MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union-Discipline-Travail

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

LE VALIDEUR LMD

UFR DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

- ✓ ANALYSE
- ✓ ALGEBRE
- ✓ MECANIQUE DU POINT
- ✓ INFORMATIQUE
- ✓ PROBABILITE- STATISTIQUE
- ✓ ELECTRICITE
- ✓ OPTIQUE
- ✓ TECNIQUE D'EXPRESSION
- ✓ ANGLAIS

LICENCE 1

EDITION 2016

AVANT- PROPOS

La collection **le valideur LMD** est un recueil d'anciens sujets LMD et de quelques conseils absolument importants à savoir. Celle ci a été conçue pour permettre aux étudiants de première année de l'UFR math info de s'imprégner de la façon dont les professeurs composent. En effet à l'université, il ne s'agit pas de bosser dans le vide. Connaitre le cours est capitale ; connaitre les Travaux Dirigés est conseillé mais ne pas savoir comment les professeurs composent est dangereux. Qu'entend t-on par la façon dont le professeur compose ?
Chaque professeur a une manière à lui de diriger un exercice lors de la composition ; c'est-à-dire la façon dont il pose ses questions et le type d'exercices qu'il soumet à l'étudiant.

- La première partie de ce document présente quelques recommandations vue mon expérience dans le dit niveau.
- La seconde partie est consacrée aux sujets des années académiques antérieures (2012-2013/ 2013-2014/2014-2015).
- La troisième partie se compose des éléments de corrections.

Je pense avoir rendu cet ouvrage assez attrayant pour qu'il soit un précieux trésor de votre travail personnel tout au long de l'année.

J'ose croire que cet ouvrage contribuera à l'amélioration des résultats aux différents examens des unités d'enseignements.

Je remercies d'avance toutes les bonnes volontés pour leurs remarques et suggestions à l'adresse bobetgoualo@gmail.com qui permettront d'améliorer à l'avenir le contenu de ce document et en faire un outil incontournable pour le succès aux examens.

L'auteur.

By BOBET, at 2:16 p

UFR	MATHEMATIQUE
Domaine	Sciences et Technologies
Grade	Licence
Mention	Mathématiques
Niveau	L1

SEMESTRE 1

intitulé		Elements constitutifs	Masse horaire Semestrielle CM	ID	TP	(oef	To-ai	TPE	lota!	Credits	Statut	Enseignants Proposes	Responsable UE
Fonction d'une variable réelle	fond	Smtes et Fonctions denvables	IS	21				65	125	5	Obligatoire	FEUTO Justin	FEUTO Justin
		Caicul integral	9	15								BAILLY Bale	
Algèbre des structures	fond		24	24				52	100	4	Obligatoire	Kouakou Mathias	Kouakou Mathias
Mécanique du point	fond	Outiis Mathematiques	6	6				65	125	5	Obligatoire	Sylla moussa	SYLLA Moussa
		Cinematique du point	12	12									
		M^canique du point	12	12									
initiation à I'lnformatique	fond	Architecture des ordinateurs	12	12				39	7S	3	Obligatoire	MAMADOU Diarra	MAMADOU Diarra
		Initiation à la programmation		4	8								
Elements de logique	Metho		15	21				39	75	3	Obligatoire	KOUAKOU Mathias	KOUAKOU Mathias
Economie Génera!e	Overture		18	18				39	75	3	Obligatoire	FOADE DENIS JOEL	FOADE DENIS JOEL
Outils bureautiques	Metho		6		18			26	50	2	Obligatoire	BROU Patrice	BROU Patrice
Technique d'expression et méthodologie du travail scientifique	Metho	Techniques d'expression	4	8		------		26	50	2	Obligatoire	Coulybaly fetigué	Coulybaly fetigué
		Méthodologie du travail	4	8									
Anglais	Metho		6	18				26	50	2	Obligatoire	DEMRELE Mariam	DEMBELE MARIAM
UE découverte biologique	Ouverture		12					13	25	1	Obligatoire	OUATTARA JEAN MARIE	OUATTARA JEAN MARIE
Total UE			155	179			360	390	7S0	30			

SEMESTRE 2

intitulé		Elements constitutifs	Masse Horaire semestriel CM	TD	TP	Coef		TPE	Total	Credits	Statut	Enseignants Proposes	Responsable UE
Eléments d'algrèbre linéaire	Fond	CALCUL MATRICIEL	9	12				65	125 ;	5	Obligatoire	CODJIA ADOPHE	ADJE ASSOHOUN(le Doyen)
		ESPACE VECTORIEL	15	24								ADJE ASSOHOUN	
ANALYSE REELLE	Fond		24	24				52	100'	4	Obligatoire	KANGNI Kinvi & Dr TOURE	KANGNI Kinvi
ALGORITHME ET PROGRAMMATION	Fond	ALGORITHME	12	12				52	100:	4	Obligatoire	Dr MOBIO	Dr MOBIO
		PROGRAMMATION PASCAL	12		12								
PROBABILITE STATISTIQUE	Fond	STATISTIQUE DESCRIPTIVE	9	12				65	125	5	Obligatoire	OWO Jean Marc	AMAN AUGUSTE
		PROBABILITE	12	18								AMAN AUGUSTE	
PROJET PERSONNEL ET PROFESSIONNEL ETUDIANT	Metho			12				13	25	1	Obligatoire	SOHOU Toussaint	SOHOU Toussaint
ELECTRICITE	Spe		24	24					100	4	Option		
OPTIQUE	Spe		24	24				52		4	Option	DR DIAWARA	DR DIAWARA
TRAVAUX PRATIQUE DE PHYSIQUE	Metho							39	7S	3	Option	SSMT	SSMT
Total UE										30			

PARTIE 1

Introduction

Je vous souhaite la bienvenue dans la filière mathématique informatique (MI). Comme vous le voyez c'est une filière scientifique. En effet elle fait partie du domaine des sciences et technologies qui regroupent en outre les Unités de Formations et de Recherche (UFR) Sciences des Structures de la Matière et Technologie (SSMT), Biosciences(CBG), sciences de la terre et des ressources minières (STRM). Si vous êtes étudiants en MI c'est que votre compétence est approuvée. Ah oui car titulaire d'un BAC scientifique (C, D, E), vous êtes aptes. Ici en MI c'est le courage rien que le courage. L'année académique se fait en 2 semestres dont chaqu'un d'eux est composé d'unités d'enseignements (UE) qui s'évaluent à 30 crédits. Ainsi l'année se compose de 60 crédits dont 48 (soit 80% de 60) au moins permettent à l'étudiant de s'inscrire s'il le désire en deuxième année toute fois en revenant composer les UE qui n'ont pas été validées (voir la maquette pédagogique). Pour ce fait l'étudiant est amené à rédiger ***une demande de dérogation*** dont un modèle est donné juste après la première partie du document.
La conséquence liée au passage avec au moins 80% des crédits (pour ceux qui n'ont pu avoir 100% des crédits c'est-à-dire les 60 crédits) est que vous payez les frais d'inscription de la deuxième année puis la moitié de ceux de la première année.
L'étudiant a le choix de rester en première année puis valider tous ses crédits et aller en deuxième année (Ne fait donc pas de demande de dérogation).

Les cours sont donnés en AMPHI par un professeur ; c'est ce que l'on qualifie de Cour Magistral(CM). Celui-ci fait un briefing de son polycopié s'il en dispose dans le cas contraire il vous fait copié comme cela a été les années antérieures dans l'ancien système. À la fin d'un certain nombre de CM terminé on fait les Travaux Dirigés qui consistent à faire des exercices pour mettre en pratique les acquis du cours avec un enseignant mis à votre disposition. Pendant ces Travaux Dirigés l'enseignant est autorisé à faire des interrogations, des devoirs qui par la suite seront pris en compte pour le calcul de moyenne pour le contrôle continu .Ainsi à la fin des TD il faut penser à un contrôle final qui représente un examen comme au baccalauréat.

Je tiens à remercier tous les amis qui de prêt ou de loin m'ont soutenu. En particulier,

- KONE yacouba et adama de la LICENCE 2.
- DIALLO eric oury ,DOUGBAN monsia,KONE moro de la LICENCE 2.
- DJROUGBA Richmond de la LICENCE 2.
- TIEMOKO loua de la LICENCE 2 qui ma aidé dans la diffusion du document par son verbe.
- A toute la LICENCE 2 de l'année académique 2014-2015.
- VE monde Ephraïm de la LICENCE 1 qui m'a temps encouragé.
- SEKONGO de la LICENCE 1 qui a contribué à l'actualisation du document.
- KOUADIO Ramos de la LICENCE 1.
- A tous les étudiants LICENCE 1 de l'année académique 2014-2015 qui ont apportés des critiques dans le but de l'amélioration de l'**EDITION 2015** de ce document.

i) Le comportement d'un nouvel étudiant dès son premier arrivé à la fac

L'étudiant s'il connait un ami bien avant sa venue en math info prend contact avec celui-ci pour qu'il lui donne quelques directives afin de voir son département et si possible demander à ce dernier quelques conseils. A son arrivé de à la fac, doit s'informer sur la rentrée académique. Celui-ci peut par curiosité écouter les dires de plusieurs étudiants qui s'y trouve déjà ensuite après la connaissance des lieux peut se diriger au **bureau M** de l'UFR pour prendre de plus amples informations du fait de la présence des conseillers disposés à nous fournir de vraies informations.

ii) Le comportement de l'étudiant lors d'un cours magistral

Lorsque vous suivez un cours magistral SVP soyez concentré car la moindre distraction peut vous compter chère dans la compréhension du polycopié du professeur.
Eviter de faire une autre matière pendant que le professeur est présent .En effet il y a des professeurs qui insistent sur des points du cours qui sont à 99% susceptibles de sortir à l'examen.
Ne prenez en aucun cas à la légère les cours magistraux. Votre présence à un CM doit être pour vous une obligation. C'est en cela que vous comprendrez certaines démonstrations du cours.

iii) Le comportement dé l'étudiant pendant les travaux dirigés

En TD il faut le signaler ; c'est comme si vous étiez dans une classe comme en terminale .Donc l'appel est fait (sous forme de liste de présence), les absences sont marquées et sont comptabilisées pour la note de contrôle continu qui compte un tiers dans la validation de l'UE**.**
La participation à la correction des exercices qui vous sont proposés sur la fiche de TD vous apportes un plus à la compréhension du cours.

iv) Le comportement à avoir pour la préparation d'un examen

Un examen comme vous l'avez constaté en terminal ne se prépare pas à la veille de la composition. Vous devez vous dire pendant que vous assistez aux CM et aux TD que c'est le moment de comprendre pour bien faire la composition.

v) Les risques à ne pas prendre pour ne pas se retrouver dans de sérieux problèmes avec l'administration

Excuser moi de le dire ; la **tricherie** est un danger ; c'est une perte de dignité **.**Alors ôtez cette idée dans votre pensée. En voulant s'adonner à une telle pratique vous vous embrouiller et en fin de compte, vous avez un doute sur ce que vous avez appris.
Eviter donc la tricherie.

FILIERES PROFESSIONNALISEES MIAGE-GI

MODELE DE DEMANDE DE DEROGATION

NOM :
PRENOMS :
NIVEAU EN 2014-2015 :
CONTACT :

A

Monsieur le Directeur de l'UFR de Mathématiques et Informatique s/c du Responsable des Filières MIAGE-GI.

OBJET : Demande de dérogation d'inscription en **L2 ou L3 ou M2**

Monsieur le Directeur,

Je viens par la présente solliciter de votre haute bienveillance l'autorisation de m'inscrire en **L2 ou L3 ou M2**dans toutes les unités d'enseignement.

En effet, j'ai obtenu ......crédits en L1 ou L2 ou M1 Durant l'année académique 2014-2015.

Je reprends les Unités d'Enseignement ci-dessous : *(mentionner les matières à reprendre)*

- ....
- ....

Dans l'attente d'une suite favorable, je vous prie de recevoir, Monsieur le Directeur, l'expression de ma profonde gratitude.

Fait à Abidjan, le..... Novembre 2015

L'intéressé(e)

PARTIE 2

- **Quelques devoirs pour débuter**

- **Sujets de l'année académique 2012-2013**

- **Sujets de l'année académique 2013-2014**

- **Sujets de l'année académique 2014-2015**

Aller plus loin

Université Félix Houphouët-Boigny **2013-2014**
UFR-MI-MIAGE-L1 **40 minutes**

Intérrogation écrite

Documents et calculatrices interdits.

Barème indicatif : +0,5 point pour toute bonne réponse, -0,25 point pour toute réponse fausse, 0 point pour les questions sans réponse.

Répondez par vraie ou faux aux affirmations suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}$ toutes parties majorée admet un maximum.
2. Si A est une partie minorée de $\mathbb{R}$ alors $\inf A = -\sup(-A)$.
3. Entre deux nombres rationnels, il toujours une infinitée de nombre irationnels.
4. Si n est la partie entière de x alors on a $x - 1 < n \leq x$.
5. Toute suite décroissante admet une limite.
6. La somme de deux irrationnels est un irrationel.
7. Toute suite bornée est convergente.
8. Toute suite numérique qui converge vers 1 est positif á partir d'un certain rang.
9. Une suite croissante non majorée diverge.
10. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui est de Cauchy.
11. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes alors la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
12. Pour tout couple de réels non nuls (a, b), il existe une infinité de suites qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
13. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
14. Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f atteint ses bornes sur I.
15. Toute fonction continue sur un intervalle I est uniformement continue sur cet intervalle.
16. Si f est uniformement continue sur I alors f est continue en tout point de I.
17. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [-1, 4]$ alors l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.
18. Le théorème de Rolle dit que si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
19. Une fonction continue f admet un extrémum en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
20. Si f est une fonction bijective dérivable en 2 et telle que $f(2) = 2 = f'(2)$ alors $(f^{-1})'(2) = 1/2$.
21. Si une fonction f admt un developpement limité en x_0 alors f est dérivable en x_0.
22. Pour qu'une fonction admette un developpement limité d'ordre 10 en x_0 il faut que la fonction soit de classe C^{10} dans un voisinage de x_0.

23. Si le developpement limité de f au voisinage de 0 est $f(x) = x - 2x^7 + x^8 + o(x^8)$, alors la courbe de f au voisinage de 0 est en dessous de la tangente.
24. Si f admet un developpement limité en $+\infty$ alors la courbe de f admet une asymptote oblique.
25. Si f admet un developpement limité d'ordre 1 en x_0 alors f admet un prolongement par continuité en x_0 continue, mais pas dérivable en x_0.
26. La formule de Taylor permet d'avoir le developpement limité de toute fonction à tout ordre.
27. Si une fonction n'est pas définie en un point, alors elle n'admet pas de developpement limité en ce point.
28. Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = 1 + x^2$ des fonctions définie sur $\mathbb{R}$. Il existe $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel $\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{\cos x_0}{2x_0}$
29. Une suite arithmétique non nul n'est jamais convergente.
30. Toute suite géométrique admet une limite.
31. Il existe au moins une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant $\varphi(3) > 3$.
32. Toute partie bornée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum et un minimum.
33. Il existe des parties bornées de $\mathbb{Q}$ qui n'admettent pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
34. Si la dérivée de f s'annulle en x_0 alors f admet en ce point un extrémum local.
35. Une fonction f strictement croissante sur un intervalle I est contiunue sur I.
36. La fionction tangente hyperbolique notée th est bijective sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est notée Arcth$x$.
37. Les fonctions sin, cos et tan admettent des développements limité de tout ordre en 0.
38. Une fonction f peut être dérivable en un point x_0 sans être continue en x_0.
39. Une fonction f peut être continue en un point x_0 sans être dérivable en x_0.
40. Pour avoir le developpement limité de $e^{\cos x}$ au voisinage de 0, on remplace dans le développement limité de e^x au voisinage de 1, x par le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0.

Université Félix Houphouët-Boigny **2013-2014**
UFR-MI-L1 **1 heure 30**

Devoir de suites et fonctions dérivables

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions majorées sur $\mathbb{R}$. Comparer $\sup f + \sup g$ et $\sup(f+g)$.

Exercice 2. 1. Que signifie l'expression "$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$" ?

2. Justifier que l'ensemble $\left\{2^{\frac{p}{q}}/(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. 1. Quand dit-on qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ?

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

(a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle de Cauchy ? Justifier.

(d) Donner avec justification la limite si elle existe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 4. Soit f une fonction numérique de la variable réelle, n un entier naturel et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Quand dit-on qu'une fonction f admet un developpement limité d'ordre n en x_0 ? en $+\infty$?
2. Justifier l'existence et déterminer le developement limité de la fonction $g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$ à l'ordre 6 au vosinage de 0.
3. On suppose que au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{1}{x}f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^6} + o(\frac{1}{x^6}).$$

Que peut-on dire de la branche infinie de la courbe de f ?

Université Félix Houphouët-Boigny — 2013-2014
UFR-MI-MIAGE-L1 — 1 heure

Devoir 2 de suites et fonctions dérivables

Exercice 1 (5 points). Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée, alors la fonction f^2 est bornée et

$$\inf f^2 = (\inf f)^2 \text{ et } \sup f^2 = (\sup f)^2$$

Exercice 2 (5 points).

1. Enoncer clairement les théorèmes de Rolle et des accroissaments finis.
2. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x > \frac{x}{1+x^2}$

Exercice 3 (5 points). Calculer la limite

1. de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{k+1}{k}}}{n}$$

2. de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$v_n = \sqrt[n]{n!}$$

Exercice 4 (5 points).
1. Quand dit-on qu'une fonction admet un developpement limité d'ordre 5 en $x_0 \in \mathbb{R}$? en $+\infty$?
2. Donner le developpement limité de $\cos x$ à l'ordre 5 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$
3. Donner le developpement limité d'ordre 4 de $e^{\cos x}$ au voisinage de 0.
4. Donner la dérivée d'ordre 10 en 0 de la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Université Félix Houphouët-Boigny **2013-2014**
UFR-MI-MIAGE-L1 **1 heure**

Devoir intégration et Equations différentielles

Exercice 1 (10 points). 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{\ln x}dx \qquad J=\int_0^\pi \sin x e^x dx \qquad K=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

2. Calculer l'intégrale

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

en utilisant le changement de variable $x=\sin t$.

3. Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx$$

Exercice 2 (10 points).

1. Déterminer si elles existent, les solutions de l'équation différentielle

$$xy'+y=3x^2$$

dans $\mathbb{R}$.

2. Résoudre les équations du second ordre suivantes

$$y"+y'+y=0 \qquad y"-2y'+y=0 \qquad y"-2y'+y=\sin x+e^x$$

Établissement :
UFR MI

Année
2013-2014

DEVOIR
Fonctions d'une Variable Réelle
et
Intégrales et Equations Différentielles
<u>Niveau</u> : Licence 1
Durée : 2H

Fonctions d'une Variable Réelle

<u>Exercice</u> 1 :
Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ les suites définies par : $a_0 = a$; $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.
Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Déterminer leur limite commune.

<u>Exercice</u> 2 :
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}} - x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{Q}$).

<u>Exercice</u> 3 :

1. Montrer que $\forall t > 0$, $Arctan(t) > \dfrac{t}{1+t^2}$.
2. À l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative de la courbe représentative de la fonction : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ par rapport à ces asymptotes.

Intégrales indéfinies et Equations Différentielles

<u>Exercice</u> 1 :
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(x-5)}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2 + 4}$.

<u>Exercice</u> 2 :

1. Donner la définition et une méthode de résolution d'une équation de Riccati.
2. Résoudre l'équation différentielle : $(1-x^2)y' + (1+x^2)y = \exp(x)$; on cherchera à raccorder les solutions obtenues.
3. Résoudre l'équation : $y'' - 4y' + 4y = \exp(3x)$ (E)

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUËT BOIGNY

Année académique 2012-2013

UFR-MI Devoir de Structures algébriques (1h30mn)

Exercice : 1

Soit E l'ensemble des couples (x,y) où x et y sont dans l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. On munit E de la loi de composition interne $*$ suivante :

$$(\bar{x},\bar{y}) * (\bar{a},\bar{b}) = (\bar{x}+\bar{y}\cdot\bar{a},\bar{y}\cdot\bar{b})$$

l'addition et la multiplication étant celles de l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

1)- Montrer que la loi $*$ est associative.

2)- Ecrire la table de la loi $*$

3) - Déterminer l'élément neutre de la loi $*$

4) - Quels sont les éléments inversibles de E ?

Exercice : 2

On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a+b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

a)- Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau du corps des nombres réels $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

b)- Si $z = a+b\sqrt{2}$, on note $\widehat{z} = a-b\sqrt{2}$. Montrer que

$$\widehat{z\cdot z'} = \widehat{z}\cdot\widehat{z'}$$

c) - Montrer que $z = a+b\sqrt{2}$ est inversible si et seulement si $z\widehat{z} \in \{-1,1\}$.

d) - Donner 6 éléments de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$.

BONNE CHANCE !

Université FHB
UFR- MI
Licence 1
Année académique 2013 – 2014

Devoir de Structures algébriques : 1-heures 30

Exercice 1 : (9 points)

1. Ecrire les tables de l'addition et la multiplication de l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$
2. a)- Dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}[X]$ effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 + \dot{3}X + \dot{2}$ par $\dot{4}X^3 + X + \dot{3}$.

   b)- Dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}[X]$ effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $X^2 + X + \dot{2}$ par $\dot{4}X^3 + X + \dot{2}$.

Exercice 2 (11 points) Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère le groupe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ où $\triangle$ est la différence symétrique.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(A)$?
2. Donner 4 sous-groupes H_1, H_2, H_3, H_2 de $\mathcal{P}(A)$ tels que
$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset H_4$$
3. Sur $\mathcal{P}(A)$ on considère l'addition $+$ et la multiplication $\bullet$ définies comme suit :
$$X + Y = X \triangle Y \text{ et } \quad X \bullet Y = X \cap Y$$
   Montrer que $(\mathcal{P}(A), +, \bullet)$ est anneau unitaire.

Durée: 1 heure 30 mn
NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Devoir Surveillé (I) Gpe 1-2-3-4
(*Structures algébriques*)

Exercice 1 10 pts

1) Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier les réponses!).

i) L'anneau $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ est intègre.

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^2\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$.

2) Prouver qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $84\,a + 180\,b = 12$.

3) Déterminer les entiers m, k tels que

i) $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z} + 34\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

ii) $3\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} \cap k\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z}$.

4) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$.

Exercice 2 10 pts

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e. *Pour tout* $a \in G$, *le symétrique de* a *dans* G *sera noté* a^{-1}.
1) Prouver les implications suivantes.

i)
$$\forall x, y \in G, \quad (x\,.y)^2 = x^2\,.y^2 \quad \Rightarrow \quad \text{la loi . est commutative dans} \quad G$$
ii)
$$\forall x, y \in G, \quad (x\,.y)^{-1} = x^{-1}\,.y^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{La loi . est commutative dans} \quad G$$
2) On suppose à présent que $\forall\, a \in G$, $a^2 = e$. Montrer que la loi . est commutative dans G.

Université Félix Houphouet Boigny d'Abidjan-UFR Maths-Info-Licence 1-2014-2015

Durée : 1 heure 30 mn
NB :la clarté de la rédaction sera notée !

$\boxed{\textbf{Devoir Surveillé (II) Structure algébrique}}$ $Groupe 5-6-7-8-9-10$

Exercice 1 (10 points)

1) Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier les reponses !)
i) $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2\mathbb{Z} \subset n^7\mathbb{Z}$
ii) l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est un nombre premier.
2) Determiner les entiers m, k tels que
i)$4\mathbb{Z} \bigcap 18\mathbb{Z} \bigcap 16\mathbb{Z} \bigcap 42\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$
ii)$3\mathbb{Z} \bigcap 2\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z}$
3) Déterminer les éléments non iversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$

Exercice 2 (10 points)

1) Soit E un ensemble non vide, muni de la loi de composition interne,notée $*$ et H un sous-ensemble de E
a)Quand dit-on que $(E, *)$ est un groupe commutative ?
b)Quand dit-on H est un sous-groupe du groupe $(E, *)$?
2) Soient n et m deux entiers naturels non nuls.Montrer que l'ensemble des communs multiples de m et n dans $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.Est-il un sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?
3) on considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ des nombres réels différents de -3.On définit sur G la loi $\top$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}, x \top y = xy + 3x + 3y + 6$$

Montrer que $(G, \top)$ est un groupe commutatif d'élément neutre -2

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 2012-2013

Devoir de Mécanique 1

Durée : 1 H 30 Min

Exercice 1 : Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations de la trajectoire sont, en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = r_o e^{\frac{-t}{a}} \\ \theta = \frac{t}{a} \end{cases}$$

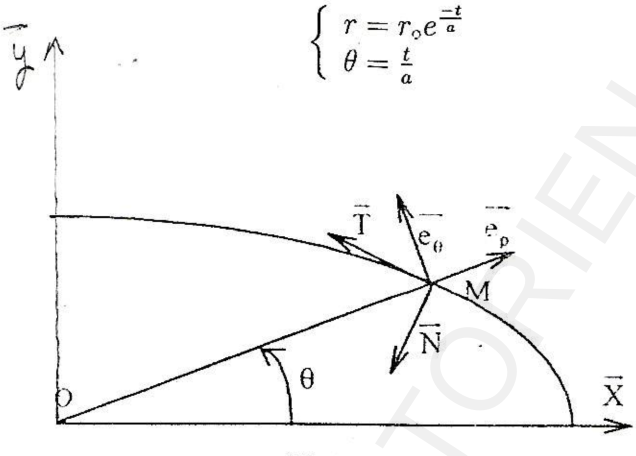


Figure 1

1) Calculer le vecteur vitesse de la particule.
2) Montrer que l'angle $(\vec{V}, \vec{e}_\theta)$ est constant. Que vaut cet angle?
3) Calculer le vecteur accélération de la particule.
4) Montrer que l'angle $(\vec{\gamma}, \vec{N})$ est constant. Que vaut cet angle? (on se servira de la question 2).
5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 2 : Un point M se déplace sur l'ellipse d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, & a > 0 \\ y = b\sin\varphi, & b > 0 \end{cases}$$

selon la loi : $\varphi - e\sin\varphi = mt$, $m > 0$. e désigne l'excentricité de l'ellipse.

a) Montrer que le mouvement de M est à accélération centrale et en déterminer le centre C.

b) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}$ de M en fonction de $\overrightarrow{CM}$.

