrice A n’est pas diagonalisable.

On remarque que le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)^4$. Ainsi la matrice A admet-elle une unique valeur propre : $\lambda = 1$, si elle était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A = PI_4P^{-1}$ alors $A = I_4$, or ce n’est pas le cas, par conséquent la matrice A n’est pas diagonalisable.

Exercice 4

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A.
   On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4-X \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} = -(1+X) \begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 5 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= -(1+X)[(X-4)(X+3)+10] = -(1+X)(X^2-X-2) = -(1+X)^2(X-2)$$

2. Démontrons que les valeurs propres de A sont -1 et 2 et déterminons les sous-espaces propres associés.
   Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc bien les réels -1 et 2.
   Les sous-espaces propres associés sont les ensembles

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A+I_3)$$

et

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A-2I_3)$$

On a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -3x-2y-2z = -x \\ 2x+y+2z = -y \\ 3x+3y+2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-2y-2z = 0 \\ 2x+2y+2z = 0 \\ 3x+3y+3z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace caractéristique E_{-1} associé à la valeur propre -1 est donc le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$, il est de dimension 2, égale à la multiplicité de la racine -1.
On a

$$(x,y,z)\in E_2 \iff \begin{cases} -3x-2y-2z=2x \\ 2x+y+2z=2y \\ 3x+3y+2z=2z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x-2y-2z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $y=-x$ et $2z=-3x$.

Le sous-espace caractéristique E_2 associé à la valeur propre 2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,-2,-3)$, il est de dimension 1, égale à la multiplicité de la racine 2.

3. Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
   La question précédente et les résultats obtenus sur les dimensions des sous-espaces propres permettent d'affirmer que la matrice A est diagonalisable. Une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de bases des sous-espaces propres est une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de u est diagonale. Par exemple dans la base formée des vecteurs $u_1=(1,-1,0)$, $u_2=(1,0,-1)$ et $u_3=(2,-2,-3)$, la matrice de u est la matrice D qui s'écrit

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
   La matrice cherchée P est la matrice de passage exprimant la base de vecteurs propres (u_1,u_2,u_3) dans la base canonique. C'est donc la matrice

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a $P^{-1}AP=D$.

Exercice 5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les valeurs propres de A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3.$$

La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or, $A \neq I$.

2. Calculons $(A-I)^2$.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Car, pour $k \geqslant 2$, on a $(A-I)^k = 0$.

3. *Soient* $P(X) = (X-1)^2$ *et* $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimons le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
Il existe des polynômes S et R, avec $d^\circ R < d^\circ P$ ou $R = 0$, tels que

$$Q(X) = S(X)(X-1)^2 + R(X).$$

Notons $R(X) = aX + b$ ($R(X)$ est de degré 1 car P est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X-1)^2 + 2(X-1)S(X) + a,$$

on a donc $Q(1) = R(1) = a + b$ et $Q'(1) = a$, c'est-à-dire $a = Q'(1)$ et $b = Q(1) - Q'(1)$ d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que $P(A) = 0$, en choisissant le polynôme $Q(X) = X^n$ on a $Q(1) = 1$ et $Q'(1) = n$, donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1-n)I.$$

4. (a) Montrons que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A - I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X,Y,Z) \in Im(A-I), \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x+y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $Im(A - I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = (2, -1, 1)$.

(b) Déterminons un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. On pose $\varepsilon_3 = (x, y, z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x+2y-2z = x+2 \\ -x+z = y-1 \\ x+y = z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y-z) = 2 \\ -1(x+y-z) = -1 \\ (x+y-z) = +1 \end{cases} \iff x+y-z = 1.$$

On prends, par exemple $\varepsilon_3 = (1,0,0)$.
Déterminons un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x+2y-2z = x \\ -x+z = y \\ x+y = z \end{cases} \iff x+y-z = 0.$$

On peut prendre le vecteur $\varepsilon_1 = (0,1,1)$ qui n'est pas colinéaire à ε_2.

(c) Ecrivons la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que les matrices de passage.
On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ d'où la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour retrouver A^n, on écrit $A' = I + N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^2 = 0$. Par ailleurs, on a $A = PA'P^{-1}$, d'où

$$A^n = PA'^n P^{-1} = P(I+N)^n P^{-1} = P(I+nN)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nA + (1-n)I.$$