** Exercice 1 : Donner la nature des intégrales suivantes :

$$I_3 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$|\sin(u)| \leq 1 \quad \forall u$, d'où $\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx \leq \int_0^1 dx.$

$\Rightarrow \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx$ est convergente

$\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ est absolument convergente}}$

2

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$ $\boxed{\text{la nature sans calcul}}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ est une fonction paire

$\Rightarrow I_4 = 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2}}_{\text{Intégrale de Rieman avec } \alpha = 2 \geqslant 1}$

$\boxed{I_4 \text{ diverge}}$

3

$$I_6 = \int_0^2 \frac{1}{x^{\alpha^2}} dx$$

$$I_6 = \int_0^2 \frac{1}{x^{\alpha^2}} dx$$

C'est une intégrale de Rieman avec $\alpha^2 < 1$, I_6 converge
ou $\alpha^2 \geqslant 1$, I_6 diverge

Cas où I_6 converge :
$\alpha^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 < 0$

Valeurs de α	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe $\alpha^2 - 1$		$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	

$$\boxed{I_6 \begin{cases} \text{converge si } \alpha \in]-1, 1[\\ \text{diverge si } \alpha \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\end{cases}}$$

4

** <u>Exercice 2</u> : Calculer les intégrales suivantes :

Calculons l'intégrale double I_1 :

Nous savons que : $I_1 = \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

avec $D = \{(x,y)/0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant 2y \leqslant x\}$.

D'où : $I_1 = \int_0^2 \left[\int_0^{x/2} xy\ \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \qquad (1)$

$(1) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^2 \left[x\int_0^{x/2} y\ \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \qquad (2)$

$(2) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x/2}\mathrm{d}x \qquad (3)$

$(3) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^2 x\left(\frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x \qquad (4)$

$(4) \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{8}\int_0^2 x^3\ \mathrm{d}x \qquad (5)$

$(5) \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 \qquad (6)$

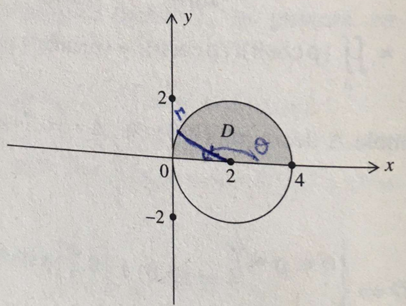
$(6) \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{1}{2}}$.

Calculons l'intégrale double I_5 en passant en coordonnées polaires :

Nous savons que : $I_5 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+/(x-2)^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Préalablement, représentons graphiquement l'ensemble d'intégration D :



Nous sommes en présence d'un cercle de rayon 2 et de centre $A(2,0)$ dont l'équation est $(x-2)^2+y^2 = 4$.

La zone grisée correspond à l'ensemble d'intégration D.

L'allure de D nous conduit au passage en coordonnées polaires.

Procédons au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta + 2 \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}.$$

Dans ces conditions : $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \Rightarrow J = \rho.$

D'où : $I_5 = \iint_{\Delta}((\rho\cos\theta+2)^2+(\rho\sin\theta)^2)\rho d\rho\, d\theta.$

Or l'ensemble Δ décrit par (ρ,θ) est : $\Delta = [0,2]\times[0,\pi]$.

En effet : $(x,y)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq\rho\leq 2 \\ 0\leq\theta\leq\pi \end{cases} \Rightarrow (\rho,\theta)\in[0,2]\times[0,\pi].$

D'où : $I_5 = \int_0^\pi\left[\int_0^2((\rho\cos\theta+2)^2+(\rho\sin\theta)^2)\rho d\rho\right]d\theta$ (1)

$(1)\Leftrightarrow I_5 = \int_0^\pi\left[\int_0^2(\rho^2\cos^2\theta+4+4\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta)\,\rho d\rho\right]d\theta$ (2)

$(2)\Leftrightarrow I_5 = \int_0^\pi\left[\int_0^2(4+4\rho\cos\theta+\rho^2)\,\rho d\rho\right]d\theta$ (3)

$(3)\Leftrightarrow I_5 = \int_0^\pi\left[\int_0^2(4\rho+4\rho^2\cos\theta+\rho^3)d\rho\right]d\theta$ (4)