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 2013-2014

DEVOIR DE MECANIQUE

Parcours : Tronc Commun

Niveau : Licence 1

Durée : 2 Heures

Exercice 1 : Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$ et $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$).

1- Trouver un vecteur unitaire $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2- Déterminer les cosinus directeurs de $\overrightarrow{w}$.

Exercice 2 : Un point P se déplace dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. La distance OP est définie par $OP = r = at$ et l'angle $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OP})$ par $\theta = \Omega t$ avec a et Ω des constantes.

1- Calculer en coordonnées polaires la vitesse et l'accélération du point P (vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$: porté par $\overrightarrow{OP}$; vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}$).

2- Exprimer les vecteurs unitaires $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ de la base intrinsèque en fonction de a, Ω, t, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

3- Déterminer le rayon de courbure.

Exercice 3 : Un point M décrit une courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base $(\overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_\theta)$, est donnée par : $\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + cos\theta)$, où ρ_0 est une constante positive.

1) On suppose qu'à l'instant initial $(t = 0)$, $\theta_0 = 0$.

a- Exprimer en fonction de θ, l'abscisse curviligne s du mobile M (on utilisera ds).

b- Déterminer l'angle polaire lorsque nous avons : $s = \rho_0$.

2) On considère que le point M se déplace avec une vitesse angulaire constante telle que : $\theta = \omega t$ et ω une constante.

a- Exprimer le module de la vitesse du mobile en fonction du temps puis en fonction de ρ.

b- Déterminer les composantes radiale γ_r et orthoradiale γ_θ de l'accélération ; en déduire le module de l'accélération en fonction du temps.

c- Déterminer les composantes (γ_T, γ_N) de l'accélération dans la base intrinsèque $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$.

d- En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

UFR Mathématiques et Informatique
Université Félix Houphouët-Boigny
d'Abidjan-Cocody

Année Académique 2013-2014

DEVOIR DE MECANIQUE DU POINT

Durée 02h00

Exercice 1 (12 points)

Un point matériel M décrit, par rapport à un repère $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, une trajectoire définie par les équations paramétriques :

$x = b\sin\omega t$, $y = b(1-\cos\omega t)$ *et* $z = \omega t$, *où* b *et* ω *sont des constantes positives.*

1) *Déterminer les coordonnées polaires* ρ *et* θ *de H, projeté orthogonal de M dans le plan* (xOy).

2) Déterminer les composantes :
   - *cartésiennes*
   - *cylindriques*
   - *intrinsèques*

   des vecteurs vitesse et accélération du point matériel M par rapport à R.

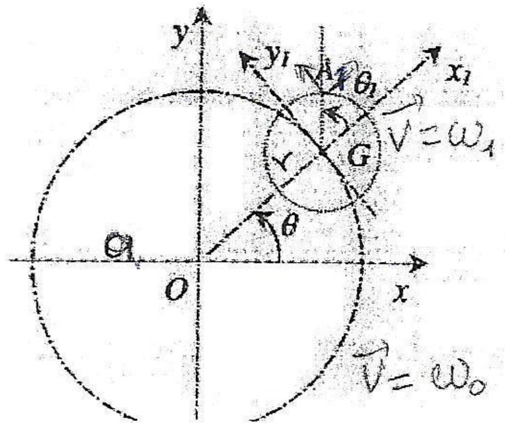
Exercice 2 (8 points)

Un repère mobile $R_1(G,\vec{e}_{x_1},\vec{e}_{y_1})$ *tourne autour de l'axe* $O\vec{z}$ *d'un repère fixe.*
Le point G décrit un cercle de rayon a constant, à la vitesse angulaire ω_0 *constante. Dans* R_1 *le point* A_1 *décrit un cercle de rayon r et de centre G avec une vitesse angulaire constante* ω_1. *Exprimer :*

1) *le vecteur vitesse d'entraînement du point* A_1

2) *son accélération d'entraînement*

3) *son accélération de Coriolis.*



Ecole Supérieure Africaine des
Technologies de l'Information
et de la Communication

DEVOIR
Mécanique du Point
Durée: 02 heures

Exercice 1

Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{x} = \vec{b}$

Exercice 2

Un point M se déplace sur une trajectoire (spirale logarithmique) d'équation polaire

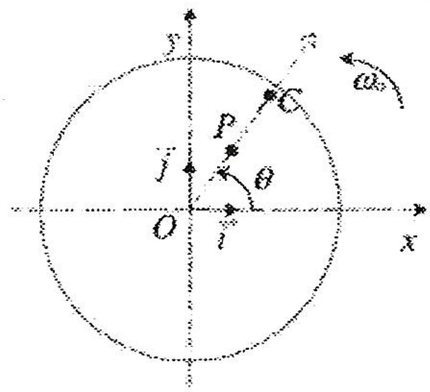
$\rho = \rho_0 e^{\theta}$, $\theta = \omega t$ *avec* ω *constant.*

1) *Dessiner schématiquement une spirale. Représenter les axes de coordonnées polaires et le repère de Frenet en un point M arbitraire de cette trajectoire.*
2) *Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs. Quelle est la valeur de l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur unitaire* $\vec{u}_\rho$.
3) *A partir des expressions de la composante normale du vecteur accélération déterminer le rayon de courbure de la trajectoire.*

Exercice 3

Un manège tourne à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$. *Le point P se déplace du centre vers le point C avec une accélération constante* a_0. *(voir figure). A* $t = 0$ *le point P est en O et part avec une vitesse nulle. OC coïncide avec l'axe Ox.*

a) *Quelle est la nature du mouvement de P dans le repère lié au manège ?*
b) *Déterminer le vecteur vitesse de P dans le repère lié au manège.*
c) *Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de P dans le repère fixe en fonction.*
d) *Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.*



NB: la clarté de la rédaction sera notée

Devoir
(Logique Mathématique)

Exercice 1

1) Maman dit à Koffi: < Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat >.
Koffi range sa chambre, mais Maman ne lui donne pas de chocolat. Pourquoi?

2) En notant P et Q les affirmations suivantes:
P: Jean est fort en Maths.
Q: Jean est fort en Chimie.

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q et des connecteurs usuels.
1) Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
2) Jean est fort en Math ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
3) Jean n'est fort ni en Math ni en Chimie.
4) Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

Exercice 2

P, Q et R étant des propositions données, construire les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes

1) $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$
2) $(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg Q)$
3) $P \vee (\neg(Q \wedge R))$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n =]\frac{1}{n}, n+1[$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Caractériser de façon explicite les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants.

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$$

Exercice 4

On munit l'ensemble $E = \mathbb{N}^*$ de la relation suivante.

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad p \mathcal{R} q \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}^*, \quad p = q^k$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. L'ordre est-il total? (Justifier!)

2) L'ensemble $A = \{2, 4, 8, 16, 64\}$ admet-il un plus petit élément (relativement à la relation $\mathcal{R}$)? Un plus grand élément (relativementà la relation $\mathcal{R}$)?
(Si oui, préciser ces éléments!)

3) L'ensemble $A = \{4, 5, 16, 25\}$ admet-il un plus grand élément (relativement à la relation $\mathcal{R}$)? Justifier la réponse.

4) Déterminer, s'ils existent dans $\mathbb{N}^*$, les éléments suivants:

$$\sup\{8, 32\} \quad \text{et} \quad \inf\{8, 32\}$$

(Relativement à la relation d'ordre $\mathcal{R}$) Justifier les réponses!

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2013-2014
UFRMI L1 G2

Devoir d' Eléments de Logique

Durée: 1heure 30 mn

Exercice 1

1° Soit les quatre assertions suivantes:

a) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$; b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$;

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x+y > 0$; d) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y^2$.

i) Dire pour chacune des assertions a) b) c) et d) si elle est vraie ou fausse (dans le cas où une assertion est fausse donner un contrexemple).

ii) donner leurs négations.

2° a) Soient p, q deux assertions. Ecrire la table de vérité de l'assertion suivante:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \text{ ou } q)$$

b) A quelle assertion plus simple est elle équivalente?

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un référentiel E. Pour toute partie X de E, on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans E. Montrer que:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

b) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$.

Exercice 3

1° Soient f et g des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les assertions suivantes:

a) f est majorée;

b) f ne sannule pas;

c) g est décroissante;

d) f n'est pas inférieure à g.

Exercice 4

Soit A une partie d'un référentiel E.

On considère dans $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathfrak{R}$ définie par:

$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \mathfrak{R} Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.

1° $\mathfrak{R}$ est-elle une relation d'équivalence?

2° Déterminer la classe de $\varnothing$ et la classe de E.

Université F.H.B d'Abidjan. Année 2013-2014, Licence 1 Miagc, Ufr Maths Info.

Devoir surveillé
(*Éléments de logique et raisonnements mathématiques*).

Exercice 1 (6,5 points)

On considère les deux relations $\mathcal{R}$, Δ suivantes:

a) $E = \mathbb{R}$
$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$

b) $F = \mathbb{N}^*$,
$\forall x, y \in F \quad x\Delta y \quad \Leftrightarrow \quad \exists p, q \in \mathbb{N}, \quad y = px^q.$

Pour chacune de ces relations, étudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité.

Exercice 2 (6,5 points)

Soit E un ensemble.
On appelle *différence symétrique* de deux sous-ensembles A et B de E le sous ensemble, noté $A\Delta B$ défini par:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2) Déterminer $A\Delta\emptyset$, $\quad A\Delta E$, $\quad A\Delta A$ où A est une partie de E.

3) Soient A, B, C des parties de E. Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

Exercice 3 (7 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Vérifier si la famille de parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ partitionne l'ensemble $E =]0, 1[$.

b) L'application f est-elle injective? Est elle surjective? Justifier les réponses!

c) Déterminer $f(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) On pose $I = [\frac{1}{2}, 4]$. Déterminer $f^{-1}(I)$.

e) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

UFR Mathématiques et Informatique
Année 2014 – 2015
Niveau L1 : Groupes 1, 2, 3, 4 et 5.

Devoir surveillé d' Eléments de Logique (1 heure)

Exercice 1 : 12-points

1. Donner 2 arguments pour qu'une collection d'objets $\mathcal{A}$ **ne soit pas** un ensemble.

2. Dire si l'affirmation suivante est une assertion.

   Le philosophe Platon a vu dans un rêve l'Afrique de l'ouest.

3. Soient E et F des ensembles non vides. Donner 2 exemples de relations de E vers F qui ne soient pas des applications.

4. Sur l'ensemble$K = \{\triangle, \bigcirc, Y, \square\}$ définir une relation $\mathcal{R}$ telle que :

   - $\mathcal{R}$ soit à la fois réflexive, transitive mais non symétrique.
   - $\mathcal{R}$ soit à la fois non réflexive, transitive et symétrique.
   - $\mathcal{R}$ soit à la fois non réflexive, non transitive mais anti-symétrique.
   - $\mathcal{R}$ soit à la fois non réflexive, anti-symétrique et symétrique.

Exercice 2 : 8-points Soient A un ensemble et $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ deux familles d'ensembles.

1 - Montrer que

$$A \cup \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (A \cup B_k)$$

2 - En déduire que

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \bigcap_{i,k\in\mathbb{N}} (A_i \cup B_k)$$

UFR Mathématiques et Informatique
Année 2014 – 2015
Niveau L1 : Groupes 6, 7, 8, 9 et 10.

Devoir surveillé d' Eléments de Logique (1 heure)

Exercice 1 : 12-points

1. Donner 2 arguments pour qu'une collection d'objets $\mathcal{B}$ ne soit pas un ensemble.

2. Dire si l'affirmation suivante est une assertion.

   Le grand chef zulu CHAKA aurait pu conquérir le Japon.

3. Soient E et F des ensembles non vides. Donner 2 exemples de relations de E vers F qui ne soient pas des applications.

4. Sur l'ensemble$K = \{D, \triangle, \bigcirc, \square\}$ définir une relation $\mathcal{R}$ telle que :

   - $\mathcal{R}$ soit à la fois réflexive, non transitive et symétrique.
   - $\mathcal{R}$ soit à la fois non réflexive, transitive et non symétrique.
   - $\mathcal{R}$ soit à la fois non réflexive, non transitive et anti-symétrique.
   - $\mathcal{R}$ soit à la relation d'équivalence et d'ordre.

Exercice : 2 Soient A un ensemble et $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ deux familles d'ensembles.

1 - Montrer que

$$A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$$

2 - En déduire que

$$(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \bigcup_{i,k\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_k)$$

Licence 1
Semestre 1
Année : 2013 - 2014

Archivtecture des ordinateurs
Devoir, durée : 1 h

Exercice 1 : Système de numération

1. En base douze, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecrire la suite des cinq successeurs de BA9
2. Soit A= 5012 en base 7. Ecrire A en base 2
3. A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Que vaut a?
4. Effectuer les opérations arithmétiques suivantes directement en hexadécimal, puis vérifier le résultat en binaire : $B7AD_{16} + 51E0_{16}$; $8BA2_{16} + 6A7_{16}$; $8BA2_{16} + 6A7_{16}$;
5. Convertir en binaire 127.75_{10} puis 307.18_{10}

Problème : systèmes de numération

On $A = 47_{10}$ et $b = 36_{10}$

1.1. Effectuez B-A en complément vrai

1.2. Convertir A et B en base 6 puis effectuer A+B, A*B, A/B (à 2 chiffres près), B-A en complément restreint.

1.3. Convertir A et B en DCB puis effectuer A+B

1.4. Coder si possible A en binaire sur 4 bits. Justifier votre réponse

1.5. Effectuer en binaire A+B, A*B puis B/A (à 2 chiffres près). Dans le système binaire, on suppose que les codes ont pour longueur 8

Université F.H.B.
UFR MI

Année : 2013-2014

Devoir de Calcul Matriciel
L1
Groupe 3
1heure 00

Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_4 \ (\mathbb{R})$:

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

1) Donner la transposée $({}^tM)$, de la matrice M.
2) Calculer $M.({}^tM)$ et $({}^tM).M$, ces deux matrices commutent-elles ?
3) Déterminer le déterminant de M.
4) A quelle condition M est-elle inversible ? Donner sa matrice inverse.

Courage, ça peut aller maintenant !

Université FHB année universitaire 2014-2015
UFR MI

Devoir de Calcul Matriciel

L1 Groupe 6

Durée : $1h30'$

Exercice 1

On considère les matrices :
$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$
En deduire que A est inversible et exprimer la matrice A^{-1} en fonction de A et I_3.
2.Montrer que,n étant un entier naturel positif,A^n peut être écrite sous la forme :

$$A^n = u_n A + v_n I_3.$$

Exprimer $\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1}$ et $\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de α_n et β_n ;
Calculer α_n et β_n en fonction de n. (Il faudra se souvenir de la convention qui affirme que toute matrice carrée A donne $A^0 = I_{ordre\ de\ A}$).

Exercice 2

On considère le système d'équations :
$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} -x - 3y = a \\ x - y = b \\ x + 3y + 2z = c \end{cases}$

1-Montrer que résoudre (S) équivaut à résoudre une équation de la forme : $MX = B$ où M, X et B sont à déterminer.
2- a.Calculer M^2 et M^3
b.Exprimer M^3 en fonction de I_3.
3-a. Montrer que $MX = B \Longleftrightarrow X = \frac{1}{8}M^2 B$.
b.En déduire la résolution de (S).
c.Donner les solutions de (S) lorsque :$a = 3, b = -5$ et $c = 4$

Université FHB année universitaire 2014-2015

UFR MI

Devoir de Calcul Matriciel

L1 Groupe 9

Durée : $1h30'$

Exercice 1

Soit A un élement de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 réelles tel que $A^3 = 0$. Pour tout réel t,on pose

$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$ où I_3 désigne la matrice d'ordre 3.

1.Montrer que :$\forall(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, E(t_1)E(t_2) = E(t_1 + t_2)$.

En déduire que pour tous réel $t, E(t)$ est inversible et préciser son inverse (en fonction de t et A)

2.Pour tout réel t, et pour tout entier naturel n non nul,calculer $(E(t))^n$ en fonction de t, n et A

3.Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Justifier que B est inversible et calculer son inverse et B^n où n est un entier non nul.

4.Calculer l'inverse de B avec la méthode de la comatrice

Exercice 2

Résoudre le système suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$,paramètre

$$(S_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 2 \\ mx + y + z = 3 \end{cases}$$

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info

Année 2012-2013

Devoir d'Algèbre 2

Durée : 2 H 00 Min

Partie 1

Exercice 1 :
Résoudre dans R par la méthode du rang le système (S_1) :

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y-z+t=2 \\ x+y+z-t=3 \end{cases}$$

et par la méthode de Gauss, le système (S_2)

$$\begin{cases} -x+y-5z=-7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \\ 3x+4y-2z=11 \end{cases}$$

Partie 2

Questions de cours :
1. Quand dit-on d'une application f entre deux espaces vectoriels E et F qu'elle est linéaire?
2. Définir l'image d'une application linéaire f.
3. Démontrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est surjective si et seulement si $Im(f)=F$.
4. Définir le noyau d'une application linéaire f.
5. Démontrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est injective si et seulement si $Ker(f)=0$.

Exercice 1 : On considère l'espace vectoriel $R_2[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. Soit f l'application de $R_2[X]$ dans R qui à P associe $P(1)$.
1. rer que f est une application linéaire.
On $F=Ker(f)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $R_2[X]$.
2. rer que $(X-1, X^2-1)$ est une base de F.
3. G le sous-espace vectoriel de $R_2[X]$, engendré par le polynôme (X^2+1). Montrer que G est un -espace vectoriel de dimension 1 de $R_2[X]$.
4. On note $B=(X-1, X^2-1, X^2+1)$. Montrer que B est une base de $R_2[X]$.
5. Ecrire la matrice de l'application f dans la base B (au départ) et (1) (à l'arrivée).
6. Déterminer les coordonnées dans la base B des polynômes $1, X$ et X^2.

Exercice 2 : Dans R^R, on considère la famille V suivante :
$V=(x\longmapsto sin(x), x\longmapsto cos(x), x\longmapsto sin(2x), x\longmapsto cos(2x))$.
On note E l'espace vectoriel engendré par V, et D l'application qui à f associe sa dérivée f'.
1. Montrer que V est une famille libre.
2. Montrer que D est un endomorphisme de E.
3. Montrer que D est un automorphisme de E.

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 2013-2014

DEVOIR D'ALGEBRE 2

Calcul Matriciel — Espaces Vectoriels

Mention : Tonc Commun

Niveau : Licence 1

Durée : 1 H 30

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le systme d'équations linéaires suivant :

$$(S_a) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2\cancel{x}y + 3z = 1 \\ 2x + ay + 6z = a \\ -x - ay + 5z = 0 \end{cases}$$

1) Ecrire la matrice augmentée M_a de ce système.
2) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système :
(i) admet une infinité de solutions;
(ii) admet une solution unique;
(iii)n'admet pas de solution.

Exercice 2 : On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.
Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels et préciser alors leur dimension.
$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}$; $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2x_3 = 0\}$; $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2^2\}$.

Exercice 3 : Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\boldsymbol{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\boldsymbol{E}$.
On considère f l'application linéaire de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{E}$ telle que :
$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3,\ \ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3,\ \ f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$
1) Quelle est la matrice A de f dans la base $\boldsymbol{B}$? Si $u \in \boldsymbol{E}$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\boldsymbol{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\boldsymbol{B}$?
2) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$.
3) Déterminer le noyau et l'image de f.
4) Ces sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$ sont-ils supplémentaires?
5) Quelle est la matrice de f^2 dans la base $\boldsymbol{B}$? En déduire $f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)$.

DEVOIR D'ALGEBRE LINEAIRE N°1

ESPACES VECTORIELS & APPLICATIONS LINEAIRES

Licence I (02-11-2015)

Durée : 1H30

EXERCICE 1

Parmi les applications suivantes dire celles qui sont des applications linéaires ; si oui déterminer $kerf$ et Imf et dire si elles sont injective, surjectives ou bijectives.

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y) \longmapsto (xy, x + y)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y) \longmapsto (x + 1, x + y)$
c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y) \longmapsto (x + ay, x - 2y)$
d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (x, y) \longmapsto (2x + y, x, 0)$
e) $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ P \longmapsto (P(-1), P(0), P(1))$
f) $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ P \longmapsto P - (X - 2)P'$

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que $B_0 = (1, X, X^2), \ B_1 = (1, 1 + X, 1 + X^2), \ B_2 = (1, 1 - X, X - X^2)$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice de passage $P_{B_0B_1}$ de B_0à B_1, puis la matrice de passage $P_{B_1B_2}$ de B_1 à B_2.
2. Vérifier que $P_{B_0B_2} = P_{B_0B_1}P_{B_1B_2}$.
3. Décomposer le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2$ dans les bases B_1 et B_2.

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire : 2014 -2015.

LICENCE 1 – Mention : Mathématiques
UE : Algèbre linéaire - ECUE : Espaces vectoriels
Devoir du 29 octobre 2015 - Durée : 2H00.

Exercice 1. *Considerer les vecteurs de* $\mathbb{R}^4$:

$$f_1 = (1, 1, -1, 2)\ ;\ f_2 = (0, 1, 2, 3)\ ;\ f_3 = (1, 0, 1, 0).$$

1. *Montrer que les vecteurs* f_i, $1 \leq i \leq 3$ *sont linéairement indépendants.*
2. *Soit* F *le sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par* f_1, f_2, f_3.
   (i) *Donner une base et la dimension de* F.
   (ii *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels* x, y, z *et* t *pour que le vecteur* $u = (x, y, z, t)$ *appartienne à* F.

Exercice 2. *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *et soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

1. *Donner la matrice* A *de* f *dans la base* $\mathcal{B}$.
2. *Considerons les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (2, 1, 5)$. *Montrer que* $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Trouver la matrice* $\mathcal{D}$ *de* f *dans la base* $\mathcal{V}$.

UFR MI Année 2013-2014

Devoir d'Analyse réelle

Durée : 1H30

Exercice 1 :

$a)$ Montrer que si $k > 0$, on a $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ et si $k > 1$, on a $\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$

$b)$ En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ est convergente et que sa limite l vérifie $-2 \leq l \leq -1$.

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes

$$a)\ I = \int_1^e \frac{dt}{t+t(lnt)^2}$$

$$b)\ J = \int_0^{\pi/2} \frac{cost}{cost+sint}\,dt$$

Exercice 3 :

1) Résoudre l'équation différentielle

(E): $x' - x + x^2 = 4t^2 + 2t + 2$, on cherchera la solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1.

2) Résoudre l'équation différentielle

(E_2) $(t^2+1)y'' + (t^2-2t+1)y' - 2ty = 0$, en introduisant la fonction : $x = y' + y$

UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY de COCODY-ABIDJAN
U.F.R. Maths-Info. - 2013 – 2014

Devoir surveillé d'algorithmique et Programmation
(1ième année , Durée : 1 h 30mn)
Les 3 exercices sont indépendants. Rédiger avec soin.

Exercice 1 (Tableaux).
1. *Ecrivez un algorithme permettant à l'utilisateur de saisir un nombre quelconque de valeurs, qui devront être stockées dans un tableau. L'utilisateur doit donc commencer par entrer le nombre de valeurs qu'il compte saisir. Il effectuera ensuite cette saisie. Enfin, une fois la saisie terminée, le programme affichera le nombre de valeurs négatives et le nombre de valeurs positives.*
2. *Ecrivez un algorithme permettant, toujours sur le même principe, à l'utilisateur de saisir un nombre déterminé de valeurs. Le programme, une fois la saisie terminée, renvoie la plus grande valeur en précisant quelle position elle occupe dans le tableau. On prendra soin d'effectuer la saisie dans un premier temps, et la recherche de la plus grande valeur du tableau dans un second temps.*

Exercice 2 (Boucle).
1. *Écrire un algorithme demandant à l'utilisateur de saisir un nombre entier positif. La saisie sera répétée jusqu'à ce que le nombre soit positif. Même question pour un nombre entier positif et multiple de 3. Donner le programme pascal de votre algorithme.*
2. *Écrire un algorithme qui, pour tout entier compris entre 1 et 10, affiche sur une mëme ligne, les valeurs de cet entier, de son carré et de son cube. Traduire en programme Pascal.*

Exercice 3 (Résolution d'équation de dégré 2). *Donner l'algorithme et le programme Pascal qui résout les équations de la forme*

$$aX^2 + bX + c = 0.$$

N.B. : Les paramètres d'entrés sont : a, b and c. Paramètres de sorties sont les solutions possibles.

Bonne chance

ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

DEVOIR D'ELECTROSTATIQUE

Année Scolaire : 2013-2014
Niveau : SRIT1
Durée : 2 heures

Exercice 1

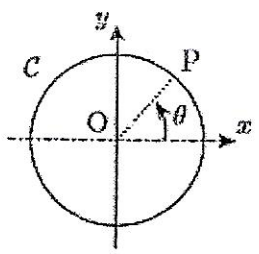
Deux charges fixes A(+q) et B(-q) sont distantes d'une longueur **d (d=2a)**. Les points A et B ont respectivement pour abscisses a et −a. Trouver $\dot{E}$ le long de AB.

Exercice 2

Un disque de centre O, de rayon R et de densité surfacique de charge σ uniforme, présente une épaisseur négligeable. Son axe oz, vertical et ascendant, contient une particule M de charge q, à la côte $M = z > 0$. On supposera que la présence de M ne modifie pas le champ électrique $\vec{E}$ produit par le disque. Calculer le potentiel électrostatique créé par le disque en M. En déduire l'énergie potentielle de la particule M.

Exercice 3

Un cercle de centre O et de rayon R porte des charges dont la densité linéique λ varie en fonction de la position $P(\theta)$ du point sur le cercle, suivant la loi $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos(\theta)$, avec λ_0 une constante.



a) Quelle est la direction du champ $\vec{E}$ en O ? Justifier.

