Université Ouaga3S
Savoir. Savoir faire. Savoir être

2024 - 2025

FSTS

LMI

Licence 3 - Semestre 6

Module : Probabilité

Enseignant : Dr. KAFANDO

Devoir à rendre

⋆⋆⋆

Préliminaires

- ***Le devoir sera traité par groupe de 5 personnes.***
- ***On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.***
- ***Le devoir doit être déposé au sécretariat de l'UO3S au plus tard le 10/05/2025.***

⋆⋆⋆

Exercice 1 *Soient X et Y deux variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, \alpha]$, où $\alpha > 0$ est un réel strictement positif. On suppose que X et Y sont indépendantes.*

On définit les variables aléatoires suivantes :

$$Z = \sup(X, Y) - \inf(X, Y) \quad \textit{et} \quad T = \frac{\inf(X, Y)}{\sup(X, Y)}.$$

Déterminer les lois des variables Z et T.

⋆⋆⋆

Exercice 2 *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite indépendante de v.a.r. de Bernoulli, toutes de même paramètre $0 < p < 1$. Soit un entier $r \geq 1$, on définit deux nouvelles variables aléatoires, en posant pour tout $\omega \in \Omega$:*

$$\tau_r(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega) = r\}$$

et

$$\theta_r(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{n+r}(\omega) = r\}$$

avec la convention $\inf \emptyset := +\infty$.

1. *Montrer, pour tout* $x \in]0,1[$, *la relation*

$$\sum_{k=r-1}^{+\infty} C_k^{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

2. *Montrer que la variable aléatoire réelle* τ_r *est une variable aléatoire réelle discrète de loi (dite loi de Pascal de paramètres* r *et* p*) donnée par :*

$$P(r,p) := \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \delta_k.$$

   Vérifier que $P(\tau_r = +\infty) = 0$.

3. *Montrer que la variable aléatoire réelle* θ_r *est une variable aléatoire réelle discrète de loi (dite loi binomiale-négative de paramètres* r *et* p*) donnée par :*

$$I(r,p) := \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k \delta_k.$$

   Vérifier que $P(\theta_r = +\infty) = 0$.

4. *Donner une interprétation des variables aléatoires* τ_r *et* θ_r *en termes de jeu de Pile-ou-Face.*

5. *Montrer qu'un des deux modèles précédents permet de formaliser le problème dit des boîtes d'allumettes de Stefan Banach :*
   Un fumeur a dans chacune de ses deux poches une boîte contenant au départ N *allumettes. Chaque fois qu'il désire fumer une cigarette, il choisit une poche au hasard. Quelle est la probabilité que, le fumeur se rendant compte pour la première fois qu'une boîte est vide, l'autre boîte contienne* k *allumettes, où* k *est un entier naturel inférieur ou égal à* N *?*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 *Soit* $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite indépendante de variables aléatoires réelles de loi normale centrée et de variance* $\sigma^2 > 0$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, *on définit la suite* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *par la relation de récurrence :*

$$X_n = \theta X_{n-1} + U_n, \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

avec $X_0 = 0$.

1. *Déterminer, pour tout* $n \in N$, *la loi de la v.a.r.* X_n.

2. *Étudier la convergence en loi de la suite de v.a.r.* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.