$(4)\Leftrightarrow I_5 = \int_0^\pi\left[\frac{4\rho^2}{2}+\frac{4\rho^3\cos\theta}{3}+\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 d\theta$ (5)

$(5)\Leftrightarrow I_5 = \int_0^\pi\left(\frac{32\cos\theta}{3}+12\right)d\theta$ (6)

$= 12\pi$

<u>Exercice 3</u> : Résoudre les équations différentielles suivantes :

I/ 1.) $(25-3x)y' + y^2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2\cdot\frac{1}{25-3x}$$

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{25-3x}$$

Posons $u = 25-3x \Rightarrow u' = -3$

$$-\frac{dx}{25-3x} = \frac{1}{3}\frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} = \int-\frac{dx}{25-3x}$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{1}{3}\ln(25-3x)+c$$

$c = \ln(k)$

$$\boxed{y = -\frac{3}{\ln(k^3(25-3x))}}$$

I/ 3) $y' + xy - x^3 y^3 = 0$ (1)

Eq^t Bernoulli

Divisons (1) par y^3

$\Rightarrow y^{-3}y' + xy^{-2} - x^3 = 0$ (2)

Changement de variable

$u = y^{1-n} = y^{1-3} = \boxed{y^{-2} = u}$

$u' = -2y^{-3}y' \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{1}{2} y^3 u'}$

Alors (2) devient :

$u' - 2xu = -2x^3$ (3)

(3) est une Eq^t diff. linéaire d'ordre 1

Equation Homogene de (3)

$u' - 2xu = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = 2x\,dx$

$\int \frac{du}{u} = \int 2x\,dx$

$\Rightarrow u_H = Ke^{x^2}$ où $c = \ln K$.

Solution particulière de (3)

$u_p = K_p H_0(x)$ avec $H_0(x) = e^{x^2}$

$K_p = \int \frac{-2x^3}{e^{x^2}}\,dx = \int -2x^3 e^{-x^2}\,dx$

Intégration par partie

$v = x^2 \qquad w' = -2x e^{-x^2}$

$v' = 2x \qquad w = e^{-x^2}$

$K_p = \int v w' = vw - \int v' w$

$K_p = x^2 e^{-x^2} - \int 2x e^{-x^2}\,dx$

$= x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}$

$K_p = (x^2+1)e^{-x^2}$

$\Rightarrow \boxed{u_p = x^2+1}$

$u_G = x^2 + 1 + Ke^{x^2}$

or $u = y^{-2}$

$\Rightarrow y_G = \pm\sqrt{u_G^{-1}}$

$$\boxed{y_G = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ke^{x^2}}}}$$ avec K Scalaire quelconque

II.

$$y' + 2xy - y^2 = x^2 + 1 \qquad (1)$$

Eqn Ricatti

1) Solution particulière de la forme $p(x) = ax + b$

$\Rightarrow p'(x) = a$

(1) devient : $a + 2x(ax+b) - (ax+b)^2 = a + 2ax^2 + 2bx - a^2x^2 - 2abx - b^2$

$$= a - b^2 + (2b - 2ab)x + (2a - a^2)x^2$$

Par identification en posant l'égalité avec $x^2 + 1$

$$\begin{cases} a - b^2 = 1 \\ 2b - 2ab = 0 \\ 2a - a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{a = 1 \text{ et } b = 0}$$

$\Rightarrow \boxed{p(x) = x}$

2) Solution générale : $y = p + z$

$$\boxed{y = x + z}$$

(1) devient :

$$1 + z' + 2x(x+z) - (x+z)^2 = x^2 + 1$$

$$\boxed{z' = z^2} \Rightarrow \frac{z'}{z^2} = 1 \iff \frac{dz}{z^2} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + c \Rightarrow z = \frac{-1}{x+c}$$

or $y = x + z$

$$\boxed{y = x - \frac{1}{x+c}}$$

III (suite)

• la solution particulière de (E_2) : $x'' - 4x' + 4x = \frac{1}{2} e^t$

$\frac{1}{2} e^t = P_2(t) e^t$ dans e^t, le coefficient associé à t est "1"

et "1" n'est pas racine de (3) $\Rightarrow$ degré$(Q_2(t)) = \deg(P(t)) + 0$
$= 1$