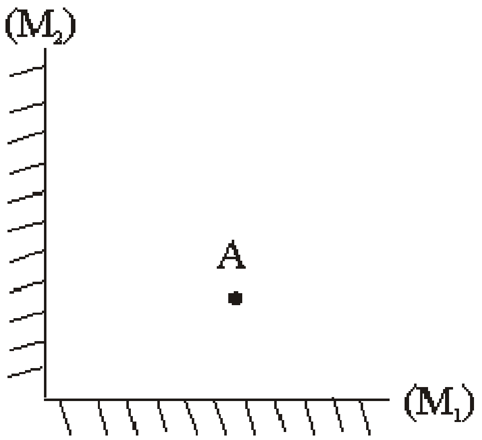
b) En utilisant les coordonnées polaires, déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ en fonction de λ_0 et R.

Exercice 4

Soit un fil de longueur infinie portant une densité linéique de charge uniforme λ $(\lambda > 0)$. Calculer à l'aide du théorème de Gauss le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par ce fil en un point quelconque M.

Miroirs et dioptres plans

Exercice 1 :Miroir plan



Deux miroirs M_1 et M_2 sont disposés perpendiculairement l'un à l'autre, et un objet ponctuel A est situé de façon à être vu simultanément dans ces 2 miroirs.

Construire l'image A_1 de A dans le miroir M_1 et tracer un faisceau de rayons issu de A puis réfléchis par M_1. A_1 peut il jouer le rôle d'objet par rapport au miroir M_2 ? Si oui, construire son image A_{12} dans M_2 et les rayons correspondants. Le processus peut-il se poursuivre par une nouvelle réflexion sur M_1 ?

1. De la même manière, construire l'image A_2 de A dans M_2 puis l'image A_{21} de A_2 dans M_1. Finalement, combien d'images de A l'observateur peut il voir ?

Exercice 2 : Dioptre plan

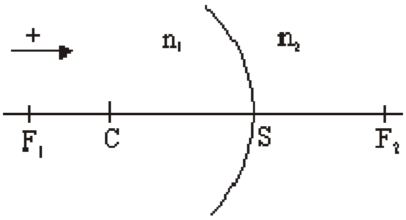
Un pêcheur aperçoit un poisson situé à 1 m sous la surface de l'eau, sur la même verticale. En considérant que ces yeux sont à 1,40 m au dessus de l'eau :

1. A quelle distance le pêcheur voit il le poisson ?
2. A quelle distance de l'œil du poisson se trouve l'image du pêcheur ?
3. A quelle profondeur doit se trouver le poisson pour que l'image vue par le pêcheur soit décalée de 15 cm par rapport à sa position réelle ?

On donne l'indice de l'eau n=1,33.

Miroirs et dioptres sphériques

Vérifications des connaissances :



Soit un dioptre sphérique convergent, de sommet S, de centre C, de foyers F et F' séparant 2 milieux d'indices n et n'.

Rappeler la définition de la vergence.

A quelle condition sur n et n' le dioptre est il effectivement convergent sur la figure.

Quel est le foyer image ?

Un petit objet réel AB est situé entre -∞ et le foyer objet F. Rappeler les formules de conjugaison avec origine au sommet et au centre.

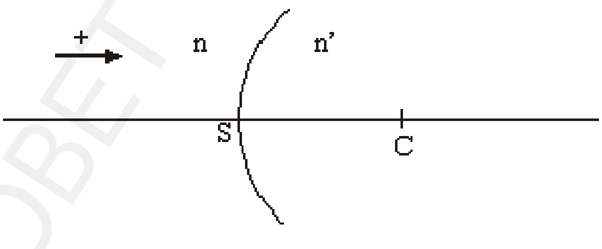
Construire l'image A'B' et retrouver les formules de grandissement (origines au sommet, au centre et aux foyers). En déduire la formule de Newton.

Ce petit objet AB, perpendiculaire à l'axe principal, se déplace de -∞ à +∞. Construire les images correspondantes. (L'espace objet peut être décomposé en 3 zones. En déduire les zones correspondantes de l'espace image). Indiquer, dans chaque cas, la nature de l'image.

L'étudiant pourra reprendre cette étude dans Ic cas d'un dioptre divergent en changeant l'inégalité entre n_1 et n_2.

Exercice 2 : Dioptre sphérique

Un dioptre sphérique de centre C, de sommet S, de rayon decourbure égal à 10cm sépare l'air d'indice n=1 (espace objet) et un milieud'indice n'= 4/3 (espace image). Sa face convexe est tournée du côté del'air.



1. Trouver la position des foyers F et F’ de ce dioptre.
2. Trouver la position d’un objet réel AB perpendiculaire à SC et de son image A’B’ pour le grandissement linéaire $\gamma=+2$.
3. Tracer la marche d’un faisceau de rayons issus du point B de l’objet.

Exercice 3 :

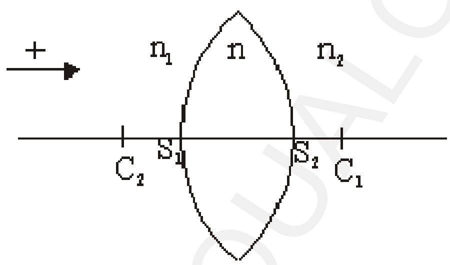
On dispose d’un miroir concave de rayon R=1m.

1. Quelle est sa distance focale ?
2. Ce miroir est placé à la distance D=5m d’un écran. Où doit-on mettre un objet pour avoir une image nette sur l’écran ?
3. Quel est le grandissement ?
4. On vérifiera ces calculs en effectuant la construction.

Exercice 4 : Rétroviseur

Déterminer les caractéristiques d’un miroir sphérique qui donne d’un objet réel, placé à 10 m du sommet, une image droite et réduite dans le rapport 10. Faire la construction géométrique correspondante.

Exercice 5 : Association de Dioptres Sphériques



On considère une lentille **mince** biconvexe dont les rayons de courbure des faces et , l’indice du verre est n=3/2. La face d’entrée est baignée par l’air d’indice n_1=1, la seconde face par l’eau d’indice n_2=4/3.

Dans les calculs, les sommets S_1 et S_2 seront considérés comme confondus en S et on se placera dans le cas de l’approximation de Gauss.

1. Soit AB un objet de faible dimension perpendiculaire à l’axe principal placé dans l’air et A’B’ son image.

   a) Etablir la formule de conjugaison donnant la position de l’image A’B’ et déterminer le grandissement.

   b) Montrer que ce système est équivalent à un dioptre sphérique de sommet S et de centre C dont on déterminera le rayon algébrique $\overline{SC}$.

c) Déterminer les distances focales $\overline{S\Phi'}$ et $\overline{S\Phi}$ du système. Que vaut le rapport $\overline{S\Phi'}/\overline{S\Phi}$?

2. Calculer la position et le grandissement de l'image A'B' d'un objet AB situé à l'abscisse $\overline{SA} = -\frac{R}{2}$.

3. Construire graphiquement l'image A'B'.

4. Que devient la formule de conjugaison dans le cas d'une lentille **mince** dont les faces sont baignées par le même milieu ($n_1=n_2$) ?

Lentilles

Construction d'images :

Soit une lentille mince **convergente**, de centre optique O, de foyers F et F'.

1. Rappeler les formules de conjugaison et de grandissement avec origine au centre optique.

2. Construire l'image A'B' d'un objet AB perpendiculaire à l'axe principal situé entre -∞ et le foyer objet F.

3. Retrouver les formules de grandissement avec origines aux foyers.

4. En déduire la formule de Newton.

Le petit objet AB se déplace de -∞ à +∞.

5. L'espace objet peut être décomposé en 3 zones, construire les images correspondants à un objet placé successivement dans chacune de ces zones. En déduire les zones correspondantes de l'espace image.

6. Indiquer dans chaque cas la nature de l'image.

L'étudiant pourra reprendre cette étude dans le cas d'une lentille divergente.

ESATIC

ACADEMIC YEAR 2012-2013

LICENCE I ESATIC- ABIDJAN

ENGLISH COMMON EVALUATION 2HOURS

EXERCISE I (20pts)

WRITE THE FOLLOWING NUMBERS AND OPERATIONS IN FULL LETTERS. NUMBER 1 IS AN EXAMPLE:

1. 197.. One hundred and ninety seven
2. 1,475 + 271 = 1,746
3. 4,653,980
4. 479.042
5. 908 – 72 = 836
6. 3,649 x 83 = 302,867
7. 45.075 : 5 = 9.015
8. 32,452,004,123
9. 9,703.9630
10. 576,543,098,004
11. 143 x 873 = 124,839

EXERCISE II (40pts)

PUT THE VERBS IN BRACKETS INTO THE RIGHT TENSE

a)

1- Look! The black man (come)--------------- .
2- Yesterday I (tell)----------------- you the truth.
3- When they (arrive)--------------- she (already/go)---------------- .
4- We (live)------------------- here for ten years.
5- (See)---------------you----------- her last night?
6- They (not/agree)---------------------- with their parents.
7- Tonight we (go)----------------- to watch that famous film.
8- He (pass)--------------- his entrance exam because he (study)------------- a lot.
9- Christians (believe)---------------------- in God and Jesus.
10- This morning, he (wake)---------------------- up at 6 am, (wash)--------------------- himself and (leave)------------------------ his house at 7 am.

b)

Choose the most likely tense to complete the following statements correctly

1) The plane ___________ at New York three hours late.

a) has arrived b) was arriving. c) did arrive d) arrived.

2) I can't go home until I............this job.

a) have finished b) was finishing c) had finished d) finished

3) I ……………….. in London since I was a little child.

a) lived   b) was living   c) have lived   d) did live

4) As soon as I saw the man, I realized that we……………..before, in Caracas.

a) met   b) were meeting   c) have met   d) had met

5) After leaving London, we ……………on to Birmingham without stopping.

a) drove   b) were driving   c) have driven   d) had driven

6) She ran away with her lover, while her husband ……………. in Australia.

a) worked   b) was working   c) has worked   d) had worked

7) Where can he be? I can only imagine that he…………….. an accident somewhere.

a) had   b) was having   c) has had   d) did have

8) He had worked in the company for 15 years before he…………..promoted

a) got   b) was getting   c) has got   d) had got

9) I …………… the office after everyone else.

a) left   b) was leaving   c) have left   d) had left

10) Hi, I'm really pleased to see you again, but I'm afraid I …………… your name

a) forgot   b) was forgetting   c) have forgotten   d) had forgotten

EXERCISE III (30pts)

Translate the following statements into English.

1- Elle a acheté cinq oignons et deux tomates.
2- Le soleil se lève à l'Est et se couche à l'Ouest.
3- La Chine a trois milliards cinq cents millions d'habitants.
4- Nous prenons trois repas équilibrés par jour.
5- Lorsque nous regardions le match hier soir, nous avions déjà fini les travaux ménagers.
6- Autrefois je jouais bien au football (used to/ to be used to)
7- Tu n'a pas a t'inkieter, il a l'habitude des voitures de sports. (used to / to be used to)
8- Il y'avait un petit restaurant ici dans le temps (used to / to be used to)

Translate the following statements into French

9- The wind had been blowing two days before
10- She had been living alone since she had lost her husband

EXERCISE IV (10pts)

What is the importance of English today?

In a paragraph of 10 lines maximum, answer this question.

GOOD LUCK

Université F.H.B (Cocody) 2012-2013
L1 1 h 30

Examen de suites et fonctions dérivables

La fonction $x \mapsto \text{th}(x)$ est la fonction tangente hyperbolique.

Exercice 1 (3,5 points). 1. Quand dit-on que deux suites sont adjacentes ? Donner un exemple de suites adjacentes.

2. Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

admet aussi pour limite ℓ.

3. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\sin\frac{1}{k}$$

Exercice 2 (3 points). 1. Enoncer clairement le théorème des accroissement finis.

2. A l'aide de ce théorème, montrer que pour tout réel $x > 0$, $\text{Arctan}\, x > \frac{x}{1+x^2}$, où Arctan est la fonction réciproque de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 (3,5 points). 1. (a) Rappeler la formule de Taylor-Lagrange pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^6([-1,1])$;

(b) Soit n un entier naturel. Quand dit-on qu'une fonction f définie sur $]-1,1[$ admet un développement limité d'ordre n en 0 ?

2. Montrer que la fonction $f(x) = \text{th}(\frac{1}{x^2})$ est prolongeable par continuité en 0, et que son prolongement admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est 1, quel que soit $n > 0$.

3. Calculer la limite lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3-\sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

Université F.H.B (Cocody) 2012-2013
L1 & MIAGE 2h00

Examen de suites et fonctions dérivables (*2ième session*)

Exercice 1 (6 points). Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

1. Toute fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ est-elle dérivable sur $]a, b[$? Sinon, donnez un contre-exemple.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
   (a) Que peut-on dire de l'image $f([a, b])$ de l'intervalle $[a, b]$?
   (b) Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $a \leq u_n \leq b$ pour tout entier naturel n. Peut-on trouver une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? Justifier.
4. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

(on pourra se limiter au cas $\ell \in \mathbb{R}$).

Indications 1. On pourra utiliser la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exercice 2 (7 points). Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction dérivée f' est dérivable en 0.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe existe un polynôme Q_{3n} de dégré égal à $3n$ tel que la dérivée d'ordre n de f soit donnée par

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} Q_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

4. En déduire le développement de Taylor-Lagrange de la fonction f en 0 à l'ordre n.

Indications 2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 (7 points). Soit g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$g(x) = (\cos x)^{\frac{x}{\tan x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1$$

1. Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction réelle g. La fonction g est-elle continue en 0 ? Donner une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
2. Déduire de la question précédente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\frac{x}{\tan x}}}{x^2}$$

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET - BOIGNY
UFR MATHS - INFO
COMPOSITION : CALCUL INTEGRAL

ANNEE UNIVERSITAIRE 2012-2013
DUREE : 1h15min

(REDIGER AVEC RIGUEUR ET GRAND SOIN)

EXERCICE 1

1) Calculer les intégrales suivantes: $I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$, $J = \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

2) A quelle condition l'intégrale $K = \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ est-elle une fraction rationnelle?
Exprimer alors K à l'aide des fonctions usuelles.

EXERCICE 2

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = (x^2+1)\exp(x)$

2) Déterminer l'unique fonction f de classe C^1, solution de l'équation différentielle
$|x|y' + (x-1)y = x^2$

UNIVERSITE F.H.B ANNEE UNIVERSITAIRE 2012 - 2013

NIVEAU : L1
COMPOSITION: CALCUL INTEGRAL (SESSION 2)
DUREE: 1 H15

EXERCICE 1:

1) Résoudre l'équation différentielle (E): $y'' - 5y' + 6y = (x^2 - 1)\exp(2x)$
2) Déterminer l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0, f'(0) = 1$
3) Donner un développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0.
4) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. Etudier leurs positions relatives.

EXERCICE 2

1) **Choisir** les réels a, b et c pour que $L = \int \frac{at^2+bt+c}{t^3(t-1)^2}dt$ soit une fonction rationnelle.
Indication: faire une décomposition en éléments simples de l'intégrant.
2) Calculer $M = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

UNIVERSITE FHB
Année académique 2012 − 2013
UFR-MI

EXAMEN de Structures algébriques première session (2 heures 30)

Exercice : 1 . Soit E un ensemble non vide.

Définir 2 lois de composition internes sur E.

Exercice 2 .
On considère le groupe additif $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $H = \mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$.

a) Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$

b) Ecrire la relation de Lagrange définie par H.

c) Déterminer les classes d'équivalence de $(2013, 69743)$ et de $(2013, -69743)$

d) Déterminer l'ensemble quotient $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{H}$.

e) Ecrire la table du groupe quotient $(\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{H}, +)$

Exercice 3 . Soit

$$T = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

– (a) Montrer que T est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$
– (b) Montrer que T est stable pour le produit matriciel.
– (c) T est-il un sous-anneau commutatif et intègre ?
– (d) Quand dira-t-on qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est inversible ?
– (e) Montrer que pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, la condition :

$$a^2 \neq b^2 \quad \text{est suffisante pour que} \quad M \quad \text{soit inversible}$$

– (f) Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{I} = \{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$$

est un idéal de T.

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

première session

ANNEE ACADEMIQUE 2012-2013

UFR mathématiques et Informatique *Semestre 1*

EPREUVE DE MECANIQUE DU POINT
Durée: 03 heures

Exercice 1 (Outil Mathématique)

Etant donnés trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *et un nombre réel non nul* α .

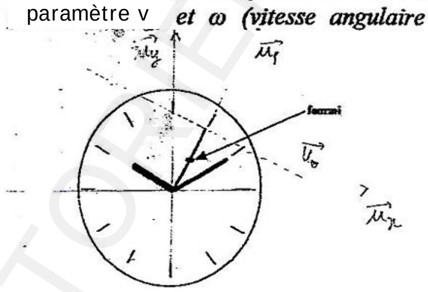
1) *Résoudre l'équation* $\alpha\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$
2) *Soient trois points de l'espace tels que* $A(-1,1,0)$, $B(2,1,1)$ *et* $C(3,-1,1)$.
   Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ *défini par les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *et calculer la distance du point* $K(1,2,1)$ *au plan* $\mathcal{P}$.

Exercice 2 (Cinématique)

Une fourmi est située au centre de la trotteuse (aiguilles des secondes) d'une horloge. À $10\ h\ 10\ mn\ 5\ s$, *la fourmi se dirige vers l'extrémité de cette aiguille en se déplaçant à vitesse constante* $v = 3\ cm.s^{-1}$.
La trotteuse de l'horloge (aiguille des secondes) ayant une longueur de $50\ cm$:

1) *Calculer la distance parcourue par la fourmi lorsqu'il est* $10\ h\ 11\ mn\ 45\ s$ *sachant que la fourmi se déplace sans arrêt sur la trotteuse.*

2) *Exprimer les vecteurs; vitesse* $\vec{V}(M)$ *et accélération* $\vec{a}(M)$ *de la fourmi dans la base mobile* $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ *liée à M en fonction des* paramètre v *et* ω *(vitesse angulaire de l'aiguille).*



3) *Calculer les composantes de* $\vec{V}(M)$ *pour t =15 s, et 60 s dans la base fixe* $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

4) *Sachant que les vecteurs vitesses sont toujours tangents à la trajectoire, tracer la trajectoire de la fourmi pour un observateur situé à la base de l'horloge.*

Exercice 3 (Dynamique)

Sur un cylindre fixe, de centre O et de rayon R, une bille M, assimilable à une masse ponctuelle m, est lâchée, sans vitesse initiale, du point A, situé sur la verticale ascendante Oz du référentiel galiléen $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. *Le mouvement de M s'effectue, sans frottement, dans le plan perpendiculaire à l'axe Oy de révolution du cylindre.*
On repère la position de M par l'angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$.

1) *Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur M. Quel est le repère d'étude le plus adapté ? Quelle est la base de projection la plus judicieuse ?*

2) *Appliquer le théorème du moment cinétique en O, et en déduire une intégrale première du mouvement.*

3) *Déduire du principe fondamental de la dynamique l'expression de la réaction exercée par le cylindre sur la bille, en fonction de* θ *et* $\dot{\theta}$ *(dérivée de* θ *par rapport au temps t),puis uniquement en fonction de* θ.

4) *Pour quelle valeur de* θ *la bille quitte-t-elle son support ?*

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Maths-Info

Année 2012-2013

Examen de Mécanique 1
Deuxième Session

Niveau : Licence 1

Durée : 3 Heures

Exercice 1: On considère le vecteur $\overrightarrow{a}$ de coordonnées $(2, 1, -2)$ dans la base de $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et le point B de coordonnées $(1, 2, 3)$.
1) Trouver les cosinus directeurs de $\overrightarrow{a}$.
2) Donner l'équation du plan passant par B et perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$. Déterminer la distance de O à ce plan.

Exercice 2: Soit un repère cartésien $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère un point M repéré par ses coordonnées : cartésiennes (x, y, z), cylindriques (ρ, φ, z), sphériques (r, θ, φ).
1) Etablir les relations entre les coordonnées :
   a) cartésiennes et cylindriques de M
   b) cartésiennes et sphériques de M.
2) Exprimer la longueur dS du vecteur déplacement élémentaire du point M en fonction des coordonnées :
   a) cartésiennes,
   b) cylindriques.

Exercice 3 : Une particule M de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) décrit une hélice telle que : $\rho = R$, $\theta = \omega t$, $z = at$; a, ω et R constants.
1) Exprimer le pas h de l'hélice (h est la variation de z quand M fait un tour).
2) Exprimer la vitesse et l'accélération de M en coordonnées cylindriques et déterminer la distance parcourue par M pendant le temps t.
3) Déterminer le trièdre de Frénet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ et exprimer la vitesse et l'accélération de M sur cette base.
4) Déterminer le rayon de courbure R_C et le rayon de torsion T_C.

Exercice 4: On considère les repères orthonormés directs $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et $\mathcal{R}'(O; \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}, \overrightarrow{z})$. Le plan $(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est fixe et la droite $(O; \overrightarrow{x'})$ tourne autour de $(O; \overrightarrow{z})$ avec une vitesse angulaire ω, $\omega = \dot{\theta}$ et $\theta = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'})$. Un mobile $M(\| \overrightarrow{OM} \| = r)$ se déplace sur la droite $(O; \overrightarrow{x'})$ suivant la loi : $r = r_0(\cos\omega t + \sin\omega t)(r_0 = cte)$.
Déterminer à l'instant t, en fonction de r_0 et ω, en composantes de $\mathcal{R}'$:
1) a) La vitesse relatve et la vitesse d'entraînement de M;
b) Le module de la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ de M et sa direction(on déterminera $\tan\varphi$, $\varphi = (\overrightarrow{V_a}, \overrightarrow{x'})$). Cas particulier où M passe en M_0, défini par $\| \overrightarrow{OM_0} \| = r_0$;
2) a) L'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis de M.
b) Le module et la direction de l'accélération absolue de M.
3) A l'instant initial, le mobile est 14.1 cm de O. Aux instants t où le mobile possède une vitesse absolue de 10 m/s, dirigée à 60° de l'axe $(O; \overrightarrow{x'})$, déterminer :
- l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$, en grandeur et en direction;
- les instants t correspondants.

UNIVERSITE FHB
Année académique 2012 – 2013
UFR-MI

Eléments de Logique : EXAMEN première session (2-heures)

Exercice 1 : .

A)- Montrer par **Disjonction de cas** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}$$

B)- Montrer par **l'absurde** que l'ensemble

$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ **n'est pas cartésien.**

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$. On considere l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$f(\emptyset) = 0 \quad et \quad f(A) = \sum_{x \in A} x$$

a)- Calculer $f(\{0\})$, $f(\{1\})$, $f(\{0,1,2\})$, $f(\{4,11,21\})$, et $f(A_n)$ où $A_n = \{0,1,2,\cdot\cdot,n\}$
b)- Montrer que f est surjective.
c)- f est elle injective ?
d)- Déterminer $f^{-1}(\{4\})$, puis son cardinal.

Exercice 3 :

Soient P,Q et R trois propriétés vraies respectivement dans A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Ecrire *vrai* ou *faux* pour les propositions suivantes :

1. La propriété $PetQ$ est vraie sur $A \cap B \cap C$.
2. La propriété $QouR$ est vraie sur $B \cup C$.
3. La propriété $(nonP)ou(QetR)$ est vraie sur $A \cup B \cup C$.
4. La propriété $non(PouQ)$ est vraie sur le complémentaire dans E de $A \cap B$.

Exercice 4 : Sur $\mathbb{N}^\star$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$:

$$\forall (a,b) \in [\mathbb{N}^\star]^2, \text{ on a } a\mathcal{R}b \text{ si } a = b \text{ ou } 2a \text{ divise } \quad b.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. La partie $A = \{120, 572, 638, 2012\}$ est-elle minorée ?
3. Trouver $inf(A)$ la borne inférieure de A.

Tronc commun
Année : 2012 - 2013

INITIATION A L'INFORMATIQUE
Examen session 1 : durée : 1h30

Exercice 1 : culture informatique

1.1. Donner les fonctions d'un système d'exploitation et citer un nom de système d'exploitation
1.2. Expliquez pourquoi, plus la fréquence augmente plus l'ordinateur est rapide. Illustrer en donnant un exemple

1.3. Donner les composants d'un ordinateur selon l'architecture de Von Neumann

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1.17"= (?) cm; 4.7Go=(?)Mo; 2048 Go= (?)To

2.2. Réaliser les conversions suivantes: **$(64,75)_{10}$=(?)2; $(31,4)_8=(?)_{10}$; $(1100010)_2$=(?)16; $(1101010)_2$=(?)8 ; $(BC5)_{16}$=(?)2 ; $(110,01)_2=(?)_{10}$; $(11)_2=(?)_{8421}$; $1BC_{16} = (?)_{10}$**

2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1AB/C)_{16}$, , $(2BC + FAE)_{16}$, $(2BC\text{x } F1)_{16}$ **(1101/101)**$_2$ à 2 chiffres près; **$(1101x101)_2$; $(1101-111)_2$,$(1101+101)_2$;**

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne $A=591_{10}$, $B=31_{10}$, $C=83{,}75_{10}$
3.1. Effectuer A- B en complément à 10 et A- C en complément a 9
3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint
3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB
Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.
3.4. Convertir A et B en binaire
3.5. Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, **Selon le** mode complément **à** un, puis selon **le** mode complément à deux.
3.6. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

Abidjan, le 01/08/2013

Prof FOADE Denis, UFR-SEG, Université Félix HouphouetBoigny (FHB)

Domaine : Mathématique et Informatique
Mention : Analyses Economiques
Spécialité : Economie
Grade : Licence 1 (L1)
UE : Economie générale
EXAMEN DE de la 2ème Session du 1er SEMESTRE . Durée : 2 h 00

I-QUESTIONS THEORIQUES

1- Soit un espace a deux biens X et Y, définir :
   - Une courbe d'indifférence
   - Une carte d'indifférence
   - Quelles sont les propriétés des courbes d'indifférence ?

