Année / Semestre School year / Semester:	2022/2023 / Semestre : 05
Classe / Cursus : Class / Speciality:	B1C
Nom, prénom de l'enseignant / Identifiant : Teacher's name, first name / ID:	Véronique KEHR-CANDILLE
Matière : Taught subject:	MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR 1
Durée de l'évaluation : Duration:	2H00
Calculatrice autorisée : Calculator allowed : **Documents autorisés :** Authorized documents:	~~Oui (yes) ☐~~ Non (no) X ~~Oui (yes) ☐~~ Non (no) X
Nom et prénom de l'apprenant : Learner's name and first name:	

SUJET :

Justifiez vos réponses

Faites attention à la rédaction

Exercice 1 (*5 points*)

Dans $\mathbb{R}^2$, on note (x^1, x^2) les coordonnées cartésiennes (classiquement notées (x, y)), et on note (y^1, y^2) les coordonnées polaires (classiquement notées (r, θ))

On rappelle que $\begin{cases} x^1 = y^1 \cos y^2 \\ x^2 = y^1 \sin y^2 \end{cases}$

1) En coordonnées cartésiennes, le tenseur métrique est $\begin{cases} g_{ii} = 1 \\ g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$

On rappelle que le tenseur métrique est un tenseur de type (0,2). Calculer l'expression du tenseur métrique en coordonnées polaires.

2) On considère le tenseur **T** de type (2,0), dont les coordonnées dans le système cartésien sont :

$$\begin{cases} T^{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ T^{ii} = +1 \end{cases}$$

Calculer les coordonnées de **T** dans le système polaire

Exercice 2 (*5 points*)

On définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions f, g et h par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère les distributions T_f, T_g et T_h définies à partir de ces fonctions

1) Calculer $(T_f)'$ et $(T_f)''$ (dérivées du 1er et 2ième ordre au sens des distributions)

2) Même question pour $(T_g)'$ et $(T_g)''$

3) Même question pour $(T_h)'$ et $(T_h)''$

<u>Exercice 3</u> (*5 points*)

Soit le domaine plan $\Omega = \{ \text{ points } (x, y) \text{ tels que } x \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \}$

On considère l'EDP :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ f(0, y) = \dfrac{1}{n} \sin(ny) & \forall y \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0 & \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Résoudre cette EDP en cherchant une solution sous la forme $f(x, y) = F(x). G(y)$

Que peut-on dire de la solution quand $x \to +\infty$?

<u>Exercice 4</u> (*5 points*)

Résoudre par la méthode de transformées de Laplace les équations différentielles suivantes :

$$(E1) \quad \begin{cases} f'(x) - f(x) = x\, e^x \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{pour } x \geq 0$$

$$(E2) \quad \begin{cases} f''(x) + 2\, f'(x) - 3\, f(x) = e^{-x} \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{pour } x \geq 0$$