$x_p = Q_2(t) e^t$

Alors $x_p = a e^t = x'_p = x''_p$

Substituons x par x_p dans (E_2)

$a e^t - 4a e^t + 4a e^t = a e^t$

Par identification : $a e^t = \frac{1}{2} e^t \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\boxed{x_{p2} = \frac{1}{2} e^t}$

• la solution générale : $x_G = x_{p1} + x_{p2} + x_H$

$\boxed{x_G = \frac{1}{6} t^3 e^{2t} + \frac{1}{2} e^t + e^{2t}(C_1 + C_2 t)}$

TD MATH ECUE2

** Exercice 1 : Donner la nature des séries :

3) $\sum \frac{1}{2n+1}$ $U_n = \frac{1}{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

. . . .

la série diverge

4) La nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

ici $|U_n| = \frac{1}{n}$ . . . . .

la série $\sum U_n$ converge

5) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$|U_n| = \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} |U_n| =$

$\left(\text{car } \frac{\sqrt{n}+1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} \right)$

Posons $f(n) = \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$f'(n) = \frac{-1/2\, n^{\frac{1}{2}} + 1/2\, n^{-1/2} - 1}{(n+1)^2}$

On ~~vérifie~~ cherche le signe du numérateur : signe < 0

$\Rightarrow f$ décroissant

Conclure . . . $\sum U_n$ converge

Traités en cours :

6) $U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

. . . . .

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ . . . .

Conclure - -

$\sum U_n$ converge

7) $U_n = \frac{a^n}{n!}$

Poser $V_n = |U_n|$ puis utiliser la Règle d'Alembert

. . .

. . .

$\sum U_n$ converge

** <u>Exercice 2</u> : Etudier la convergence simple et uniforme de :

$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ $\quad x \in [0,1]$

1 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+n}\right) = 0$ => Convergence simple

2 $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+nx} - 0\right| = \left|\frac{x}{1+nx}\right| = \frac{x}{1+nx}$

Posons $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$

$f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0 \Rightarrow f$ croissante

$\sup_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} = f_n(1) = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

f_n converge uniformément

** Exercice 3 : Etudier la convergence simple et uniforme

$\boxed{\text{Série de fonctions}}$

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ sur $[0,1[$

Pour tout $x \in [0,1[$, $x^2 \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} x^{2n} = \sum_{n=0}^{N} (x^2)^n$$

$$= \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-x^2}$$

Convergence simple vers la fonction $S = \frac{1}{1-x^2}$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2}\right| = \frac{x^{2N+2}}{1-x^2}$$

Considérons une suite de terme $x_N = 1 - \frac{1}{N}$

~~Si notre série converge uniformément, alors elle le fera vers sa limite simple $S = \frac{1}{1-x^2}$~~

$$\sup_{x\in[0,1[} \frac{x^{2N+2}}{1-x^2} \geqslant \frac{(1-\frac{1}{N})^{2N+2}}{1-(1-\frac{1}{N})^2} \longrightarrow +\infty \neq 0$$

donc pas de convergence uniforme

** Exercice 4 : Etudier la convergence simple et normale :

Etude convergence simple et normale de $\frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$

3/3

1) Si $x=0$, $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $x>0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^3}$

$\frac{x}{n^3} = x \cdot \frac{1}{n^3} \to$ terme général d'une série de Riemann $\alpha = 3 > 1$.

2) $f'_n(x) = \frac{n^3+x^3 - x\,3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{n^3-2x^3}{(n^3+x^3)^2}$

Maximum de $f_n(x)$ quand la dérivée s'annule.

$f'_n(x) = 0 \iff \frac{n^3-2x^3}{(n^3+x^3)^2} = 0$

$n^3 = 2x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{n^3}{2}$

$x = 2^{-1/3}\cdot n$

$f_n(2^{-1/3}\cdot n) = \frac{n\,2^{-1/3}}{n^3 + n^3 2^{-1}} =$

$= \frac{n\,2^{-1/3}}{\frac{3}{2}n^3} = \frac{2^{-4/3}}{3n^2}$

$|f_n(x)| \leq \underbrace{\sup|f_n(x)|}_{=U_n(x)} = \frac{2^{-4/3}}{3n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n^2}$ = terme général d'une série Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \sum U_n$ converge

or $|f_n(x)| \leq U_n \Longrightarrow$ convergence normale