2- Toujours dans un espace a deux biens, définir et donner l'expression du taux marginal de substitution (TMS) entre les biens X et Y

II -QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM)

NB : justifier les réponses choisies

1- Si l'élasticité-revenu de la demande d'un bien est supérieur à 1, le bien est :
a) Un bien normal b) un bien de luxe c) un bien inferieur d) un bien indépendant

2- Si la quantité achetée d'un bien reste inchangée alors que le prix d'un autre bien varie, l'élasticité croisée de la demande de ces biens est :
a) Négative b) positive c) nulle d) égale à 1

3-parmi les élasticités ci-dessus, lesquelles mesurent un mouvement le long d'une même courbe plutôt qu'un déplacement de la courbe ?
a) L'élasticité-prix de la demande b) l'élasticité revenue de la demande c) l'élasticité-croisé de la demande, d) l'élasticité-prix de l'offre

III- EXERCICE

Supposons que Jacques consomme des bananes issues du producteur Fruit Tropical ainsi que des mangues. Il a pour fonction d'utilité $U = 2X^{\frac{2}{5}}Y^{\frac{3}{5}}$. Nous supposerons que X est la consommation de banane et Y la consommation de mangues. Nous noterons que P_X le prix de la banane, P_Y le prix des mangues et R son revenu.

1) Quelle est l'équation de la courbe d'indifférence de ce consommateur lorsque $U_0 = 32$.
2) Donnez l'équation de la contrainte budgétaire de ce consommateur.
3) Déterminez les quantités consommées à l'optimum des bananes et de mangues par ce consommateur.
4) Définissez les notions de biens inferieurs, de biens normaux et de biens de luxe. Jacques consomme-t-il des biens inferieurs, normaux ou de luxe ? Démontrez-le.
5) Quelle est l'utilité optimale de ce consommateur lorsque R=12800 FCFA, P_X = 400 FCFA et P_Y = 1200 FCFA.

2012/13

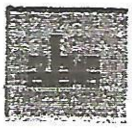
Bureautique
Examen session 1
Durée 1H

EXERCICE 1: Questions de cours (6 pts)

Répondre en cochant la ou les bonnes réponses. Rendre cette feuille comme intercalaire en même temps que votre copie.

Q1 Dans la catégorie système d'exploitation, on trouve :
(a) Unix, Windows 8, Open Office
(b) Linux, Unix, Windows, Mac OS
(c) Microsoft Windows, Microsoft Office, Libre Office
(d) Android, Unix, Windows XP,

Q2 Quelle est la différence entre les deux écritures du mot : université université
(a) Le format
(b) La police
(c) La taille

Q3 Dans MS Word, le bouton  permet de :
(a) Classer par ordre alphabétique
(b) Barrer un texte
(c) Corriger un texte

Q4 Soit l'extrait de tableau cis dessous :

A
100
300
51
451

451 est obtenu par calcul de la formule :
(a) =somme(100 :51)
(b) =somme(A1 :A3)
(c) A4=A1+A2+A3

Q5 soient les deux extraits de tableau. Le 2^e^ est obtenu après application d'un paramétrage de tri personnalisé.

A	B
Emmanuel	100
Fatoumata	200
Victor	151
Jojo	136
Ramatou	201

Ramatou	201
Fatoumata	200
Victor	151
Jojo	136
Emmanuel	100

(a) Trier par colonne A sur valeurs de Z à A
(b) Trier par colonne B sur valeurs du plus grand au plus petit
(c) Trier par colonne B sur valeurs de A à Z

	2012/13
UNIVERSITE DE COCODY ABIDJAN	
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	*Outils bureautiques* *Examen session 2* *Durée 1H15min*

EXERCICE 1: Questions de cours (5pts)

11 Dans la typologie des systèmes informatiques comment appelle t on l'équipement utilisé dans le cadre de la mobilité du personnel ?

12 Calculer en cm la taille d'un écran de 14 pouces ?

13 Connaissez vous une alternative à Microsoft office? Expliquer sa particularité.

14 Quelle est l'application principale d'un lecteur PDF.

15 WIFI et HIFI désignent ils la même chose ? Expliquer

EXERCICE 2 *(5 pts)*

Compléter les phrases et souligner les mots trouvés :

a) Le point d'interrogation dans le coin en haut à droite de l'écran est l' ....
b) Pour ajouter une illustration à un document, vous devez aller dans l'onglet ....
c) Pour sélectionner un mot à l'aide de la souris, ...cliquez sur lui.
d) L'onglet ____________________ est l'onglet par défaut de Word 2007.
e) Le bouton ------------------------------ est utilisé pour le correcteur d'orthographe.

EXERCICE 3 *(10pts)*

Soit le tableau ci dessous représentant les dépenses fixes trimestriels d un couple

A1	janvier	février	mars	TRIMESTRE
Electricité	56655	0	63745	
eau	0	0	23805	
Téléphone	15000	18000	22000	
Internet	20000	20000	20000	
Gardiennage	45000	45000	45000	
Total/mois				

1°) Que contient la cellule C2. Justifier la valeur ?
2°) Calculer (la formule) le total payé à la compagnie d'électricité.
3°) Calculer les dépenses par mois
4°) expliquer une méthode de calcul pour les autres mois.
5°) Quelles sont les plages utilisées pour construire le graphique des dépenses totales par mois.

COMPOSITION DE TECHNIQUE D'EXPRESSION

NIVEAU : L-1

Durée : 2h

EXERCICE 1

RETROUVEZ, DANS L'EXTRAIT SUIVANT, LES PROPOSITIONS QUI CORRESPONDENT AUX ANALYSES PROPOSEES

a) Phrase déclarative. b) Phrase impérative. c) Phrase déclarative négative. d) Phrase interrogative. e) Phrase exclamative.

-Apprenez, Majesté, que la façon de manger vaut parfois dix mille fois mieux que ce qu'on mange.
-Que dites-vous ?
-Principe absolu : on ne mange pas les os.
-Jamais ?
-Jamais… Les os, c'est pour les chiens, et encore ça dépend du chien de quelle classe de la société… Le chien de Sa Majesté ne mangera pas les os… Deuxième principe : on ne se lèche pas les doigts… Faites constamment attention à vos doigts.
-Les os, les doigts, quelle misère !
-Le fils de Mfoulou ne s'amuse pas. Il poursuit un but déterminé et il va bientôt l'atteindre. Regarde la façon dont il a ligoté cet homme !
-Ami Mikane, ne parle pas ainsi. Il y a trop d'oreilles autour de nous.
-Hé ! vous deux ! Que dites-vous là ? De quoi parlez-vous ?
- Nous ne disons rien. Nous parlons de la chasse aux crevettes et de la pêche aux singes !
-Tu bafouilles, frère Mikane ! Qu'entends-tu par chasse aux crevettes et Pêche aux singes ?
-Laisse tomber. Tout ça, c'est la même chose. Pourvu que ce jeune écervelé nous laisse la paix ! Il est trop méchant, ce jeune homme-là…

EXERCICE 2

CLASSEZ LES PHRASES EXCLAMATIVES DE CE TEXTE EN FONCTION DE LEUR FORME

-Ton nom ? demanda-t-il brusquement.
-Onana, m'seu !
-Onana, qui ?
-Onana, m'seu le Commissaire !
-Tu n'a pas d'autre nom ?

-on m'appelle « Zorro » !
Le Commissaire se mit à rire doucement, manifestement amusé.
-Ah ! fit-il, l'air faussement intrigué. Et pourquoi donc ? Onana se mit en devoir de relater au Commissaire quelques-uns des exploits de exploits de Zorro.
-Et aimerais être comme Zorro ?
-Oh ! oui, m'seu.
L'homme fronça les sourcils.
-Tu risques d'aller en prison, le sais-tu ?
L'étonnement du garçon était grand. S'il parvenait à être comme Zorro, il n'irait pas en prison puisque Zorro n'y allait jamais. Le Commissaire haussa la tête.
-Pourquoi voles-tu ?
-Je ne vole pas de l'argent, m'seu ! De la nourriture seulement… Je n'ai personne pour me donner à manger. Personne, m'seu ! Il faut bien que je me débrouille !

EXERCICE 3

LES PHRASES SUIVANTES SONT A LA FORME EMPHATIQUE. DITES, POUR CHACUNE D'ELLES :
a) quel(s) élément(s) de la phrase est (sont) ainsi mis en relief ;
b) quel est le procédé emphatique qui est utilisé.

C'était ma place qu'il voulait. Voilà mon crayon qui est cassé ! Mais, le chasseur ne l'avait pas vu, le serpent ! Lui, il n'est jamais en retard. C'est moi qui l'ai trouvé. Cet exercice, je ne sais pas le faire. C'est maintenant que tu me le dis ! Voilà ta mère qui arrive. De tous ses enfants, Marie est plus dévouée. Du toit endommagé tombaient des gouttes de pluie.

EXERCICE 4

CLASSEZ LES PHRASES DE CE DIALOGUE SELON LEUR REGISTRE

-Et toi, comment tu t'appelles ?
-Raho. Je suis le grand-père.
-C'est donc toi le chef ?
-Oho, non ! Moi, je regarde les moutons. Il n'y a plus que ces deux-là. Dans le temps, quinze ou vingt ans à peine, il y en avait tout un troupeau.
-Ah !
-oui. C'est la vie. Et c'est la mort.
-Et des étrangers ? Est-ce qu'il y a des étrangers dans ce village ?

-Oho, non ! On est tous des frères, on se connaît tous. C'est la même famille, les Aît Yafelman.
Raho se gratta la tête, regarda la plaine, puis la montagne.
-Des gens qui ne sont pas comme nous ?
-Oui, des étrangers !
-Il y a. des gens qui viennent, passent et s'en vont. C'est leur destin.
-Aucun étranger ne s'arrête ici, même pour une journée ?
-Si, il y a. Mais ces deux-là séjournent chez nous plusieurs jours. Ils viennent généralement au début du printemps.
-Bon, dit le chef de police, bon !... J'ai besoin de me reposer, je suis crevé, grand-père. Dis-moi : où est ta maison ? Où est-ce que tu habites ?
-Pas plus loin qu'ici.
-Où ça ? A quel endroit ?
-Ici même.. Et parfois là-bas, à l'angle du mur. Quand vient le soir, je m'accroupis et la nuit tombe, puis elle remonte.
-Tu dors ici par tous les temps ?
-Oui.
-Même en hiver, quand il pleut ?
-Quand il pleut, il pleut. L'eau du ciel est bonne pour les bêtes et les gens.
-Et ça ne te fait rien ?
-Oho ! J'ai mon capuchon ! Je le rabats sur ma tête.

EXERCICE 5

Ce texte renferme des propositions à la forme active et passive.
a) relevez les propositions qui sont à la forme passive et réécrivez-les à la forme active ;
b) Relevez les propositions qui sont à la forme active et transformez-les à la forme passive.

Quand elle se fut calmée, Marie conduisit les arrivants chez les parents de sa mère. Ils furent reçus par le doyen du clan. Après l'échange de nouvelles, on leur servit un rafraichissement. Ensuite, Marie les emmena à la villa de son père où tout avait été préparé pour les recevoir. Lorsque chacun se fut installé, Marie demanda qu'on dresse la table et qu'on apporte à manger. Nous sommes descendus par la piste jusqu'au bord du fleuve. Nous sommes surpris par ton attitude. Nous sommes arrivés par hasard au moment de la discussion.

Université Félix Houphouet Boigny - Abidjan
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire 2012-2013

Mention Mathématiques - Niveau L1
UE : Eléments d'Algèbre linéaire
Session du 26 Juillet 2013.

ECUE : CALCUL MATRICIEL . (1H30)

Exercice 1. *Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - 3A + 3I_3 = 0$. *(*I_3 *matrice identité d'ordre 3).*

2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3. Retrouver l'inverse de A par la formule :

$$A^{-1} = \frac{com\,({}^tA)}{\det A} = \frac{{}^tcom\,(A)}{\det A}.$$

Où $com\,({}^tA)$ *est la comatrice de A transposée, et* $\det A$ *est le déterminant de A.*

Exercice 2. *Soient* m, a, b, c *des réels, et* $(S_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz & = a \\ x + my + z & = b \\ x + y + mz & = c \end{cases}$.

1. Donner la matrice du système (S_m) *et déterminer son rang suivant les valeurs de* m.

2. Déterminer les solutions de (S_m) *suivant les valeurs de* m, a, b, c.

Université Félix Houphouet Boigny - Abidjan
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire 2012-2013

Mention Mathématiques - Niveau L1
UE : Eléments d'Algèbre linéaire
Session du 26 Juillet 2013.

ECUE : ESPACES VECTORIELS (1H30)

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, x, y, z et t des vecteurs linéairement indépendants de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?*

$E_1 = \{x, z\}$, $E_2 = \{x, 2x+t, t\}$, $E_3 = \{3x+z, z, y+z\}$, $E_4 = \{2x+y, x-3y, t, y-z\}$.

Exercice 2. *Soit* $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = P(1) = 0\}$.

(a) *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.*

(b) *Déterminer une base et la dimension de E.*

Exercice 3. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient $u = e_1 - e_2 + e_3$ $v = 2e_1 - e_2 + e_3$ $w = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

(i) *Montrer que $C = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

(ii) *Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à la base C. Calculer l'inverse P^{-1} de P.*

(iii) *Déterminer la matrice Q de f dans la base C.*

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E. Analyse Réelle

Première Session : Juillet2013
Durée : 3h

Exercice 1

1. Calculer la limite de $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$

   a. Montrer que: $\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

   b. Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k^2+n^2})^n$

Exercice 2

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrale alors
   $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$
2. Calculer les intégrales suivantes: $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$,
   $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgx)dx$

Exercice 3.

1. Déterminer le developpement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$.
2. Déterminer le developpement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{1}{x}}}}$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cos \frac{1}{x})^{x^2}$

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Deuxième Session: Octobre 2013
Durée: 3h
Niveau: L1

Exercice 1

1. Calculer la limite de $u_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n^2((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}})$

Exercice 2

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que $\int_0^\pi xf(\cos(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\cos(x))dx$.
   (On pourra poser $x = \pi - t$)
2. Calculer alors $I = \int_0^\pi \frac{x\cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

Exercice 3.

1. Etudier les asymptotes en l'infini et leur position par rapport à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} - \sin(\frac{1}{x})$
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$

Exercice 4.
Intégrer les équations différentielles suivantes:

1. $y' = -xy^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x^3}$ sachant que $y = \frac{1}{x^2}$ est une solution particulière.
2. $y" - 2y' + y = x$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
3. $y" - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$

	2012/13
UNIVERSITE DE COCODY ABIDJAN	
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	*Programmation* *Examen session 1* *Durée 1H*

EXERCICE 1: Questions de cours (10 pts)

11 Parmi ces valeurs affichées par un programme en pascal lesquelles peuvent provenir de l'instruction `Write(4*serie:10:8)` ?

1 4.3 21.14192588 -100 3.14E+01

12 soit l'instruction `'For j:= n downto i+1 do'` *si n est égal à 5 et i égal à 2, combien de répétitions seront exécutées par le programme ?*

13 Quelle est la différence entre une procédure et une fonction? Dans le cas d'un programme de manipulation de matrice carrée, préciser le type des sous programmes :

Lect_mat : pour saisir la matrice
Affiche_mat : pour afficher la matrice
Somme_diag : calculer la somme des éléments en de la diagonale (la trace)

14 Mettez dans le bon ordre les étapes de production de programme.

```
Analyse (Algorithme)
Production (Programmation)
Spécification
Test et Debug
```

EXERCICE 2 (4pts)
Soit le programme suivant qui permet de reconnaitre un palindrome (mot se lisant dans les deux sens).

```
Program test_palindrome;
Var
palindrome: boolean;
Longueur, i : Integer;
Mot : string ;
Begin
Palindrome:=true;
Writeln('saisir mot à tester') ;
Readln(mot);
Longueur:=length(mot) ;
For i:=1 to (longueur div 2)do
Palindrome :=(Palindrome)and( mot[i]=mot[longueur-i+1]);
If (palindrome = true) then writeln('La chaîne', mot,' est un
palindrome')
Else writeln('ce mot n''est pas un palindrome') ;
Readln;
End.
```

2.1 *Evaluez l'expression :*
`Palindrome :=(Palindrome)and( mot[i]=mot[longueur-i+1]);`
`pour mot='ELLA'à la fin de la boucle for.` justifiez

2.2 *Donnez le résultat de l'exécution pour le mot 'ELLE'.justifiez*

EXERCICE 3 *(6pts)*

Ecrire le programme en pascal de la recherche séquentielle d'un nombre x=97 dans le tableau ci dessous:

```
C:\TPW\NONAME00.EXE
Initialisation
saisir l'élément1
25
saisir l'élément2
65
saisir l'élément3
96
saisir l'élément4
54
saisir l'élément5
97
trouvé en5
```

PS : Le programme devra demander la saisie du nombre recherché.

UFHB/UFRMI	
L1	*Examen de **Pascal*** *Session2 (Octobre 2013)* *Durée : **1H00***

QUIZZ

a. Comment documente-t-on un programme en Turbo Pascal ? A qui cela est-il destiné ?

b. Quelles sont les parties d'un programme en Pascal ?

c. Quelle est l'instruction (ou les instructions) du Pascal qui permet(tent) de rendre un programme interactif ?

d. Qu'est-ce qu'une variable booléenne ? Comment la déclare t on en pascal ?

e. Quelle est la structure de données définie par le schéma ci-dessous ? Donner la déclaration en Pascal.

Numéro	Nom du produit	Quantité en stock
9109	Savon BF	56
1890	Pile Wonder	39
3120	Papier hygiénique	21
…		…

Exercice 1

Combien peut-on écrire d'anagrammes avec le mot "NATUREL" ?
Ecrire un programme en pascal qui permet de répondre à cette question pour n'importe quelle chaîne de caractère de longueur supérieure ou égale à 1.
Vous pouvez utiliser la fonction ***length(mot).***

Exercice 2

On veut utiliser la structure de données ci-dessous pour le Tic-Tac-Toe : un jeu qui consiste à aligner 3 symboles identiques pour être vainqueur

x		o
o	x	
o		x

a- Ecrire en Pascal la déclaration de la structure de données

b- Ecrire en Pascal les procédures joueurA() et joueurB( ) qui permettent aux joueurs de choisir leur colonne et ligne de jeux et de placer leur pions.

Université FHB- UFRMI, Licence 1 | Année Académique
UE: Probabilités-Statistique | 2012/2013

Statistique - Semestre 2

Examen 2ème session, Durée: 01h20

NB: la clarté de la rédaction sera notée.

Exercice 1 (12 pts)

Une enquête a été réalisée auprès de 500 employés d'une usine, pour étudier la distribution des salaires journaliers en milliers de francs.

Salaires	[5;6[	[6;7[	[7;?[	[?;9[	[9;10[
Nombre d'employés	?	150	200	60	?
Centre de classe			7,75		
Fréquence cumulée			0,86		

(1) Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.

(2) Compléter le tableau, puis tracer l'histogramme des effectifs.

(3) Déterminer la valeur du mode et celle de la médiane par le calcul, interpréter les résultats.

(4) Déterminer l'écart interquartile.

(5) Quel est le nombre d'employés qui perçoivent un salaire entre 6500 et 8000 francs par jour?

(6) Evaluer la dispersion relative des salaires de l'usine.

(7) Le syndicat des employés de l'usine a demandé une augmentation des salaires de 16% pour chaque employé. Quel sera le montant du salaire journalier moyen dans le cas de cette augmentation

Exercice 2 (08 pts)

Une enquête sur la rémunération mensuelle (en euros) et l'âge (en années) réalisée, en 2005, auprès des ouvriers d'une entreprise, a donné les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.

	$[500, 800[$	$[800, 1000[$	$[1000, 1200[$	$[1200, 1500[$	$[1500, 2000[$
$[15, 25[$	10	0	0	0	0
$[25, 35[$	4	8	0	0	0
$[35, 45[$	2	6	2	0	0
$[45, 65[$	2	4	6	4	2

(1) Quelle est la population? Quelles sont les variables étudiées, et quel est leur type?

(2) En 2005, parmi les ouvriers ayant une rémunération entre 500 et 800 euros, quel était le pourcentage de personnes ayant entre 20 et 40 ans?

(3) En 2005, parmi les ouvriers ayant entre 45 et 65 ans, quel était le pourcentage de personnes ayant une rémunération au moins égal à 1000 euros?

(4) D'après ce tableau, peut-on dire que la rémunération mensuelle est indépentante de l'âge?

(5) La rémunération mensuelle est-elle linéairement corrélée à l'âge?

BONNE CHANCE!

Probabilités (20 pts) - 01h40

Exercice 1 (8 pts)

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la ex Communauté économique européenne (CEE). Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales.

(1) Combien y a-t-il de circuits différents ? Dans la suite, on suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

(2) Calculer la probabilité de l'événement suivant : le circuit contient Paris. (Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

(3) Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

Exercice 2 (12 pts)

On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on suppose que tous les couples de résultats de chiffres paires sont équiprobables, ainsi que ceux de chiffres impaires et ceux de chiffres mixtes (l'un est paire et l'autre impaire). On suppose également que l'on a deux fois plus de chance d'obtenir le couple $(2,2)$ que le couple $(1,1)$ qui est aussi deux fois plus probable que le couple $(1,2)$. On désigne par X le plus grand des chiffres obtenus et par Y leur écart.

(1) On pose $\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \beta$, $\mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \alpha$, $\mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \lambda$.

(a) Montrer que α, β, λ vérifient le système:

$$\begin{cases} 9\alpha + 9\beta + 18\lambda &= 1 \\ \alpha - 2\beta &= 0 \\ \beta - 2\lambda &= 0. \end{cases}$$

(b) En déduire les valeurs de α, β et λ.

(c) Déterminer la probabilité que la somme des chiffres soient égale à 8.

(2) On désigne par X le plus grand des chiffres obtenus et par Y l'écart de ces deux chiffres.

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y) (dans un tableau).

(b) En déduire les lois de X et Y.

(c) Calculer $\mathbb{P}(X = Y + 1)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(Y < X)$.

Université FHB- UFRMI

2012/2013

Probabilités (20 pts) - 01h40

Exercice 1 (8 pts)

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la ex Communauté économique européenne (CEE). Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales.

(1) Combien y a-t-il de circuits différents ? Dans la suite, on suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

(2) Calculer la probabilité de l'événement suivant : le circuit contient Paris. (Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

(3) Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

Exercice 2 (12 pts)

On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on suppose que tous les couples de résultats de chiffres paires sont équiprobables, ainsi que ceux de chiffres impaires et ceux de chiffres mixtes (l'un est paire et l'autre impaire). On suppose également que l'on a deux fois plus de chance d'obtenir le couple $(2,2)$ que le couple $(1,1)$ qui est aussi deux fois plus probable que le couple $(1,2)$. On désigne par X le plus grand des chiffres obtenus et par Y leur écart.

(1) On pose $\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \alpha$, $\mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \beta$, $\mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \lambda$.

(a) Montrer que α, β, λ vérifient le système:

$$\begin{cases} 9\alpha + 9\beta + 18\lambda & = 1 \\ \cancel{\alpha - 2\beta} & \cancel{= 0} \\ \cancel{\beta - 2\lambda} & \cancel{= 0} \end{cases}$$

$\beta - 2\alpha = 0$

$\alpha - 2\lambda = 0$

(b) En déduire les valeurs de α, β et λ.

(c) Déterminer la probabilité que la somme des chiffres soient égale à 8.

(2) On désigne par X le plus grand des chiffres obtenus et par Y l'écart de ces deux chiffres.

(a) Déterminer la loi du couple (X,Y) (dans un tableau).

(b) En déduire les lois de X et Y.

(c) Calculer $\mathbb{P}(X = Y+1)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(Y < X)$.

Université FHB de Cocody
(Abidjan – Rép. de Côte d'Ivoire)
UFR Maths – Informatique (MI)

Année 2012 - 2013

Examen d'Electricité – Epreuve du 29 juillet 2013 (1ère session)

Durée : 2h

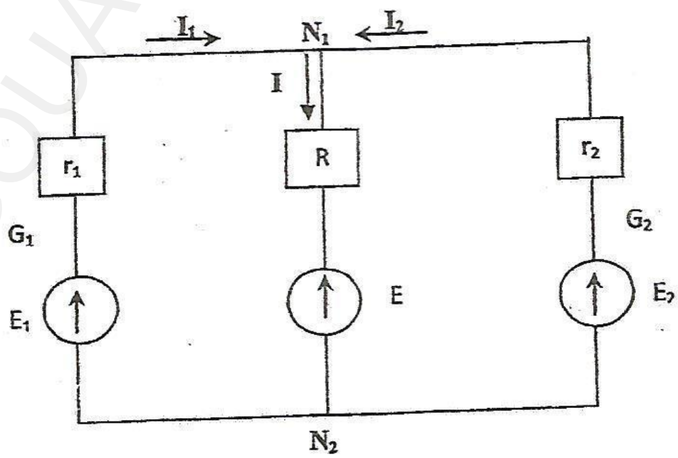
Documents non autorisés

Exercice 1 : ***(6 points)***

1. Une sphère conductrice A de rayon $R_1 = 6\ cm$ isolée, est au potentiel $U_0 = 30000\ Volts$ par rapport au sol. Calculer sa charge électrique. On donne $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$.
2. On entoure la sphère A de deux hémisphères métalliques B_1 et B_2 initialement neutres, de manière à constituer une sphère B isolée concentrique à A, de rayon $R_2 = 10\ cm$ et de rayon $R_3 = 12\ cm$. Quelles sont les diverses charges portées par le système ? Donner l'expression et la valeur du champ E et du potentiel V en tout point M de l'espace situé à la distance x du centre O commun aux deux sphères. Le champ E et le potentiel V sont nuls à l'infini. Tracer E(x) et V(x). Calculer l'énergie du système ainsi formé. Quel est le travail fourni pour la formation du système ?
3. Le système des deux sphères A et B peut-il être assimilé à un condensateur sphérique ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : ***(6 points)***

Dans le réseau représenté sur la figure ci-dessous, G_1 et G_2 sont deux batteries d'accumulateurs ayant respectivement pour f.é.m. $E_1 = 110$ V et $E_2 = 100$ V, pour résistances $r_1 = 0.5\ \Omega$ et $r_2 = 0.3\ \Omega$. On connecte leurs bornes à celles d'un moteur E dont la résistance est de $R = 1\ \Omega$.



1. A l'aide des équations de Kirchhoff, correctement établies, calculer les courants I_1, I_2 et I dans les cas suivants :

a. Le moteur est bloqué

b. Le moteur E tourne et développe une f.é.m. E = 90 V

2.

a. Déterminer les éléments R_{TH} et E_{TH} du générateur de Thévenin équivalent aux deux générateurs G_1 et G_2 en parallèle.

b. En déduire le courant I dans le moteur E.

Problème : *(8 points)*

1. Exprimer le champ crée par une plaque infinie dans le plan (*yoz*) uniformément chargée en surface avec la densité $\sigma > 0$.

   Calculer $\|\vec{E}\|$ pour $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2}. On rappelle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0.10^9 SI$.

   On considère maintenant deux plaques infinies parallèles : A dans le plan (*yoz*) uniformément chargée en surface avec la densité surfacique de charge $\sigma > 0$ et B, dans le plan d'équation $x = e$, chargée avec la densité surfacique $-\sigma$.
2. Exprimer les champs $\vec{E}_A$ *et* $\vec{E}_B$ crées en tout point de l'espace par les plaques A et B.
3. En utilisant le théorème de superposition, exprimer le champ $\vec{E}$ à l'intérieur ~~et à l'extérieur~~ des deux plaques. Dessiner quelques lignes de champ.
4. Déterminer l'expression de la différence de potentiel $V_A - V_B$. Calculer $V_A - V_B$ pour $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2} et $e = 5{,}0\ \mu m$.
5. Sur chacun des plans, isolons deux régions identiques d'aire S en regard. En déduire la capacité C du condensateur ainsi formé.

Université FHB de Cocody
(Abidjan – Rép. de Côte d'Ivoire)
UFR Maths – Informatique (MI)

Année 2012 - 2013

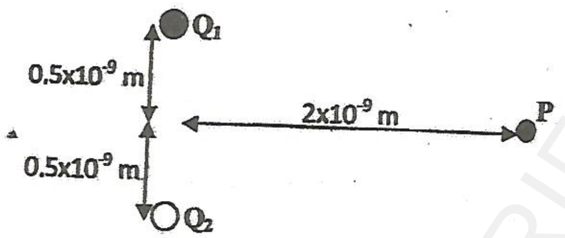
Examen d'Electricité – Epreuve du 14 octobre 2013 ($2^{ème}$ session)

Durée : 2h

Documents non autorisés

Exercice 1 : *(6 points)*

Un dipôle est un groupe de deux charges de même module mais de signes contraires séparées par une petite distance. Considérons un dipôle de charges $Q_1 = 4.8\ 10^{-19}$ C et $Q_2 = -4.8\ 10^{-19}$ C séparées verticalement par une distance de $0.5\ 10^{-9}$ m (voir schéma ci-dessous).



On désire

a. Evaluer le champ résultant au point P,

b. La force électrique sur un proton placé en P,

c. La force électrique sur un électron placé en P.

d. Où doit-on placer une $3^{ème}$ charge e pour annuler le champ au point P.

e. Reprenez la question d) avec une charge –e.

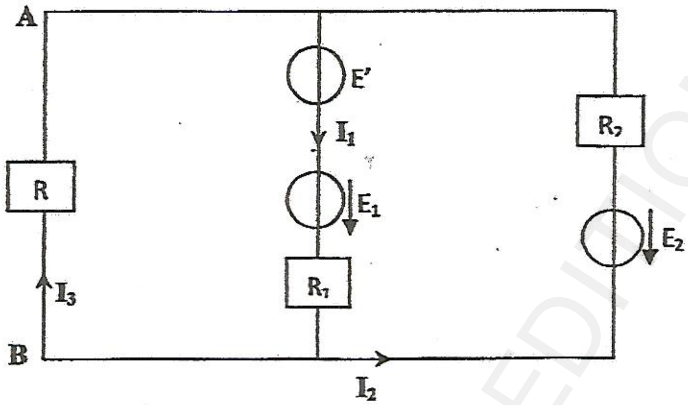
Exercice 2 : *(6 points)*

1. Déterminer le potentiel crée en tout point de l'axe d'un anneau de rayon a, portant la densité linéique de charge λ. En déduire le champ électrostatique sur l'axe.

2. En utilisant le résultat précédent (ou par un calcul direct), déterminer le potentiel crée en tout point de l'axe d'un disque de rayon a, portant la densité surfacique uniforme σ. En déduire alors le champ électrostatique en tout point de l'axe.

Problème : *(8 points)*

On considère le montage électrique ci-dessous où E_1 et E_2 désignent des générateurs et E' un récepteur non polarisé. On donne $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R = 1\ \Omega$; $E' = 4$ V, $E_1 = 20$ V et $E_2 = 10$ V.



1. Remplacer le récepteur non polarisé par son schéma équivalent. En vous servant des lois de Kirchhoff, calculer les courants I_1, I_2 *et* I_3 circulant dans les différentes branches du circuit.
2. En appliquant le théorème de Thévenin à la portion du circuit située à droite de AB, exprimer puis calculer E_{TH} *et* R_{TH}.
3. En déduire le courant I_3 circulant dans la résistance R.

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody)

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2012 – 2013

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Doublet non accolé (5 points)

Un doublet non accolé est constitué d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale image $f_1' = 1$ cm et d'une lentille mince divergente L_2 de distance focale image $f_2' = -1$ cm distantes de $d = 3$ cm.

a) Donner le symbole dudit doublet.

b) Calculer sa distance focale image f '.

c) Un objet AB de taille 1/3 cm est placé à 2 cm de la lentille L_1. La lumière se propageant de AB vers L_1, puis vers L_2, construire l'image A'B' de AB à travers le doublet. On fera le schéma à l'échelle 300% (de préférence sur un papier millimétré).

d) Retrouver par calcul la position, la taille et le sens de l'image A'B'.

Exercice 2 : Chasse d'un sous-marin (7 points)

Lors de leur patrouille, deux bateaux de guerre A et B, distants de 915 m, détectent un écho sonar* provenant d'un sous-marin. Cet écho fait avec la verticale un angle de 30° pour le bateau A et de 60° pour le bateau B.

A 61 m de profondeur, la température de l'eau change brusquement de telle sorte que la vitesse du son dans les couches profondes vaut 9/10 de celle prévalant dans les couches supérieures.

a) A quelle profondeur les capitaines des deux bateaux feront-ils placer les grenades sous-marines, s'ils ignorent la variation de température de l'eau sus-mentionnée ?

On représentera les bateaux A et B par deux points situés à la surface de l'eau et on assimilera l'onde sonore à une onde lumineuse.

b) A quelle profondeur le sous-marin se trouve-t-il réellement ?

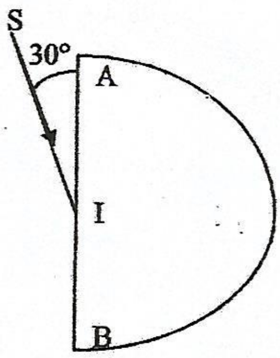
c) Si les deux capitaines ignorent la variation de température de l'eau, à quelle distance horizontale du bateau A situent-ils le sous-marin ?

d) Quelle est la distance horizontale réelle entre le sous-marin et le bateau A ?

***Sonar : appareil de détection sous-marine, utilisant les ondes sonores et permettant le repérage, la localisation et l'identification des objets immergés.**

Exercice 3 : Spectre d'une lumière polychromatique (8 points)

1/ Un rayon lumineux monochromatique SI arrive sous un angle de 30° sur la face plane AB d'un demi-cylindre de verre dont l'indice est $n = 1,731$.



Le point I étant le milieu du segment [AB], tracer la marche du rayon lumineux à travers le demi-cylindre. Indiquer les angles d'incidence et de réfraction sur les faces d'entrée et de sortie du demi-cylindre.

2/ On considère le cas où le rayon lumineux SI est formé des radiations visibles émises par un atome d'hydrogène. Les niveaux d'énergie quantifiés dudit atome sont donnés par la relation :

$$E_n = -13,6 / n^2 \quad \text{(n entier naturel non nul ; } E_n \text{ en eV).}$$

a) Calculer la longueur d'onde λ des radiations émises lorsque des atomes d'hydrogène excités passent d'un état d'énergie caractérisé par $n > 2$ au niveau d'énergie $n = 2$.

On rappelle que la transition de l'état E_n vers l'état E_2 $(2 < n)$ s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie : $h.c / \lambda = E_n - E_2$ $(h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s ; $c = 3.10^8$ m.s$^{-1})$.

b) En déduire les longueurs d'onde visibles (400 nm < λ < 750 nm). Donner les couleurs associées à la plus grande et à la plus petite de ces longueurs d'onde.

c) Les indices du verre correspondant aux plus grande et plus petite longueurs d'onde sont respectivement 1,690 et 1,750. Quelle est la radiation la plus déviée ? Quel est l'angle formé par les deux rayons émergents extrêmes ?

d) Indiquer un autre dispositif permettant d'obtenir le spectre d'une lumière polychromatique.

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody)

UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

UE OPTIQUE DEUXIEME SESSION 2012 – 2013

Durée : 02h

Exercice 1 : Vecteur de Poynting (2,5 points)

On considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale monochromatique se propageant dans le vide.

1) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de cette onde en fonction de l'amplitude E_0 du champ électrique, de la perméabilité magnétique du vide μ_0, de la célérité c de l'onde dans le vide, de la pulsation ω de l'onde, du temps t, du vecteur d'onde $\vec{k}$, du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde $\vec{u}$.

2) Quel est l'intérêt du vecteur de Poynting dans l'étude des ondes lumineuses ?

Exercice 2 : Doublet non accolé (3,5 points)

Un doublet non accolé est constitué d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale image $f_1' = 1$ cm et d'une lentille mince divergente L_2 de distance focale image $f_2' = -1$ cm, distantes de $d = 3$ cm.

a) Donner le symbole dudit doublet.

b) Calculer sa distance focale image f '.

c) Un objet AB de taille 1/3 cm est placé à 2 cm de la lentille L_1. La lumière se propageant de AB vers L_1, puis vers L_2, construire l'image A'B' de AB à travers le doublet. On fera le schéma à l'échelle 300% (de préférence sur un papier millimétré).

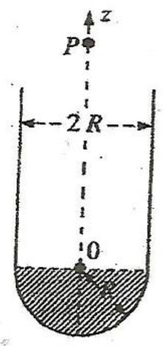
d) Retrouver par calcul : la position, la taille et le sens de l'image A'B'.

Exercice 3 : Lentille demi-boule 1 (7 points)

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre 2R = 8 cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP} = 27$ cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice n = 4/3 remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



Exercice 4 : Lentille demi-boule 2.(7 points)

Un objet AB de longueur 1 cm, est placé à 4 cm de la face plane d'une demi-sphère en verre, d'indice $n = 1,5$, de centre C, de sommet S et de rayon $R = 6$ cm, baignant dans l'air.

1) Déterminer, par calcul, les caractéristiques de l'image A'B' de l'objet AB : sa position par rapport au sommet S de la demi-sphère, son sens par rapport à l'objet et sa taille.

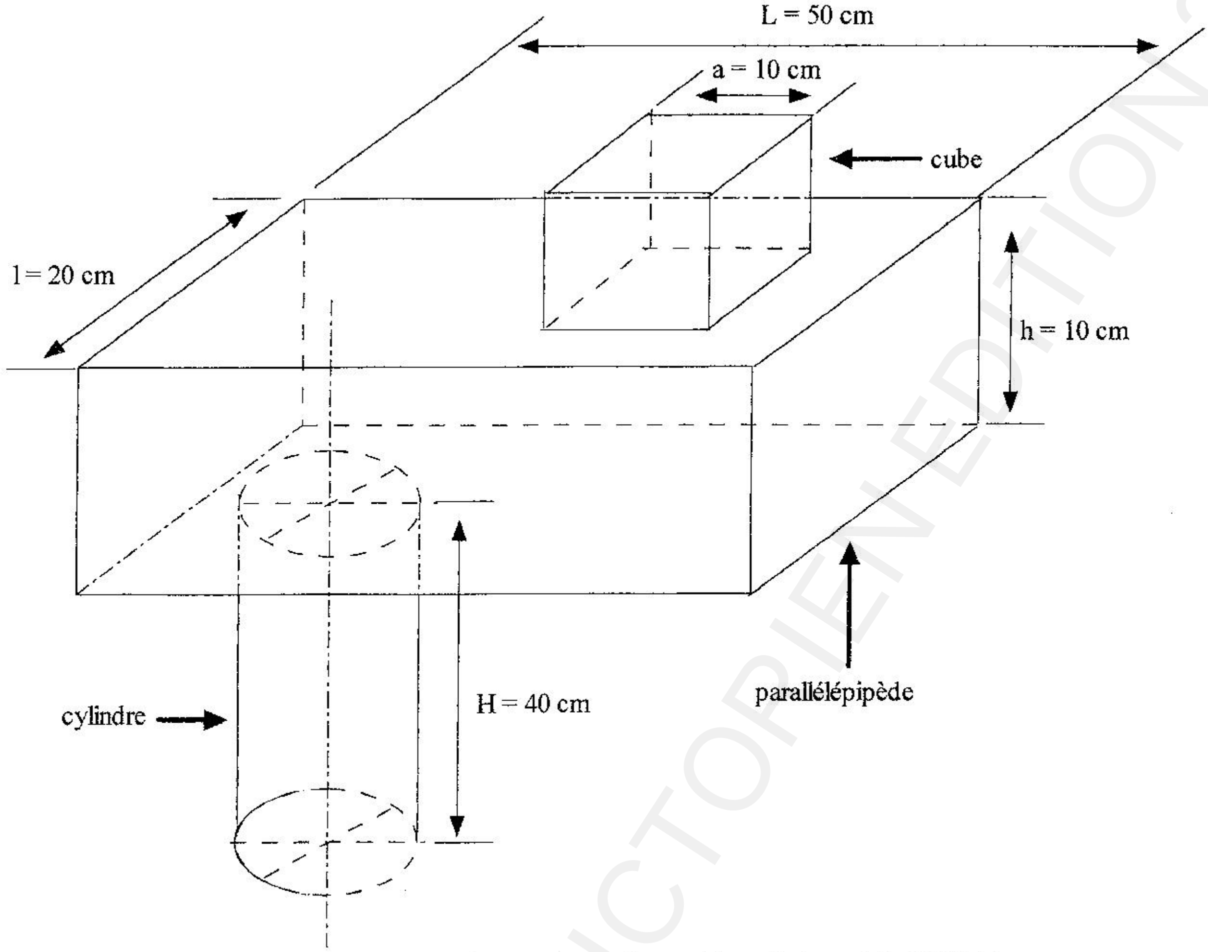
On supposera que la face plane de la demi-sphère constitue la face d'entrée de la lumière.

2) a/ Représenter sur un schéma dont on précisera l'échelle, la marche du rayon lumineux issu de B et normal à la face plane de la demi-sphère.

b/ Placer sur l'axe optique le foyer principal image F ' de la face sphérique de la demi-sphère.

c/ Vérifier l'emplacement de F ' en calculant la mesure algébrique $\overline{CF'}$.

Exercice 1 : Mécanique, calcul d'erreur



Le schéma ci dessus représente un dispositif mécanique A constitué de trois (3) parties :

- un parallélépipède de longueur L = 50 cm, de largeur l = 20 cm et de hauteur h = 10 cm

- un cube d'arrête a = 10 cm

- un cylindre de surface de base S = 314 cm^2 et de hauteur H = 40 cm

Toutes les dimensions ont été mesurées avec une règle graduée en millimètre

1) Soient V_c le volume du cylindre, V_p le volume du parallélépipède, V_a le volume du cube, calculer V_t le volume total du dispositif A

2) Déterminer l'expression de l'erreur ΔV_t et calculer ΔV_t

3) La masse totale du dispositif A est m = (111140,4 $\pm$ 0,1) g calculer sa masse volumique ρ ainsi que l'erreur $\Delta\rho$

4) Le dispositif mécanique A est fait en quel métal ?

Métal	Nickel	Fer	Laiton	Etain	Cuivre
ρ (kg/m3)	8900	7860	7300	7290	8920

Exercice 2 : Electricité, calcul de résistances

On monte en série une résistance $R_1 = (300 \pm 15)\ \Omega$ avec une résistance R_2. Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la tension en fonction de l'intensité de la résistance équivalente R_{eq} des résistances R_1 et R_2 montées en série :

I (A)	0	1	3	5	7	9	11	13
U(V)	0	1020	3000	4980	7000	9020	11000	12980

1) A partir des valeurs du tableau ci dessus tracer la caractéristique U = f(I) des deux résistances montées en série

2) En déduire graphiquement R_{eq} et ΔR_{eq}

3) A partir de R_{eq} calculer R_2 et ΔR_2

4) Calculer R_{eqpath} la résistance équivalente théorique des deux résistances R_1et R_2 montées en parallèle ainsi que ΔR_{eqpath}

Exercice 3 : Optique, marche de rayons lumineux

1) Tracer la marche du rayon lumineux pour la Figure 1. L'indice de réfraction des deux prismes est supérieur à 1. Expliquez votre démarche

2) Tracer la marche du rayon lumineux pour la Figure 2. Expliquez votre démarche

3) Tracer la marche du rayon lumineux pour la Figure 3. Expliquez votre démarche

4) Tracer la marche du rayon lumineux pour la Figure 4.

- le rayon se réfracte sur s1

-puis se réfléchit sur s2

-se réfléchit de nouveau sur s1, puis se réfracte sur s2 pour sortir

Expliquez votre démarche

NB : travailler directement sur la feuille que vous devez ensuite rendre en l'insérant dans votre copie

tout oubli correspondra à un zéro

Tous les dispositifs baignent dans l'air

Université Félix Houphouët-Boigny **2013-2014**
UFR-MI-L1 **2 heures**

Examen de suites et fonctions dérivables

On pourra faire appel aux résultats des TD. On rappelle que $\Pi_{k=0}^{n} f(x_k) = f(x_0) \times f(x_1) \times \ldots \times f(x_n)$ et que la fonction partie entière est l'application $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ qui à tout x associe l'unique entier $\mathrm{E}(x)$ qui vérifie $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$

Exercice 1 (5 points). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer clairement que la fonction E est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\mathrm{E}(\sqrt{4n+2}) - \mathrm{E}(\sqrt{4n+1})$.
   (a) Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier relatif q tel que $(q+1)^2 = 4n+2$.
   (b) On pose $q = \mathrm{E}(\sqrt{4n+1})$ et $p = \mathrm{E}(\sqrt{4n+2})$. Monter que si $q < p$ alors $\sqrt{4n+1} < q+1 \leq \sqrt{4n+2}$.
   (c) Déduire de tout ce qui précède que $q - p$.

Exercice 2 (5 points). Soient x et y des réels avec $0 < x < y$.

1. Rappeler le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$
3. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y$.
   (a) Justifier qu'il existe $\alpha_0 \in]0, 1[$ tel que $f'(\alpha_0) = 0$.
   (b) Montrer que f' est strictement décroissante sur $[0, 1]$; que peut-on dire de α_0.
   (c) Déduire que pour tout α de $]0, 1[$, on a $\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y)$.

Exercice 3 (5 points).

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $2^n < (n-1)!$
2. Déterminer (avec justification) les limites suivantes :
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{\Pi_{k=1}^{n}(2k-1)}{n!}} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!n}$$
3. Quand dit-on que deux suites sont adjacentes ? Vérifier si oui ou non, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies respectivement par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \sin(1/n)$ sont adjacentes.

Exercice 4 (5 points). 1. Quand dit-on qu'une fonction f admet un developpement limité d'ordre 10 en un point $x_0 \in \mathbb{R}$? en $+\infty$?

2. Justifier que la fonction $f(x) = \frac{x^4}{1+x^2+x^4}$ admet un developpement limité d'ordre 10 au voisinage de 0, et donner ce developpement.
3. Donner le developpement limité d'ordre 2 de $x \longmapsto \ln(\sin x)$ en $\frac{\pi}{2}$, et en déduire $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1/(2x-\pi)}$

Université Félix Houphouët-Boigny 2013-2014
UFR-MI-L1 **2 heures**

Examen de suites et fonctions dérivables - session 2

Documents et calculatrices interdits.

Dans tout le document, $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, $E(x)$ est la partie entière de x, ln désigne le logarithme Népérien, et Arctan est la fonction réciproque de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 1 (5 points). On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5} \text{ et } y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5}$$

1. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = y_n - x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite u est géométrique, convergente et déterminer sa limite.
2. Etudier le sens de variations des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite que nous noterons ℓ.
4. Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 2 (6 points). 1. Enoncer les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

2. A l'aide du théorème de Rolle, démontrer le théorème des accroissement finis.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - \text{Arctan}(\ln x).$$

   (a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.

   (b) A l'aide du théorème des accroissements finis et de la variation de f', montrer que

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y) \text{ pour tout } 0 < x < y$$

Exercice 3 (5 points). On veut montrer que l'ensemble $F = \{p\ln 2 + q\ln 3 : (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Quand dit-on qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que $\ln 2$ et $\ln 3$ sont dans F, et que si $x \in F$ alors $mx \in F$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $\alpha = \inf F \cap \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Justifier l'existence de α et montrer que si $\alpha \in F \cap \mathbb{R}_+^*$ alors pour tout $x \in F$, $x - \alpha E(\frac{x}{\alpha}) = 0$
   (b) En admettant que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$, justifier que $\alpha \notin F \cap \mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in F \cap \mathbb{R}_+^*$. Conclure par rapport à α
4. Déduire de ce qui précède que F est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 4 (4 points). 1. Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

   (a) Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit

2. Donner le developpement limité à l'ordre 2 au voisinage de $-\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x}$.

UNIVERSITE F.H.B ANNEE UNIVERSITAIRE: 2013-2014

UFR: MATHS - INFO
NIVEAU: L1
COMPOSITION : CALCUL INTEGRAL
SESSION 1
DUREE:1H15

EXERCICE 1

1)Résoudre l'équation différentielle (E): $y'' - y = (x+1)\exp(x)$.
2)Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = -1$ et $h'(0) = \frac{13}{4}$.
3)Donner un développement limité d'ordre 3 de h au voisinage de 0.
4)En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse 0. Etudier leurs positions relatives.

EXERCICE 2

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$,
$\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$
2) Calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$
3) **En déduire** $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx$

Université Félix Houphouët - Boigny *Année 2013 - 2014*
UFR Mathématiques et Informatique
Niveau L1

EXAMEN DE DEUXIEME SESSION
ECUE: CALCUL INTEGRAL
DUREE: 1H30

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 4y' + 3y = x^2 \exp(x)$.
1) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2) Expliquer pourquoi l'on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $(ax^3 + bx^2 + cx)\exp(x)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer l'unique solution h *de (E) vérifiant* $h(0) = 1$; $h'(0) = -\frac{1}{4}$.
3) Donner le développement limité de h *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 4.
4) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de h *au point d'abscisse* 0. *Etudier les positions relatives.*

EXERCICE 2

On pose: $I = \int_0^\pi \cos^4 x dx$; $J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$.
1) Montrer que $I = \int_0^\pi \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$.
3) Montrer aussi que $J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$.
4) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$ *et que* $I - J = 0$. *En déduire* I *et* J.

Université FHB
UFR- Mathématiques et Informatique
Année : 2013 – 2014

Examen de Structures algébriques
(Première session (**2-heures** 30))

Exercice 1 : **(10 points)** On considère le produit cartésien $\mathbb{Z}^2$ du groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$, les sous-ensembles

$$K = \{0\} \times \mathbb{Z} \text{ et } H = \{(n, n), n \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que K et H sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}^2, +)$
2. Dans le groupe quotient $\dfrac{\mathbb{Z}^2}{K}$ déterminer les classes d'équivalence des couples suivants : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
3. Dans le groupe quotient $\dfrac{\mathbb{Z}^2}{H}$ déterminer les classes d'équivalence des couples suivants : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$
4. On considère l'application $\theta : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \longmapsto (y, -x)$.
   (a)- Montrer que θ est endomorphisme bijectif de $\mathbb{Z}^2$.

   (b)- Calculer $\theta^4(x, y)$ et en déduire θ^{-1} en fonction de θ.

Exercice 2 **(10 points)** .
On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. (a) **Montrer**$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ **est un sous-anneau commutatif intègre de** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. (b) **Donner** 6 **éléments du groupe multiplicatif** $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])$ **de l'anneau** $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
3. **Soit**
$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{p + q\sqrt{5}, (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$$
   (a)- **Montrer que** $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ **est un sous-anneau commutatif de** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
   (b) **Montrer que tout élément non nul de** $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ **est inversible dans** $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

Université FHB
UFR- Mathématiques et Informatique
Année : 2013 – 2014
Licence 1

Examen de Structures algébriques
(Deuxieme session (2-**heures**))

Exercice 1 : (6 **points**) Répondre par VAUX ou FAUX à chacune des propositions suivantes

1. Un groupe est avant tout un ensemble sur lequel on a défini une loi de composition interne.
2. Si $*$ est le symbole d'une loi de composition interne sur E, alors pour que E muni de $*$ soit un groupe, **il est nécessaire que $*$ soit commutative.**
3. Si $(G, *)$ est un groupe non abélien, alors pour tout couple (x, y) d'éléments de G, on a $x * y \neq y * x$.
   Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e_G et H un ensemble.
4. Pour que H soit un sous-groupe de $(G, *)$ il est nécessaire que $H \neq \emptyset$ ou $H \subset G$
5. Pour que H soit un sous-groupe de $(G, *)$ il est suffisant que $e_G \in H$.
6. Tout groupe est lui-même sous-groupe d'un groupe.

Exercice 2 : (6 **points**).

On considère l'anneau quotient $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer le *groupe multiplicatif* $\mathcal{U}(A)$ de l'anneau A.
2. Quels sont les cardinaux possibles des sous-groupes du groupe $\mathcal{U}(A)$?
3. Déterminer 4 sous-groupes de $\mathcal{U}(A)$.

Exercice 3 : (8 **points**)

On considère l'anneau $\mathbb{F} = \dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$.

(a)- L'anneau $\mathbb{F}$ est-il un corps ?
(b)- Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau $\mathbb{F}$?
(c)- Quels sont les entiers x tels que $x^2 + 4x - 2$ soit multiple de 7.
(d)- Quels sont les entiers naturels n tels que 7 divise $4^n + 3^n$?

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 2013-2014

EXAMEN DE MECANIQUE 1

Parcours : Tronc Commun - Niveau : Licence 1

Première Session

Durée : 3 Heures

Exercice 1 : On considère le cercle d'équation $x^2+z^2-2\alpha x=0$ et un point mobile sur ce cercle. Soit θ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{x}})$. ($O$: origine des axes). Cet angle est fonction du temps selon la loi : $tan(\theta) = \frac{\beta}{t}$, avec $\beta = cste$.

1. Trouver les équations paramétriques de la trajectoire de M : $x(t)$ et $z(t)$.
2. Calculer la vitesse du point M.
3. Calculer l'accélération du point M.

Exercice 2 : Soient deux référentiels $R_1(O_1; x_1, y_1, z_1)$ et $R_2(O_2; x_2, y_2, z_2)$ (figure 1) tels que :

$$\begin{cases} .\ \Omega_{21} = (0, 0, \omega)\ \ avec\ \ \omega \neq 0\ \ et\ \ \frac{d\omega}{dt} = 0; \\ \\ .\ O_1 = O_2; \\ \\ .\ \grave{a}\ t = 0\ les\ deux\ rep\grave{e}res\ sont\ confondus\ (O_{x_1} = O_{x_2},\ O_{y_1} = O_{y_2},\ O_{z_1} = O_{z_2}). \end{cases}$$

Un point M est en mouvement sur l'axe O_{x_2} du repère R_2 suivant la loi : $\overrightarrow{OM} = \rho(t)\overrightarrow{i}$, avec $\rho(t) = \rho_0 cosh(\omega t)$.

1. Déterminer en fonction de ρ_0 et ω la vitesse $\overrightarrow{V}_{R_2}$ de M par rapport au repère R_2.
2. Quelle est la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V}_e$ de M? En déduire la vitesse $\overrightarrow{V}_{R_1}$ de M par rapport au repère R_1. Donner son module.
3. Calculer l'accélération $\overrightarrow{\gamma}_{R_2}$ de M par rapport au repère R_2; l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\gamma}_c$. En déduire l'accélération $\overrightarrow{\gamma}_{R_1}$ de M par rapport au repère R_1.
4. Tracer sur une figure les différents vecteurs vitesses et accélérations.

Exercice 3 : Un point matériel de masse m est lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V}_0$ faisant un angle θ avec l'horizontale. Il est soumis au champ de gravitation terrestre (voir figure 2).

I. Le tir a lieu dans le vide

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamentale de la dynamique. Calculer alors l'accélération $\overrightarrow{\gamma}(t)$.
2. Calculer la vitesse $\overrightarrow{V}(t)$, la position $\overrightarrow{OM}(t)$ et la distance OA.
3. Quelle est l'altitude maximale (z_{max}) atteinte par le projectile.
4. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique retrouvez la valeur de l'altitude maximale (z_{max}) atteinte par le projectile.

II . Le tir a lieu dans l'air

Le point matériel est soumis à un frottement visqueux du type :

$$\overrightarrow{f}_f = -k\overrightarrow{V}.$$

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.
2. En remplaçant $\overrightarrow{\gamma}$ par $\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$ montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} + \frac{k}{m}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{g}.$$

3. Vérifier que $\frac{m}{k}\overrightarrow{g}$ est solution particulière de l'équation complète.
4. Trouver la solution de cette équation différentielle. En déduire la vitesse $\overrightarrow{V}(t)$.
5. En déduire la position $\overrightarrow{OM}(t)$ et la distance OM maximale atteinte par le point matériel.

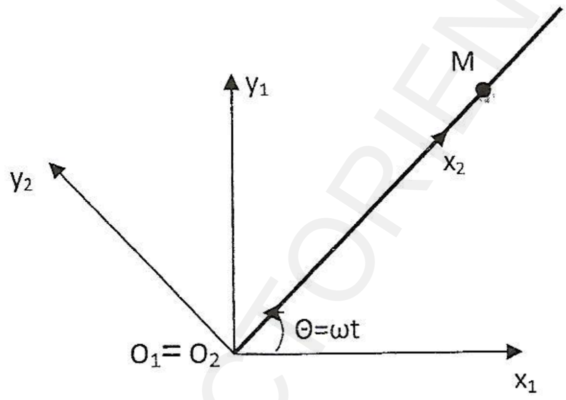


Figure 1

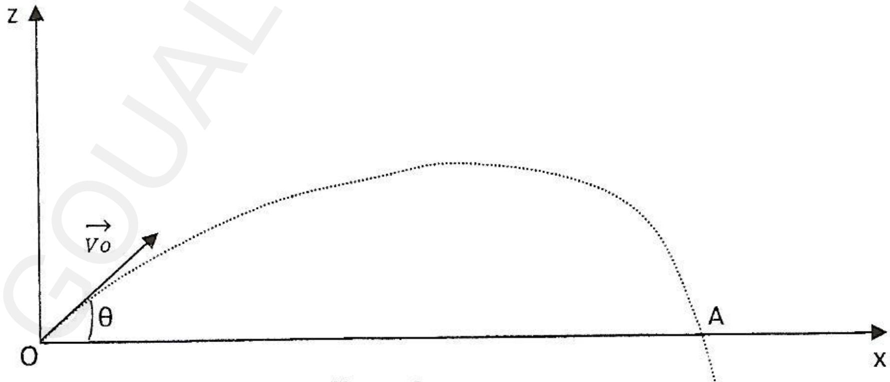


Figure 2

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 2013-2014

EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT
Deuxième Session

Mention : Tonc Commun
Niveau : Licence 1

Durée : 3 H

Exercice 1 : Soit la base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ associé au repère (O, x, y, z).
On considère une force F représentée par le vecteur $\vec{F}$ de norme $\|\vec{F}\| = F = 3\ N$.
1. Donner en utilisant le produit scalaire, les coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
2. On veut calculer le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$, par rapport au point O, de la force $\vec{F}$ appliquée en un point M, dont les coordonnées dans le repère (O, x, y, z) sont $(-1; 2; 1)$ (unité m).
Sachant que $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$, calculer les coordonnées de $\vec{M}_O(\vec{F})$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
3. En déduire l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$.
4. Vérifier que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$?

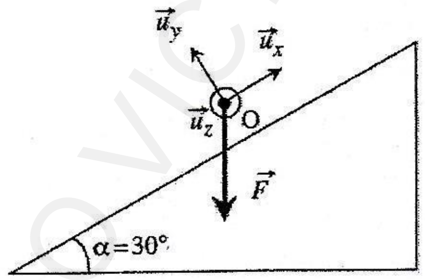


Figure 1

Exercice 2 : Soit un point matériel M qui se déplace dans un référentiel orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ suivant la loi :

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 4cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y(t) = 1 + 4sin(\frac{\pi}{2}t) \\ z(t) = t^2 - 4 \end{cases}$$

1.a. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}$.
b. En déduire son module v.
c. Trouver le vecteur tangent $\vec{T}$.
2. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}$.
3. Calculer la position du point matériel M et le rayon de courbure ρ de la trajectoire en M à l'instant $t = 2\ s$.

Exercice 3 : Une roue de rayon R roule sans glisser sur un support rectiligne. Un point I de la

Exercice 3 : Une roue de rayon R roule sans glisser sur un support rectiligne. Un point I de la périphérie de la roue décrit une courbe appelée cycloïde. Le point I venant en contact avec le support en un point O, on introduit un repère Oxy. Soit l'angle θ, défini par $\theta = \widehat{ICH}$.

1. Soit x l'abscisse du centre C de la roue lorsque le contact avec la piste se fait au point H. Le roulement (à vitesse angulaire ω constante) se fait sans glissement impose que la mesure de l'arc HI est la même que celle du segment OH. Donner une relation entre x, R et θ.
2. En projetant sur les axes l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI}$, écrire les coordonnées du point I en fonction de x et de R.
3. Déduire les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point I.
4. Que peut-on dire du vecteur vitesse lorsque I est en contact avec le support? Déterminer dans cette position le vecteur accélération.
5. La roue est une roue de voiture de rayon 28 cm, supposé bien gonflée pour qu'on puisse négliger la déformation du pneumatique au contact du sol. Calculer l'accélération de I lorsqu'il passe au contact avec le sol, sachant que l'automobile roule avec une vitesse de 120 km/h. Comparer avec l'accélération de la pesanteur g.

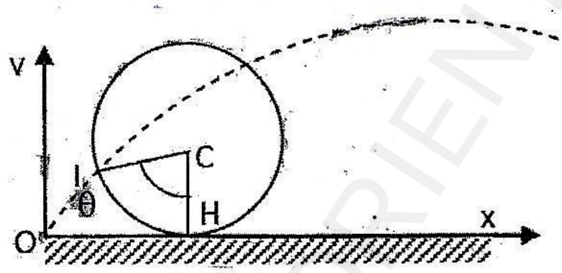


Figure 2

Université FHB
UFR- Mathématiques et Informatique
Licence 1
Année académique 2013 – 2014

EXAMEN d'Eléments de Logique : première session (2 Heures30)

Exercice 1 : (4 points) On considère les 4 ensembles suivants :

$$\mathbb{R}^4,\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$$

1. Donner 2 éléments de chaque ensemble.
2. Montrer $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

Exercice 2 (8 points) :

Soient E un ensemble non vide et une application $f : E \longrightarrow E$.

(1)

1. Montrer que la composée $f\circ f$ **est définie**. $f\circ f$ est notée f^2.
2. Montrer que **si** f^2 est injective, **alors** f est injective.
3. Montrer que **si** f^2 est surjective, **alors** f est surjective.

(2) On considère l'application

$$\varphi_f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)\ ;\ X \longmapsto f(X)$$

où $f(X)$ est l'image directe de X.

Montrer que si l'application f **est surjective**, alors φ_f **est surjective**.

Exercice 3 : (8 points) Sur $\mathbb{Z}$ on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie commme suit :

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{Z}$, on a :

$$a\mathcal{R}b \text{ si } b^2 - a^2 \in 5\mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ a **au plus** 5 classes d'équivalence.
3. Trouver les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
4. Déterminer les éléments de chacune de ces classes d'équivalence .

Université FHB
UFR Mathématiques et Informatique
Année académique 2013 – 2014
Licence 1

Examen de Logique
Deuxième session (2-heures)

Exercice 1 : (6 points)

Etant donnés deux entiers a et b, on considère les deux propositions suivantes :
P : a et b sont tous les deux divisible par 2.
Q : a et b sont de parités différentes.
S : a et b sont tous les deux impaires.
On note $\overline{P}$, $\overline{S}$ et $\overline{Q}$ respectivement les propositions *nonP*, *nonS* et *nonQ*.

Traduire chacune des implications suivantes et donner sa valeur de vérité :
$S \Longrightarrow \overline{P}$, $P \Longrightarrow Q$, $\overline{P}$ *et* $Q \Longrightarrow S$

Exercice 2 : (8 points).

Sur $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, on définit la relation binaire :

$$\forall (a,b) \in [\mathbb{N}^*]^2 ; \quad a\mathcal{R}b \text{ si } \; b \textbf{ divise } a.$$

1. A-t-on $42\mathcal{R}8$, $13\mathcal{R}1$, $6\mathcal{R}36$, $789235\mathcal{R}10$?

2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. $\mathcal{R}$ est-elle totale ?

3. Montrer que $\mathcal{R}$ est compatible avec la multiplication. En déduire que $6^{2014}\mathcal{R}9$.

4. La partie $\{8; 25\}$ est-elle **minorée** ? **majorée** ?

Exercice 3 : (6 points).

Soit f la relation de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par :
$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} ; (p,q) \longmapsto p + \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$

1. Montrer que f est une application.
2. Montrer que pour deux couples (p,q), (p',q') de $\mathbb{N}^2$, on a
   $p+q < p'+q' \Longrightarrow f(p,q) < f(p',q')$
3. En déduire que f est injective .
   Pour la suite on admettra que f est surjective.
4. Montrer que **toute bijection** de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ permet de construire une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.

ESATIC
Licence 1
Année académique 2013 – 2014

EXAMEN de LRM : première session (2 Heures)

Exercice 1 : (4 points) : On considère l'intervalle $I = [0, 1]$. Construire

1. une application de I dans I qui est ni injective ni surjective.
2. une application de I dans I qui est injective mais non surjective.
3. une application de I dans I qui est surjective mais non injective.
4. deux applications de I dans I qui sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 2 : (8 points) Soient A, E , F des ensembles non vides.

a)- Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, justifier celles qui sont fausses en proposant un contre-exemple.

1. Si $E \cup A = F \cup A$, alors $E = F$.
2. Si $E \setminus A = F \setminus A$, alors $E = F$.
3. Si $A \subset E \cup F$, alors $A \subset E$ ou $A \subset F$
4. Si $A \not\subset E \cup F$, alors $A \not\subset E$ ou $A \not\subset F$

b)- Ecrire les contraposées des implications ci-dessus.

Exercice 3 : (8 points) Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Sur $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$X\mathcal{R}Y \quad si \quad E \subset X \cup \overline{Y}$$

où $\overline{Y}$ désigne le complémentaire de Y dans E.

1. Ecrire en extension $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.
3. $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ?
4. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
5. Proposer **une suite croissante** non constante d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union- Discipline -Travail

UFR de MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Licence 1

Année: 2013-2014

EXAMEN SEMESTRE 1 SESSION 1 durée : 1 h30

INITIATION A L'INFORMATIQUE

Exercice 1 : culture informatique

1.1. Définir les trois grandes familles de logiciels et donner un exemple de chacune d'elle.
1.2. Citer les cinq blocs fonctionnels de 1'architecture de Von Neumann et donner leur rôle
1.3. Donner un code C des expressions ci-dessous :

Expressions	Signification	Expressions	Signification
pixel		dpi	
RAM		USB	
AMD E-450 1.65 GHz		Blog	

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1. 19"= (?) cm; 2560 Go= (?)To
2.2. Réaliser les conversions suivantes : $(54,75)_{10}=(?)_2$; $(42,4)_8=(?)_{10}$; $(1101010)_2=(?)_{16}$; $(1101011)_2=(?)_8$;$(1C5)_{16}=(?)_2$; $(101,01)_2=(?)_{10}$; $(101)_2=(?)_{8421}$; $1AC_{16}=(?)_{10}$; $243_8=(?)_{10}$
2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1A /C)_{16}$,. $(2BC+DAE)_{16}$, $(IBCxAl)_{16}$, $(1011/101)_2$ à 2 chiffres près ; $(1011x l01)_2$; $(1101-111)_2$;$(1101+1001)_2$

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne $A=49_{10}$, $B=32_{10}$, $C = 53,75_{10}$
3.1. Effectuer A- B en complément a 10 et A- C en complément a 9
3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint
3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB
Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.
3.4. Convertir A et B en binaire
3.5. Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément a un, puis selon le mode complément a deux.
3.6. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément a un puis dans le codage complément a deux.

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union- Discipline -Travail

UFR de MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Licence 1

Année: 2013-2014

EXAMEN SEMESTRE 1 SESSION 2 durée : 1 h30

INITIATION A L'INFORMATIQUE

Exercice 1 : culture informatique

1.1. Définir les trois grandes familles de logiciels et donner un exemple de chacune d'elle.
1.2. Citer les cinq blocs fonctionnels de 1'architecture de Von Neumann et donner leur rôle
1.3. Donner un code C des expressions ci-dessous :

Expressions	Signification	Expressions	Signification
pixel		dpi	
RAM		USB	
AMD E-450 1.65 GHz		Blog	

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1. 19"= (?) cm; 2560 Go= (?)To
2.2. Réaliser les conversions suivantes : $(54,75)_{10}=(?)_2$; $(42,4)_8=(?)_{10}$; $(1101010)_2=(?)_{16}$; $(1101011)_2=(?)_8$;$(1C5)_{16}=(?)_2$; $(101,01)_2=(?)_{10}$; $(101)_2=(?)_{8421}$; $1AC_{16}=(?)_{10}$; $243_8=(?)_{10}$
2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1A/C)_{16}$,. $(2BC+DAE)_{16}$, $(IBCxAl)_{16}$, $(1011/101)_2$ à 2 chiffres près ; $(1011xl01)_2$; $(1101-111)_2$;$(1101+1001)_2$

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne $A=49_{10}$, $B=32_{10}$, $C = 53,75_{10}$
3.1. Effectuer A- B en complément a 10 et A- C en complément a 9
3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint
3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB
Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.
3.4. Convertir A et B en binaire
3.5. Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément a un, puis selon le mode complément a deux.
3.6. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément a un puis dans le codage complément a deux.

Prof. FOADE Denis Joel Tongnivi, UFR-SEG/CIRES, Université Félix Houphouet Boigny (FHB), cel +22501008845/ denis_foade@hotmail.com

Université Félix Houphouet Boigny (UFHB) de Cocody

Domaine : Mathématique-Informatique

Mention : Mathématique-Informatique

Spécialité : Economie

Grade : Licence 1 (L1)

UE : Economie-Anglais

Examen de la 1ère Session du 1er Semestre 2014 **Durée : 2 heures**

I - QUESTIONS DE COURS (7 points)

1.1) Quelles sont les assertions correctes ?

a) Les coûts fixes moyens n'augmentent jamais avec l'output ;

b) les coûts moyens totaux sont toujours supérieurs ou égaux aux coûts variables moyens

c) le coût marginal ne peut jamais augmenter quant le coût moyen est décroissant.

Justifier vos réponses en utilisant la fonction de coût suivante : $CT= 0{,}05Q^2+ 10$ pour les assertions a),b) et un graphique pour c)

1.2) **Représenter graphiquement dans un espace à deux facteurs de production K(capital) et L (main-d'œuvre) les isoquants correspondant aux élasticités de substitution suivantes :**

$\sigma =0$ $\sigma =1$ $\sigma = \infty$

Indiquer la nature de la relation entre les deux facteurs de production dans chaque cas.

1.3) Définir littérairement les notions suivantes :

- une élasticité prix croisée ;

- un bien de luxe.

- des rendements d'échelle décroissants.

2 - EXERCICES

2.1 -Exercice 1 *(4 points)*

Maria peut lire 20 pages d'économie en 1 heure. Dans le même temps, elle peut aussi lire 50 pages de sociologie. Elle étudie 5 heures par jour :

a) Faites le tableau des possibilités de production pour l'économie et la sociologie.

b) Dessinez la frontière des possibilités de production pour l'économie et la sociologie

c) Définir le coût d'opportunité d'un bien. Quel est le coût d'opportunité de 100 pages de sociologie ?

d) la loi des rendements décroissants est-elle vérifiée ? Justifier

2.2 -Exercice 2 (9 points)

Une firme a la fonction de production suivante :

$Q = 6T^{1/3}L^{2/3}$ où L représente le nombre de travailleurs et T la surface cultivée en hectares. Nous noterons P_L le prix du travail, P_T le prix de la terre et C le coût de production pour la firme. Nous supposerons que : $P_L=12$, $P_T = 6$ *et* $C = 900$

1) Donnez l'équation de coût de ce producteur.

2) Déterminez l'équation du sentier d'expansion et donnez sa définition.

3) Quelle est la fonction de coût total, la fonction de coût marginal et la fonction de coût moyen de cette firme lorsque l'on se trouve en courte période et que le facteur terre est fixe : $T = 4$? Définissez les notions de coût marginal et de coût moyen.

4) Supposons que nous soyons maintenant en longue période.

a) Expliquez ce que cette notion de longue période signifie.

b) Quelles seront les quantités de facteurs utilisées à l'optimum pour ce producteur ?

c) Quel sera alors son niveau de production ?

5) Si ce producteur souhaite tripler sa production, de combien doit-il augmenter ses facteurs de production ? S'agit-il ici de rendement d'échelle ou de rendement de facteurs ? Expliquez.

Prof. FOADE Denis Joel Tongnivi, UFR-SEG/CIRES, Université Félix Houphouet Boigny (FHB), cel +22501008845/ denis_foade@hotmail.com

---

Université Félix Houphouet Boigny (UFHB) de Cocody

Domaine : Mathématique-Informatique

Mention : Mathématique-Informatique

Spécialité : Economie

Grade : Licence 1 (L1)

UE : Economie-Anglais

Examen de la 2ème Session du 1er Semestre 2014 **Durée : 2 heures**

I - QUESTIONS DE COURS (5 points)

Définir les notions suivantes : un bien normal, un bien de luxe, une fonction de coût total, une courbe d'Engel

II - EXERCICES

Exercice 1 *(6 points)*

Un consommateur possède la fonction d'utilité suivante : $U(x, y) = 4 + yx^2$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y. Initialement, le prix du bien x est de p francs et le prix du bien Y est de 4 francs. De plus nous savons qu'il dispose d'un revenu de 24 francs.

1. Etablir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0.

Par la méthode du lagrangien, déterminer :

2. le lagrangien et les conditions de 1er ordre,

3. l'équation du chemin d'expansion du revenu,

4. les coordonnées des points optimaux.

5. Lorsque p = 2 francs, calculer l'utilité totale associée au point optimal (noté A); puis en déduire l'équation de la courbe d'indifférence associée (notée U_1)

6. Calculer à l'aide de deux méthodes le TMS en A. Raisonnant à partir de l'optimum, s'il souhaitait réduire sa consommation de biens X de 0,5 unité, de combien devrait-il faire varier sa consommation de bien Y pour maintenir le même niveau d'utilité ?

Exercice 2 (9 points)

Une firme a la fonction de production suivante :

$Q = 6T^{1/3}L^{2/3}$ où L représente le nombre de travailleurs et T la surface cultivée en hectares. Nous noterons P_L le prix du travail, P_T le prix de la terre et C le coût de production pour la firme. Nous supposerons que : $P_L=12$, $P_T = 6$ *et* $C = 900$

1) Donnez l'équation de coût de ce producteur.

2) Déterminez l'équation du sentier d'expansion et donnez sa définition.

3) Quelle est la fonction de coût total, la fonction de coût marginal et la fonction de coût moyen de cette firme lorsque l'on se trouve en courte période et que le facteur terre est fixe : $T = 4$? Définissez les notions de coût marginal et de coût moyen.

4) Supposons que nous soyons maintenant en longue période.

a) Expliquez ce que cette notion de longue période signifie.

b) Quelles seront les quantités de facteurs utilisées à l'optimum pour ce producteur ?

c) Quel sera alors son niveau de production ?

5) Si ce producteur souhaite tripler sa production, de combien doit-il augmenter ses facteurs de production ? S'agit-il ici de rendement d'échelle ou de rendement de facteurs ? Expliquez.

	2013/2014
UFRMI	**L 1** **Outils bureautiques** **Examen - Session 1 - 1H00**

Q1- quelle est la composition de l 'architecture d'un ordinateur selon VON NEUMAN ?

a) UCC, UAL, E/S, ROM , RAM, BUS
b) UC, ECRAN, CABLE, SOURIS
c) UCC, USB, BUS, RAM

Q2 - Les équipements informatiques pouvant être utilises par les employés d'une entreprise sont:

a) L'internet
b) Le Smartphone
c) La console HIFI
d) Le GPS

Q3- Une alternative à Microsoft office peut être :

a) Excel
b) Acrobat Reader
c) Libre Office
d) Open office

Q4- Quelle est l 'unité utilisée pour la mesure de la taille d'un écran.

a) Le pied
b) Le noeud
c) Le pouce
d) Le coude

Q5 - Identifier dans la liste les technologies filaires

a) FIREWIRE
b) BLUETOOTH
c) WIRELESS
d) USB (UNIVERSAL SERIAL BUS)

Q6 Quelles sont les caractéristiques du système d'exploitation Linux :

a) Libre , mono tache
b) Proprietaire, multitache, multi utilisateurs
c) Libre, multitache, multi utilisateur, graphique
d) Mono tache, interface caractere

Q7 Un logiciel de sauvegarde et de restauration est :

a) Un système d'exploitation
b) Un utilitaire
c) Outil bureautique

Q8 Quelle est la structuration d'une adresse mail ?

a) Lle serveur de messagerie
b) Login, @,yahoo.ci
c) Login@serveur de messagerie
d) www.nomde domaine

Q9 Quelle est le resultat d'execution du programme ci-dessus

```
Program civilite;
Uses crt;
Var
    Nom: string [20] ;
    etat,sexe : char;
Begin
    Clrscr;
    Writeln('saisir NOM:');
    readln(nom);
    Writeln('masculin(M),feminin(F):');
    Readln(sexe);
    Writeln ('Saisir situation matrimoniale :');
    Writeln('Marie(M),Divorce(D),Celibataire,veuf,(V):') ;
    Readln(etat);
    If (sexe='M')then writeln('bonjour monsieur',nom)
    Else
        if (etat='C')then writeln('bonjour mademoiselle',nom)
        Else writeln ('bonjour Madame', nom);
    Readln;
End.
```

Pour nom='TANOH' sexe=' M' et etat ='C

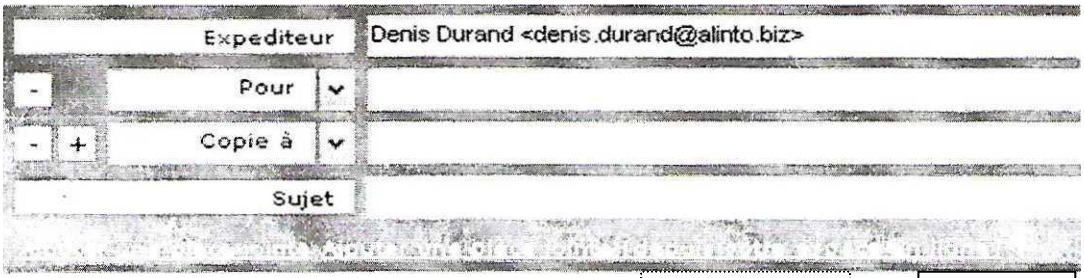
a) BONJOURMTANO
b) BONJOUR monsieur TANOH
c) BONJOUR MLLETANO
d) BONJOUR MADEMOISELLE TANOH

EX01 M Durand veut envoyer un sujet d'examen au secrétaire principal dont l 'adresse mail est kofisp1@gmail.com. Le chemin du fichier est: c:\docsexam\exafran2013.doc

Le texte du message est:

Bjr M le SP;
vous trouverez ci-joint le sujet d'examen de français.
Le mot de passe du fichier est 'miclc31'
cordialement

Reproduire et remplir l 'écran d'envoi du message.



Charger un fichier: |Parcourir...| en tard que lien charger

EX02

A1	**Distance parcourrue(km)**	**BMW 525i essence**	**BMW 525 Tdiesel**	**Ecart**
Consommation au 100km (1)		**16**	**10**	
prix du litre		**774**	**624**	
Consommation				
jour	**45**	5 399	2 808	2 591
semaine	315	37 791	14 040	23 751
mois	1 260	151 162	56 160	95 002
année	15 120	1 813 946	673 920	1140 026
3ans	45 360	5 441 839	2 021 760	3 420 079

Le tableau ci-dessus montre la comparaison faite par un couple avant de se decider pour véhicule diesel plus cher et un autre à essence. Les données initiales sont gras .Donner les formules de remplissage du tableau.

	2013/2014
	UFR MI. L 1 Examen - Session **2 - 1H**

Q1- quelle est la composition de l'architecture d'un ordinateur selon VON NEUMAN ?

c) UCC, UAL, E/S, ROM, RAM, BUS
d) UC, ECRAN, CABLE, SOURIS
e) UCC, USB, BUS, RAM

Q2-Les équipements informatiques pouvant être utilisés par les employés d'une entreprise sont :

a) L'internet
b) Le clavier
c) Le microphone
d) Antenne tv

Q3- Les principaux fabricants de processeurs équipant les PC sont:

a) MICROSOFT, ORACLE, SAMSUNG
b) INTEL, MOTOROLA, LINUX
c) INTEL, AMD, MOTOROLA
d) APPLE, HP, SAMSUNG,SONY

Q4- Classer les Technologies d'écran par ordre d'apparition sur le marché.

a) LED, LCD, CATHODIQUE
b) CATHODIQUE, LED, LCD
c) CATHODIQUE,LCD, LED
d) CATHODIQUE, VGA,HDMI

Q5 - Identifier dans la liste les technologies filaires

a) FIREWIRE
b) BLUETOOTH
c) WIRELESS
d) USB (UNIVERSAL SERIAL BUS)

Q6 Dans les caractéristiques des imprimantes I' unité ppm signifie :

a) POINT PAR PAGE
b) POINT PAR MILLIMETRE
c) PAGE PAR MINUTE
d) PAGE PAR MOIS

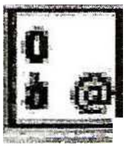
Q7 Easy recovery ,winzip ,Cd XP burner sont des :

a) SYSTEMES D'EXPLOITATION MONO TACHES
b) SYSTEMES D'EXPLOITATION MULTITACHES
c) DES UTILITAIRES
d) DES LOGICIELS D'APPLICATION

Q8 Pour protéger un réseau d’entreprise des intrusions, on utilise :

a) UN MODEM ADSL ROUTEUR
b) UN BOUCLIER
c) UN ANTIVIRUS CLASSIQUE
d) UN PARFEU
e) UN POINT D’ACCES SANS FIL SECURISE PAR UN MOT DE PASS

Q9 Quel est le nom du client de messagerie intégrer à office 2010 ?

Q10 Alt GR+ 

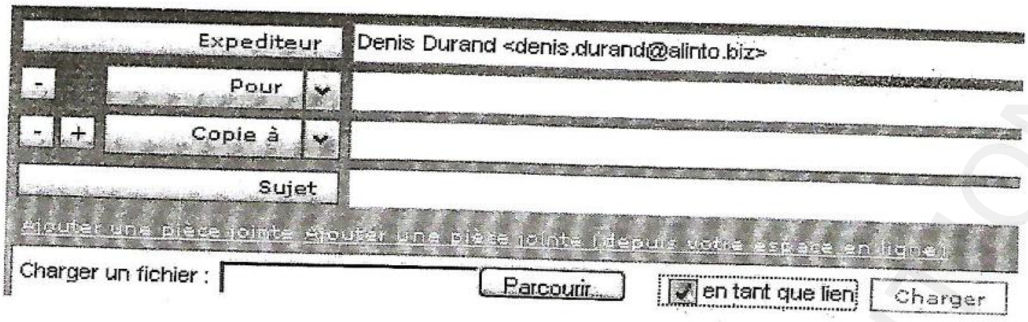
donne à l ‘écran

a) A
b) 0
c) @
d) a

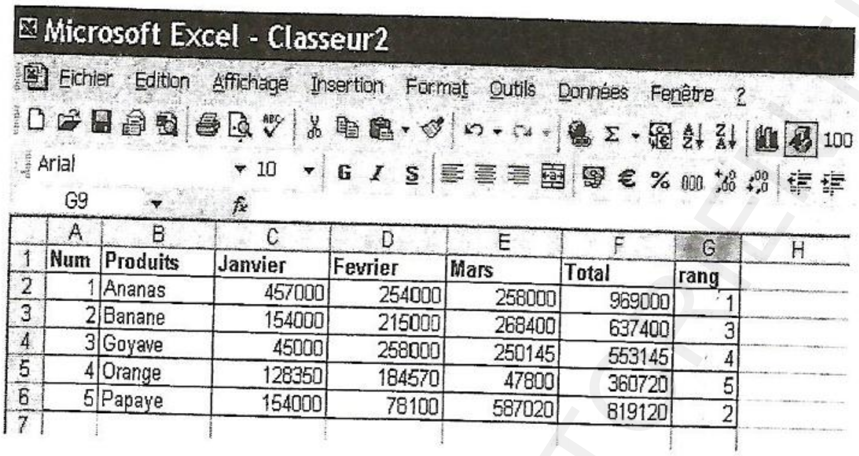
Q 11 quelle est le format du texte suivant:
<u>L'informatique est une unité d'enseignement</u>
a) NORMAL SOULIGNE
b) ITALIQUE SURLIGNE
c) ITALIQUE SOULIGNE
d) ITALIQUE BARRE

Q12 Quelle différence faites vous entre google.ci, google.fr et google.com
a) LE SERVEUR DE MESSAGERIE
b) L'ADRESSE MAIL
c) LA LANGUE DU SITE
d) LE PAYS D'HEBERGEMENTDU NOM

EX01 M Durand veut envoyer un sujet d'examen au secrétaire principale dont l ‘adresse mail est kofisp1@ gmail.com. Le chemin du fichier est: c:\docs\exafran2013.doc
Le texte du message est:
Bjr M le SP;
vous trouverez ci-joint le sujet d'examen de français.
Le mot de passe du fichier est 'miclc31'
cordialement



EX02



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Num	Produits	Janvier	Fevrier	Mars	Total	rang	
2	1	Ananas	457000	254000	258000	969000	1	
3	2	Banane	154000	215000	268400	637400	3	
4	3	Goyave	45000	258000	250145	553145	4	
5	4	Orange	128350	184570	47800	360720	5	
6	5	Papaye	154000	78100	587020	819120	2	
7								

Le tableau ci-dessus montre les ventes d'une PME de vente de fruits et légumes pour le $1^{\text{èr}}$ trimestre 2013.

Trouver les formules de calcul :

- des totaux des ventes ;
- du chiffre d'affaire trimestriel ;

EPREUVE DE TECHNIQUE D'EXPRESSION L1

Exercice1 : Mettez ces phrases suivantes à la forme négative

1- Il est propriétaire de la maison.
2- Je lui ai écrit.
3- Ouvre la porte.
4- Le train est arrivé à l'heure.
5- Ces pagnes se vendent cher.

Exercice 2 : Transformez ces phrases à la forme passive

1- Les hommes du village ont défriché un grand terrain.
2- Les spectacles comiques attirent la foule.
3- Des poissons de toutes sortes remplissaient le filet du pêcheur.
4- Un tronc d'arbre barrait la route.
5- Les criquets ont détruit la récolte.

Exercice 3 : Ces phrases sont à la forme pemphatique. Dites, pour chacune d'elles,
a- Quel(s) élément(s) est (sont) mis en relief ?
b- Quel est le procédé emphatique utlisé ?

1- C'était ma place qu'il voulait.
2- Lui, il n'est jamais en retard.
3- Du toit endommagé, tombaient des gouttes de pluie.
4- De tous ses enfants, Marie est la plus dévouée.
5- Cet exercice, je ne sais pas le faire.

Exercice 4 : Classez ces phrases selon leur registre

1- Est-ce que quelqu'un est venu pendant mon absence ?
2- Vous comprenez le français ?
3- Il ne s'absente jamais.
4- Cet appareil est-il récent ?
5- Il a voyagé hier.
6- Elle fait à manger.
7- Sortez d'ici !
8- Le délire sembla s'emparer de tout le terrain.
9- Un gros camion chargé de manœuvres bavards stoppa de l'autre côté de la rue.
10- Un homme en descendit puis traversa la chaussée.

UFR/MI **Mr. Kanga**

LICENCE 1/014

ENGLISH EXAMINATION

2nd SESSION/ 2 HOURS

***TaskI**: Your friend and you are talking about the Head of State. Imagine what the President does daily. Write two sentences about him.*

a) ……………………………………………………………………………

b) ....

***Task II**: The tenses in the sentences below are not correct Write the correct version of the sentences.*

a) The teacher have given a difficult exam

b) All the students studying at the university now

c) My father has been in Morocco in 2011

d) Your junior brother has took my shoes yesterday

***Task III**: Build correct sentences following the instructions*

a) We completed the programme in May (negative form)

b) He brought you my homework two days ago (Interrogative form)

c) People are expecting big changes in their environment (Interrogative form)

d) His father and his uncle works for us (negative)

***Task IV*: Complete the sentences with your own ideas**

a) in **2009,**……………………………………………………………

b) If I lived in Europe in 1939 I .... ……………………………….

c) usually, at breakfast he.......................... ……………………………….

d) Wow! It is beautiful, it is my first time.

***Task V*: Write the verbs between brackets in the correct forms.**

a) Look, Jack and his wife (go)... .... ….. ....to market again.

b) Yes, I watched the film yesterday but it was not the first time,
I (watch)... ....' the week Before.

***Task VI*: Translate the following sentences in English**

a) J'ai pris ce bus hier à 18 heures,

b) !I regardait son film quand je suis arrive

c) Achètes-tu tes cahiers à la boutique ?

d) Il ne comprend pas le mot que vous avez ajouté mardi dernier.

UNIVERSITE **FHB** Année

U.F.R.Maths-Info 2013-2014

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

1ère Session

Durée : 1 H 00

EXERCICE (20 points)

Pour $\forall m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices :

$$A_m = \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{bmatrix} \text{ ; on note } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.Déterminer la matrice transposée de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Que peut-on dire de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.

2. On pose $f(m) = \det A_m$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

(i) Donner l'expression de $f(m)$ en fonction de m.

(ii) Vérifier que $f(1) = 0$ et en déduire l'ensemble B des valeurs de m réelle pour lesquelles la matrice A_m est inversible.

3. On pose que $m = 0$. La matrice A_m est alors notée A_0.

(a) Montrer que $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0$.

(b) En déduire que la matrice A_0 est inversible et donner sa matrice inverse A_0^{-1} en fonction de A_0 et de I_3.

4. Soit (S) le système suivant :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}.$$

Résoudre le système (S).

UNIVERSITE **FHB** | Année

U.F.R.Maths-Info | 2013-2014

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

2^{nde} Session

Durée : 1 H 30

Exercice 1(11 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(S_a) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y & = 2 \\ 2x - 3y + az & = 3 \\ (a+1)\,y - 2z & = a - 3 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice augmentée de ce système, notée M_a.

2. En réduisant la matrice M_a sous une forme échelonnée,
déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système :

(i) admet une infinité de solutions;

(ii) admet une unique solution;

(iii) n'admet aucune solution.

3. Résoudre le système (S_a) dans les cas (i) et (ii).

Exercice 2(09 points)

On considère la matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice D.

2. En déduire le déterminant de chacune des matrices suivantes à partir de D,
sans calcul et justifier.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -89 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -6 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Université Félix Houphouet Boigny - Abidjan
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire 2013-2014

Mention Mathématiques - Niveau L1
UE : Eléments d'Algèbre linéaire
Session du 11 Août 2014.

ECUE : ESPACES VECTORIELS (2H00)

Exercice 1. *Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est*

$$M = Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Donner la matrice de f dans la base $B_1 = (e_3, e_2, e_1)$.*

(b) *Montrer que $B_2 = (e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$ est une base de E.*

(c) *Donner la matrice de f dans la base B_2.*

Exercice 2. *1. E étant un ensemble non vide et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, donnez la definition de : E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

2. Soient E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites à termes complexes, a et b des nombres complexes. On désigne par F l'ensemble des suites (u_n) de E telles que : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

(a) *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.*

(b) *Soit r un nombre complexe. Montrer que la suite (r^n) appartient à F si et seulement si $r^2 = ar + b$.*

3. Pour la suite, on prend $a = 2$ et $b = -5$.

(c) *Trouver deux nombres complexes α et β tels que les suites (α^n) et (β^n) appartiennent à F.*

(d) *Soient (u_n) et (v_n) des suites appartenent à F telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Montrer que l'on a $u_n = v_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*

(e) *Soit (u_n) une suite appartenant à F. Montrer qu'il existe des nombres complexes λ et μ uniques tels que $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(f) *Quelle est la dimension de F?*

(f) *Calculer explicitement le terme général de la suite (u_n) qui est telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = i$.*

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2013 – 2014

LICENCE 1
Mentions : Tronc Commun
ECUE : Espaces vectoriels
Examen du 11 octobre 2014 - Durée : 02 heures

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1. *On considère les parties F et G du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$:*

$$\begin{cases} F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y - 2t = 0 \text{ et } \ x + t = 0\} \\ G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - z - t = 0 \text{ et } \ y + z = 0\}. \end{cases}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Trouver une base de $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est tel que :*

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -2e_1 - 2e_3 \\ f(e_3) = -4e_1 - e_2 - 4e_3. \end{cases}$$

On désigne par A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

(i) *Ecrire la matrice A.*

(ii) *Donner une base et une équation de l'image $Im(f)$ de f.*

(iii) *Pour quelles valeurs du nombre réel λ l'application linéaire $f_\lambda = f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ est-elle un isomorphisme ?*

(iv) *Trouver une base $\mathcal{B}_1 = \{v_1\}$ de $Ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$ et une base $\mathcal{B}_2 = \{v_2\}$ de $Ker(f)$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.*

(v) *Trouver un vecteur $v_3 \in \mathbb{R}^3$ qui soit tel que $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{E}$.*

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFR : M.I
2013 – 2014

EXAMEN: Analyse Réelle

LICENCE I
$1^{ère}$ Session:
Durée:3 heures

EXERCICE 1 (5 points)
1) Montrer que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

2) Calculer en utilisant 1), les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx$

EXERCICE 2 (4points)
Déterminer les limites suivantes:

a) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$

EXERCICE 3 (6 points)
Intégrer les équations différentielles suivantes:

1) $y' = \dfrac{x-1}{2x^2}y^2 + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{x-1}{2}$

2) $(x^2+1)y' - 2y = -2\sqrt{y}$.

3) $y'' + y = e^x(3\cos x - \sin x)$.

EXERCICE 4 (5 points)
Calculer les limites suivantes:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - (e^x-1)^2}{\sin^3 x}$ b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x(\frac{2}{\pi}\arctan x - 1)$.

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFR : M.I
2013 – 2014

EXAMEN: Analyse Réelle

LICENCE I
$2^{ème}$ Session:
Durée:3 heures

EXERCICE 1
Déterminer les primitives des fonctions suivantes:
$\int \frac{1}{1+e^x}dx; \qquad \int \frac{\cos^5 x}{\cos(2x)+5}dx$

EXERCICE 2
Calculer les intégrales suivantes:
$A = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}dx; \qquad B = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx; \qquad C = \int_0^{-1} \frac{-1}{2^{-x}}dx$

EXERCICE 3
Calculer la limite de la suite de terme général
$U_n = \frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{1/n}$

EXERCICE 4
Resoudre les équations différentielles suivantes:

1) $2y' + y^2 = \frac{-1}{x^2}$. (Montrer que $y = \frac{1}{x}$ est une solution particulière)

2) $y'' + 3y' + 2y = 2xe^{-3x} + 3\sin 5x$

EXERCICE 5
Déterminer en utilisant les developpements limités, les limites suivantes:
1) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$; $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x}$

UNIVERSITE
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
DE COCODY

Année 2013 -2014

UFRMI

Epreuve d'algorithme
En Pascal (L1)

Exercice 1 : Interpréter ces différents algorithmes et faire des tableaux des résultats: (c'est-a-dire le tableau des valeurs successives des variables et expressions) et en déduire ce qui est affiché à I' écran.

1.a)

```
var i: integer;
begin
    i := 1;
    while i < 10 do
i := 11 - 2*i;
writeln (i);
end.
```

1.b)

```
  const r = 'mercredi';
var i : integer;
m, e : char;
begin
m := r[1 ];
e := r[2];
for i := 2 to 7 do
if m <= r[i] then
begin
e := m;
m := r[i];
        end;
           writeln (e = m);
end.
```

Exercice 2 : Ecrire un algorithme qui demande un nombre à I' utilisateur, puis qui calcule et affiche le carre de ce nombre.

Exercice 3 : Ecrire un algorithme qui lit le prix HT d'un article, le nombre d'articles et le taux de TVA, et qui calcule le prix total TTC correspondant. Faire en sorte que des libelles apparaissent clairement.

Exercice 4: Ecrire un algorithme qui demande deux nombres à I' utilisateur et I' informe ensuite si leur produit est négatif ou positif (on laisse de cote le cas où le produit est nul). Attention toutefois : on ne doit pas calculer le produit des deux nombres.

Exercice 5 : Ecrire un algorithme qui demande I 'âge d'un enfant à I'utilisateur. Ensuite, I'informe de sa categorie :

* "Poussin" de 6 a 7 ans
* "Gargonnet" de 8 a 9 ans
* "Minime" de 10 a 11 ans
* "Cadet" apres 12 ans

Exercice 6 : Ecrire un algorithme qui demande un nombre compris entre 10 et 20, jusqu'a ce que la réponse convienne. En cas de réponse supérieure à 20, on fera apparaitre un message : Plus grand ! , et inversement Plus petit!, si le nombre est inferieur a 10.

MINISTERE DE LA POSTE, DES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union Discipline Travail

ESATIC

DIRECTION DE LA PEDAGOGIE

EXAMEN DE LA PREMIERE SESSION DU SEMESTRE 1 DE LA LICENCE1(SRIT1)
ECUE: INTRODUCTION A L'ALGORITHMIQUE (2HEURES)

Exercice 1 : (3 points)

Ecrivez un algorithme permettant à l'utilisateur de saisir un nombre quelconque de valeurs, qui devront être stockées dans un tableau. L'utilisateur doit donc commencer par entrer le nombre de valeurs qu'il compte saisir. Il effectuera ensuite cette saisie. Enfin, une fois la saisie terminée, le programme affichera le nombre de valeurs négatives et le nombre de valeurs positives.

Exercice 2 : (3 points)
Écrivez un algorithme constituant un tableau, à partir de deux tableaux de même longueur préalablement saisis. Le nouveau tableau sera la somme des éléments des deux tableaux de départ.

Tableau 1 :

4	8	7	9	1	5	4	6

Tableau 2 :

7	6	5	2	1	3	7	4

Tableau à constituer :

11	14	12	11	2	8	11	10

Exercice 3 :(5points)
Ecrivez un algorithme permettant, à l'utilisateur de saisir les notes d'une classe. L'utilisateur doit donc commencer par entrer le nombre de notes qu'il compte saisir, Il effectuera ensuite cette saisie. Enfin, le programme une fois la saisie terminée, affiche le nombre de ces notes supérieures à la moyenne **de la classe.**

Exercice 4 :(3 points)

TRI RAPIDE :

```
PERMUTER (A, i, j)
Var temp : entier
Debut
        temp ← A[i]
        A[i]← A[j]
        A[j]← temp
Fin

PARTITION (A, p, r)
Debut
        x← A[r]
        i ← p-1
        Pour j← p à r-1 faire
                Si A[j] < = x alors
                        i ← i+1
                        PERMUTER (A, i, j)
                Finsi
        Finpour
        PERMUTER(A, i+1,r)
        Retourner i+1
Fin

TRI-RAPIDE(A,p,r)
Debut
        Si p < r alors
                q← PARTITION(A, p, r)
                TRI-RAPIDE(A, p, q-1)
                TRI-RAPIDE(A, q+1, r)
        Finsi
Fin
```

Soit l'algorithme de tri ci-dessus.

1/ Expliquez ce que fait cet algorithme.

2/ Faire un exemple d'application sur la suite d'entiers <15, 10, 4, 34, 1, 19> .

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFRMI

Année 2013 - 2014

Epreuve de programmation
En Pascal (L1)

Exercice 1 : Ecrire un programme calculant la somme des nombres de 1 à 100 en utilisant l'incrémentation, puis tant que avec répéter.

Exercice 2 : Soit l'algorithme suivant :

```
0) Début Exercice
1) [Lire (n)]
        Pour k de 1 à n répéter
        Lire (T[k])
        FinPour
            2) Lire (v)
             3) [trv← faux, i← 0] répéter
               i ← i + 1
               trv ← (T[i] = v)
               jusqu'à (i = n) ou (trv)
          4) Si (trv) Alors
             rt ← " est dans T "
             Sinon rt← " n'est pas dans T "
             FinSi
            5) Ecrire (v, rt)
   6) Fin Exercice
```

Questions :
1. Traduire cet algorithme en Pascal.
2. Que fait cet algorithme ? (Ecrire la réponse comme commentaire à la fin du programme).

Exercice 3 : Un étudiant passe trois examens. Il est déclaré admis si : soit, il a au moins 9 points à chaque examen.- soit, la moyenne des trois examens est au moins égale à 10 points et la plus basse note est au moins égale 8 points.
S'il n'est pas admis alors il est refusé. Ecrire le programme correspondant.

Exercices 4 : Ecrire un programme en Pascal qui permet de calculer et d'afficher la distance entre deux points dont les coordonnées sont données. Soit les points M (a, b) et N (c, d) ; la distance entre eux est donnée par la formule suivante :

$$\boldsymbol{d(M,N)} = \sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})^2}$$

UNIVERSITE
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
DE COCODY
UFRMI

Année 2013 - 2014

Deuxième session

Epreuve d'algorithme
(LI)

Exercice 1 : Qu'est qu'un algorithme ?

Exercice 2 : Ecrire un algorithme qui calcule le produit scalaire de deux vecteurs réels *u* et v donnés de dimension n.

Exercice 3 : Sans utiliser la fonction abs(x), écrire un algorithme qui affiche la valeur absolue d'un réel donne.

Exercice 4 : Ecrire 1'algorithme d'une fonction facto(n) qui renvoie n!.

Epreuve de Programmatiora en Pascal

Exercice I :Existe-t-elle une différence entre l'algorithme et le programme ?

Exercice 2 : Traduire en langage Pascal 1'algorithme qui calcule le produit scalaire de deux vecteurs réels de dimension n.

Exercice 3 : Ecrire le programme en Pascal de l'algorithme de l'exercice 3 plus haut.

Exercice 4 : Soient deux nombres entiers positifs a et b donnés. Ecrire P algorithme et le programme en langage Pascal correspondant et permettant de trouver leur PGCD.

UFHB-UFRMI: Licence 1
UE: Probabilités-Statistique

Année Académique
2013/2014

Statistique - Semestre 2
Examen 1ère session
Durée : 1 h 40

Exercice 1 (12 pts)

Une enquête réalisée auprès d'un certains nombre d'employés d'une entreprise pour étudier la distribution du salaire mensuel (en centaines d'euro) a donné les résultats indiqués dans le tableau suivant.

Salaires	[a;10[	[10;14[	[14;16[	[16;20[	[20;24[	[24;40[
Fréquence cumulée	0,08	0,18	0.34	0,64	0,73	1

(1) Déterminer la population et la variable statistique étudiées. Quelle est la nature de cette variable ?

(2) Calculer la borne manquante a sachant que l'étendue des salaires est égale à 3200 euros

(3) Déterminer le salaire le plus observé, le salaire moyen et médian, puis calculer la dispersion des salaires autour du salaire moyen. Que pouvez-vous conclure de la comparaison des trois premières valeurs.

(4) Quelle est la proportion des employés qui ont un salaire inférieur ou égale au salaire le plus observé? au salaire moyen? En déduire la proportion des employés qui ont un salaire compris entre le salaire le plus observé et le salaire moyen.

(5) Calculer et interpréter le premier et le troisième quartiles de cette distribution.

(6) Tracer l'histogramme de la distribution des salaires.

Exercice 2 (8 pts)

Le tableau suivant donne la distance D de freinage d'un véhicule roulant sur route sèche en fonction de sa vitesse V.

Vitesse (V) en km/h	40	50	60	70	80	90	110	120
Distance (D) en m	6	12	18	24	32	40	52	60

(1) Représenter cette série statistique par un nuage de points (D en fonction de V). Commenter

(2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Commenter.

(3) Déterminer la droite de regression de la distance de freinage en fonction de la vitesse.

(4) Quelle distance de freinage ce modèle linéaire prédit-il pour un véhicule roulant à $110km/h$ sur une route sèche? En comparant avec la valeur observée, calculer le résidu ε en ce point.

(5) Estimer, à l'aide de ce modèle linéaire, la distance de freinage d'un véhicule roulant à $130km/h$ sur une route sèche?

IUA - Licence 1 : MI - EQ
UE: Probabilités-Statistique

Année Académique
2013/2014

Statistique - Semestre 2
Examen 1ère session
Durée : 1 h 30

Exercice 1 (12 pts)

Une étude sur le budget consacré aux vacances d'été auprès de ménages Bretons a donné les résultats suivants.

Budget	[800-1000[	[1000-1400[	[1400-1600[	[1600-a[	[a-2400[	[2400-b[
Fréquence cumulée	0,08	0,18	0.34	0,64	0,73	1

(1) Déterminer la population. Quel est le caractère étudié? Préciser sa nature.

(2) Calculer la borne manquante b sachant que l'étendue de la série est égale à 3200

(3) Calculer la borne manquante a dans les deux cas suivants :

   (a) Le budget moyen est égal à 1995 euros

   (b) Le budget médian est égal à 1920 euros

(4) On considère maintenant que la borne manquante a est égale à 2000 euros.

   (a) Donner une représentation graphique de la distribution des budgets " vacances "

   (b) Calculer et interpréter le budget moyen et médian. Que pouvez-vous conclure de la comparaison entre ces deux valeurs

   (c) Quelle est la proportion des ménages qui ont un budget " vacances " compris entre le budget médian et moyen?

   (d) Sachant que $\sum_i n_i x_i^2 = 4741200000$ et $V(x) = 604044$, retrouver les effectifs correspondant à chacune des tranches de budgets ainsi que l'effectif total des ménages enquêtés

Exercice 2 (8 pts)

Le tableau suivant donne la distance D de freinage d'un véhicule roulant sur route sèche en fonction de sa vitesse V.

Vitesse (V) en km/h	40	50	60	70	80	90	100	110
Distance (D) en m	8	12	18	24	32	40	48	58

(1) Représenter cette série statistique par un nuage de points (D en fonction de V). Commenter

(2) Calculer la vitesse moyenne et la distance moyenne de freinage.

(3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Commenter.

(4) Déterminer la droite de regression de la distance de freinage en fonction de la vitesse.

(5) Estimer, à l'aide de la droite de regression, la distance de freinage d'un véhicule roulant à $120 km/h$ sur une route sèche?

Université FHB- UFRMI, Licence 1 — Année Académique
UE: Probabilités-Statistique — 2013/2014

Examen 1ère session

(Semestre 2)

Probabilités (20 pts) - 01h45

NB: la clarté de la rédaction sera notée.

Exercice 1 (Questions de cours: 5 pts)

(1) Donner la définition d'une probabilité sur un ensemble Ω.

(2) Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète$X$.

(3) Soit Z une variable aléatoire de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [0,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Quelle est le moment d'ordre 1 de Z? comment l'appelle t-on? Que vaut $\mathbb{P}(1 \leq Z \leq 3)$?

Exercice 2 (8 pts)

Une agence d'imprimerie propose des drapeaux tricolorex (drapeau à trois couleurs) à bandes verticales avec 14 couleurs différentes. On suppose que deux drapeaux ayant les mêmes couleurs diffèrent selon la disposition de ces couleurs. Par exemple le drapeau: " orange, blanc, vert" diffère du drapeau: " vert, blanc, orange".

(1) Combien y a-t-il de drapeaux différents? Dans la suite, on suppose que l'agence d'imprimrie choisit avec la même chance chaque couleur.

(2) Calculer la probabilité de l'événement suivant : le drapeau contient au moins une couleur primaire (rouge, jaune et bleu). (Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

(3) Si un drapeau contient l'orange, quelle est la probabilité pour qu'il ait les mêmes couleurs que le drapeau de la Côte d'Ivoire? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

(4) Si un drapeau commence par le bleu et se termine par le rouge, qu'elle est la probabilité qu'il ne soit pas le drapeau de la France? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

Exercice 3 (7 pts)

Pour l'examen du code de la route, les candidats doivent remplir un questionnaire de 30 questions en choisissant pour chacune d'elles l'une des trois réponses proposées, dont une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question.

(1) Quelle est la loi du nombre S de bonnes réponses du candidat?

(2) On suppose que pour être admis au code, il faut avoir au moins 28 points. Déterminer la probabilité d'être admis au code.

(3) Quelle serait cette probabilité s'il avait à choisir une bonne réponse sur deux pour chacune des 30 questions?

Université FHB- UFRMI, Licence 1 — Année Académique
UE: Probabilités-Statistique — 2013/2014

Examen 2ème session

(Semestre 2, Durée: 1h15)

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction des copies.

Probabilité (20 pts)

Exercice 1 (Questions de cours: 6 pts)

(1) Enoncer les hypothèses et la formule de Bayes

(2) Soit Ω) un ensemble fini, univers d'une expérience aléatoire équiprobable.

(a) Donner la définition d'une expérience aléatoire.

(b) Que signifie la notion d'équiprobabilité.

(c) Dans ce cas, donner la definition de la probabilité d'une événement A.

(3) Soit X une variable aléatoire de densité $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ où

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [0,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(4) Déterminer le moment centré d'ordre 2 de X. Que represente t-il?

Exercice 2 (8 pts)

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire. Les choix sont fait de manière équiprobable.

(1) Calculer la probabilité des événements suivants:

(a) A: "Le poste de secrétaire est occupé par une fille"

(b) B: "L'élève Ditfo est membre du comité"

(c) C: "Le président et le vice-président sont de sexes différents"

(2) On suppose dans la suite que chaque poste admet un adjoint.
Déterminer la probabilité de l'événement D: "Aucun poste ne contient des membres de même sexe".

Exercice 3 (6 pts)

Pour la première partie de l'examen du code de la route, les candidats doivent repondre à un questionnaire de plusieurs questions en choisissant pour chacune d'elles l'une des quatre réponses proposées, dont une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question.

(1) Déterminons la loi du rang R de la première bonne réponse du candidat.

(2) On suppose que pour être admissible au code, il faut que le rang de la première bonne reponse soit au plus égal à 5. Déterminons la probabilité α d'être admissible au code.

(3) Déterminons cette cette probabilité s'il avait à choisir une bonne réponse sur deux pour chacune des questions.

IUA - Licence 1 : MI - EQ
UE: Probabilités-Statistique

Année Académique
2013/2014

Probabilités - Semestre 2
Examen 1ère session
Durée : 1 h 45

Exercice 1 (8 pts)

On répartit n objets ($n \geq 3$) dans trois cases numérotés 1,2,3.

(1) Combien de répartitions différentes peut-on effectuer au total,
   (a) si les objets sont discernables ?
   (b) si les objets sont indiscernables ?

(2) On suppose que les objets sont indiscernables et on effectue une répartition de ces objets dans les trois cases 1,2,3.
   (a) Calculer la probabilité pour que cette répartition laisse au moins une case vide ?
   (b) Si cette répartition laisse la case numéro 1 vide, quelle est la probabilité que la case numéro 2 ne soit pas vide ?
   (c) Déterminer le nombre n d'objets à répartir pour que la probabilité qu'aucune case ne soit vide, soit égal à $\frac{6}{11}$.

Exercice 2 (5 pts)

Un groupe d'étudiants est composé de 12 filles et de 11 garçons. On choisit au hasard dans ce groupe un échantillon de 5 personnes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles dans cet échantillon.

(1) Quelle est la loi de X ? Donner l'espérance et la variance de X.

(2) Si l'échantillon contienne au moins une fille, quelle est la probabilité qu'il ne contienne que des filles.

Exercice 3 (7 pts)

La durée de vie (en heures) d'un téléviseur est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^2} & \text{si } x > 150 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Trouver la valeur du paramètre λ ?

(2) Quelle est la durée de vie moyenne d'un téléviseur?

(3) Quelle est la probabilité que la durée de vie du téléviseur soit supérieure à 300 heures?

(4) Un téléviseur fonctionne depuis 200 heures. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne 200 heures supplémentaires?

(5) Un magasin vend 20 téléviseurs du même type. Quelle est la probabilité qu'après 200 heures il faille en remplacer au moins 2?

Université FHB de Cocody
(Abidjan – Rép. de Côte d'Ivoire)
UFR Maths - Informatique (MI)

Année 2013 - 2014

Examen d'Electricité (1ère session)

Durée : 2h

Exercice 1

N.B. L'étudiant pourra utiliser un résultat donné dans l'épreuve, qu'il n'a pu retrouver, pour la suite.

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct (O, u_x, u_y, u_z). Un point M de l'espace est repéré dans la base cylindrique (u_r, u_θ, u_z) par (r, θ , z).

A/ On considère un cylindre creux (S) de rayon R, de longueur infinie, chargé en surface par une densité surfacique de charges uniforme $\sigma > 0$ (figure 1). Soit M un point quelconque de l'espace.

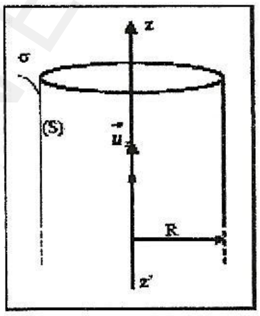


Figure 1

1) Déterminer le champ E(M) en tout point M de l'espace ($r < R$ et $r > R$).

2) a) Tracez l'allure de E(r) en fonction de r (où E(r) est la norme du champ).

b) Le champ E(M) est-il continu à la traversée de la surface du cylindre.

3) En prenant comme référence du potentiel $V(r = 0) = V_0$, calculez le potentiel V(r) en tout point M de l'espace.

4) a) Tracez l'allure de V(r) en fonction de r.

b) Vérifier que le potentiel V(r) est continu à la traversée du cylindre.

B/ Une couronne cylindrique (C) d'axe $z'\,z$ et de rayon intérieur R_1 et extérieur R de longueur infinie, porte une charge volumique répartie entre les surfaces des deux cylindres avec une densité constante $\rho > 0$ (figure 2).

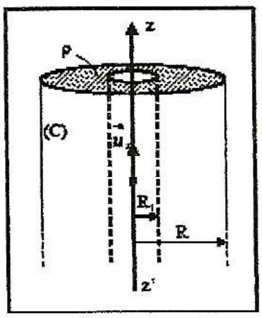


Figure 2

5) a) En utilisant le théorème de Gauss, donner les expressions du champ électrostatique E(M) en tout point M de l'espace.

b) Le champ E(M) est-il continu à la traversée des deux surfaces de la couronne cylindrique (C).

6) On fait tendre $R_1 \to R$, la charge totale de la distribution volumique de la couronne cylindrique est alors répartie sur la surface d'un cylindre creux de longueur infinie et de rayon R. Soit σ la densité de charges du cylindre creux.

a) Exprimer σ en fonction de ρ, R_1 et R.

b) Retrouver les expressions de E(M) crée par un cylindre creux.

7) On se place maintenant dans le cas où $R_1 = 0$ et on suppose que le rayon R est négligeable devant la longueur du cylindre chargé. La charge totale de la distribution volumique peut être considérée répartie uniformément sur un fil infini. On désigne par λ la densité linéique du fil.

a) Exprimer λ en fonction de ρ et R.

b) En déduire l'expression du champ E(M) crée par le fil.

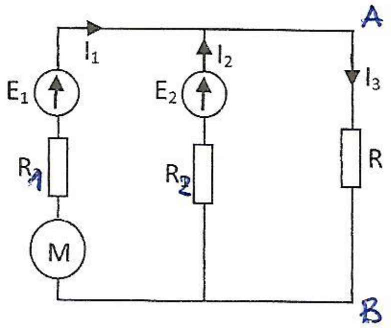
c) Retrouver E(M) crée par un fil de longueur infinie à partir du théorème de Gauss.

d) En déduire l'expression du potentiel V(M) crée par le fil infini à une constante additive près qu'on notera K.

<u>**Exercice 2**</u> :

Les différents éléments représentés dans le réseau ci – contre possèdent les caractéristiques suivantes :

- générateur G_1 ($E_1 = 29$ V, $R_1 = 1\ \Omega$)
- générateur G_2 ($E_2 = 10$ V, $R_2 = 3\ \Omega$)
- moteur M (E' = 10 V, $r = 1\ \Omega$)
- résistance $R = 1\ \Omega$



1) Calculer les intensités I_1, I_2 et I_3 à l'aide des lois de Kirchhoff.
2) On ajoute en parallèle, entre A et B, une résistance $R' = 4\ \Omega$. Utiliser le théorème de Thévenin pour déterminer le courant I' qui la traverse.
3) Reprendre la question 2) en utilisant le théorème de Norton pour déterminer le courant I'.

Université Félix HOUPHOUET BOIGNY — Année universitaire 2013 -2014

UFR Math Info/L 1 MATHS — 09 octobre 2014

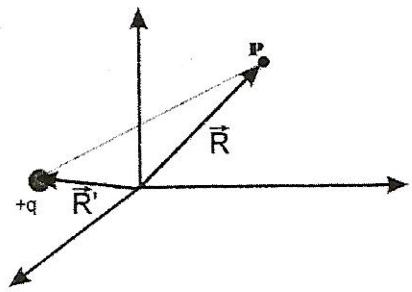
Examen seconde session : Électrostatique et Électrocinétique

Durée : 2 heures

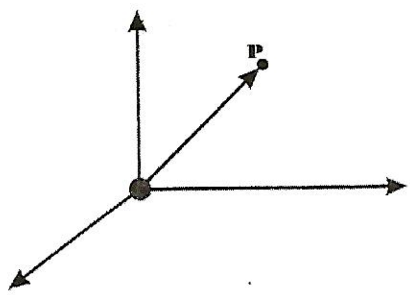
<u>Questions</u> (5 points)

Exprimer le champ électrostatique sur chacune des figures ci-dessous en fonction de $\vec{R}$, et $\vec{R'}$ au point P. Noter que le champ peut prendre plusieurs formes, choisir la forme la plus appropriée dans chaque cas.

a) Charge ponctuelle à une position arbitraire

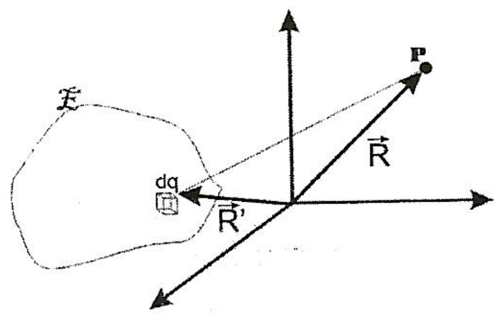


b) Charge ponctuelle à la position du point origine



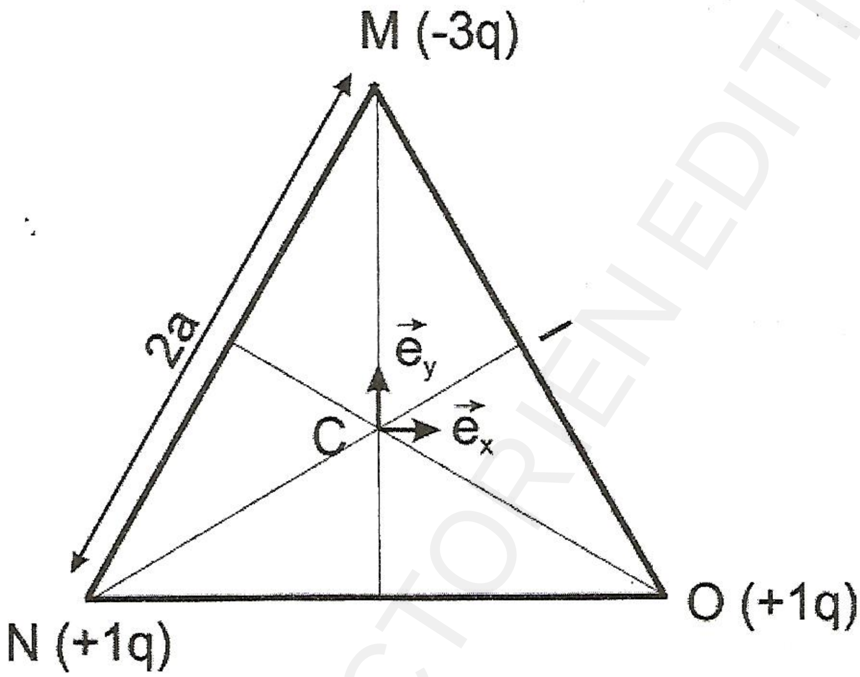
c) Un espace $\mathcal{E}$ de densité de charge σ

NB : σ peut être linéique, surfacique et volumique



Exercice 1 (8 points)

Trois charges **+1q**, **+1q**, **-3q** sont placées aux sommets d'un triangle équilatérale MNO de côté 2a comme indiqué sur la figure ci-contre :



On désire déterminer le **champ** $\vec{E}$ **et le potentiel V** électrostatique régnant au **centre C** du triangle en fonction de **a** et **q**. Pour cela :

1. Reprendre la figure en représentant le champ $\vec{E}$.

2. Montrer que la distance $r = OC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

3. Déterminer les caractéristiques et l'expression du champ $\vec{E}$. On considérera le repère $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

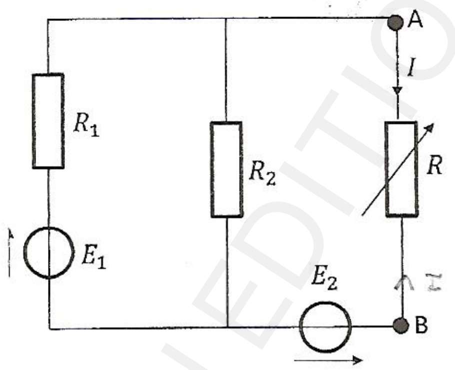
4. Déterminer l'expression du potentiel **V** puis calculer $\vec{E}$ et **V**.

Application numérique : q =0,1 nC, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 N.m^2.C^{-2}$ $et\ a = 5\ cm.$

Exercice 2 : Électrocinétique (7 points)

On considère le circuit ci-contre où R est une résistance variable.

1. Déterminer le courant I en utilisant les lois de Kirchhoff ou celle des courants fictifs
2. Déterminer les caractéristiques du générateur de Thevenin équivalent à la portion de circuit située entre les bornes A et B.
3. En déduire l'expression du courant électrique I qui traverse la résistance R.



$E_1 = 20\,V\,; E_2 = 70\,V\,; R_1 = 2\,\Omega\,; R_2 = 10\,\Omega$ et $R = 5\,\Omega$.

On fait varier la résistance R.

4. Exprimer en fonction de E_{Th}, R_{Th} et R la puissance électrique $\mathcal{P}$ dissipée par effet joule dans la résistance R.
5. Montrer par un raisonnement simple que cette puissance électrique passe par un maximum pour une valeur R_0 de R.

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody)

UFR Mathématique-Informatique (MI)

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE – INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2013 – 2014

UE OPTIQUE

Durée : 1heure 30min

Exercice 1 : Vecteur de Poynting – Intensité lumineuse (07 points)

On considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale monochromatique se propageant dans le vide.

1) a. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de cette onde en fonction de l'amplitude E_0 du champ électrique, de la perméabilité magnétique du vide μ_0, de la célérité c de l'onde dans le vide, de la pulsation ω de l'onde, du temps t, du vecteur d'onde $\vec{k}$, du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde $\vec{u}$;

b. Quel est l'intérêt du vecteur de Poynting dans l'étude des ondes lumineuses ?

2) L'onde électromagnétique considérée étant assimilée à une onde lumineuse :

a. Calculer l'intensité lumineuse I. (On donnera deux expressions de I) ;

b. Donner l'unité de I et les noms de deux appareils de mesure de I.

Exercice 2 : Téléobjectif (13 points)

Un téléobjectif est constitué de deux lentilles minces coaxiales, l'une L_1 convergente de distance focale $f_1' = 10$ cm et l'autre L_2 divergente de distance focale $f_2' = -4$ cm. Lorsque le téléobjectif est mis au point sur l'infini, son encombrement (distance de la lentille L_1 à la plaque photographique) est D = 19 cm.

1/ Calculer la distance $e = O_1O_2$ entre les centres optiques de L_1 et L_2. En déduire le symbole du doublet équivalent au téléobjectif.
On rappelle que le téléobjectif étant mis au point sur l'infini, on obtient à partir d'un objet situé à l'infini, une image nette sur la plaque disposée dans le plan focal image du téléobjectif.

2/ Déterminer les positions (par rapport à L_1) du foyer objet F et du foyer image F' de ce téléobjectif.

3/ a) Calculer la distance focale f ' de ce téléobjectif ; en déduire l'avantage du téléobjectif par rapport à un appareil photographique à objectif simple de même focale f '.

b) Positionner les points principaux H et H' de ce doublet, par rapport à F et F' respectivement.

4/ a) Calculer la dimension de l'image d'une tour très éloignée, de faible diamètre apparent α (tour de 30 m de haut située à 1 km).
On commencera par calculer le diamètre apparent α, c'est-à-dire l'angle sous lequel cette tour de 30 m est vue par un observateur placé à 1 km d'elle.

b) Calculer la distance focale f '' de la lentille mince unique qui donnerait de cette tour une image de même dimension que celle du téléobjectif.

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody)

UFR Mathématique-Informatique
(MI)

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE – INFORMATIQUE

DEUXIEME SESSION 2013 – 2014

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours (6,5 points)

1/ On donne les longueurs d'onde dans le vide de différentes raies visibles (en nm) : 480, 656, 410, 589, 450, 546. A chacune de ces longueurs d'onde, associer l'une des couleurs suivantes : rouge, bleu, indigo, jaune, vert, violet.

2/ Eclairé en lumière blanche, un corps nous apparaît d'une certaine couleur s'il absorbe les radiations correspondant à la couleur complémentaire. (On rappelle que deux couleurs sont dites complémentaires quand, agissant simultanément sur un œil normal, elles lui donnent l'impression d'une couleur blanche).
a) Qu'absorbent respectivement un corps blanc et un corps noir ?
b) En lumière blanche, une robe paraît rouge. Quel est son aspect lorsqu'on l'observe en lumière monochromatique rouge, puis verte ?

3/ Choisir la bonne réponse : Une lentille mince convergente ne peut pas former d'image
- (a) virtuelle, droite et agrandie ;
- (b) virtuelle, renversée et réduite ;
- (c) réelle, renversée et réduite ;
- (d) réelle, renversée et agrandie ;
- (e) aucune de ces réponses.

4/ Enoncer, puis démontrer le théorème de Malus-Dupin.

5/ Etablir les deux lois de Snell-Descartes pour la réfraction.

Exercice 2 : Miroir plan (2,5 points)

Une femme est debout entre un miroir vertical de 0,5 m de hauteur et un arbre éloigné de hauteur H. Elle se trouve à 1,0 m du miroir et l'arbre se trouve à 11 m du miroir. Si elle voit l'arbre remplir exactement le miroir, quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 3 : Appareil photographique (5 points)

L'objectif d'un appareil photographique à mise au point fixe est constitué d'une seule lentille, de distance focale f ' = 50 mm, limitée par une monture de rayon R. Son nombre d'ouverture, également fixe, est :

$$N = \frac{f'}{2R}$$

La position de la pellicule est telle que l'image d'un objet, de hauteur h = 2 m et situé à une distance d_0 du foyer objet, soit nette et longue de h' = 35 mm.

1/ Déterminer la valeur de d_0 ainsi que la distance d_0' entre la pellicule et le foyer image.

2/ Un objet ponctuel est situé sur l'axe optique, à une distance d (différente de d_0) du foyer objet.

Déterminer le rayon r de la tache image obtenue sur la pellicule, en fonction de f ', N, d et d_0. On supposera que d reste (très) grand devant f '.

Exercice 4 : Arc-en-ciel de second ordre (6 points)

Un rayon de lumière monochromatique pénètre dans une goutte d'eau sphérique d'indice n. Il subit à l'intérieur de la goutte deux réflexions.

1/ Calculer la déviation totale D du rayon incident en fonction de l'angle d'incidence i (à l'entrée dans la goutte) et du premier angle de réfraction r. (On fera un schéma soigné indiquant la marche du rayon lumineux à travers la goutte).

2/ Trouver, en fonction de n, la valeur de sin i pour laquelle la déviation du rayon incident est minimale. Calculer alors $\beta = D - \pi$ pour n = 1,33 (eau).

3/ Montrer que β diminue lorsqu'on passe du violet au rouge. Pour cela, on calculera $d\beta$ pour une valeur fixée de i, en admettant que la loi de Cauchy donnant la variation de l'indice n avec la longueur d'onde λ dans le vide est satisfaite :

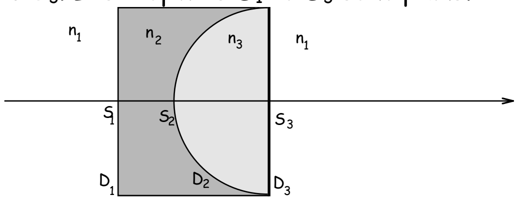
$$n = n_0 + c / \lambda^2$$, n_0 et c étant deux constantes positives.

Sujet d'Optique

(à rendre sur feuille séparée)

Exercice 1 - Association de dioptres

On considère un système optique formé d'un ensemble de trois dioptres D_1, D_2 et D_3 ayant le même axe optique (cf. figure). On désigne par S_1, S_2 et S_3 les sommets de ces dioptres. Le système se trouve dans un milieu d'indice n_1. D_2 est un dioptre sphérique dont le centre de courbure C est confondu avec S_3. Les dioptres D_1 et D_3 sont plans.



1. Représenter sur la feuille ci-jointe le trajet d'un rayon lumineux monochromatique parallèle à l'axe et traversant le système optique dans les deux cas suivants :

a- $n_3 > n_2 > n_1$

b- $n_2 > n_3 > n_1$

Justifier la construction.

2. On se place dans le cas où $n_3 = n_2 = n = 4/3$ et $n_1 = 1$ (air).

2a. Tracer sur la feuille ci-jointe le trajet d'un rayon lumineux monochromatique issu de A traversant le système optique et ayant une inclinaison α par rapport à l'axe optique. Quel est l'angle formé entre le rayon émergeant de D_3 et l'axe optique ? Justifier.

2b. En appliquant les relations de conjugaison des dioptres, calculer la position $\overline{S_3A'}$ de l'image A' de l'objet A donnée par ce système optique.

En déduire la distance $\overline{AA'}$.

Quelle est la nature de l'image A' de A ?

2c. Application numérique : $\overline{S_1S_3} = 4$ cm. Calculer $\overline{AA'}$.

<u>RAPPEL :</u> Relation d'un dioptre sphérique de sommet S de centre C séparant un milieu d'indice n d'un milieu d'indice n' : $\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$

Exercice 2 - Doublet de Lentilles

Un système optique grossissant comporte deux lentilles L_1 et L_2 :

L_1, objectif, est une lentille convergente de distance focale $f'_1 = +3$ cm

L_2, oculaire, est une lentille divergente de distance focale image $f'_2 = -6$ cm.

Leur centre optique, respectivement O_1 et O_2, sont séparés de $\overline{O_1O_2} = +9$cm

1. Un observateur, ayant une vue normale (punctum remotum à l'infini, punctum proximum à 20 cm) désire observer sans fatigue, au travers du système grossissant.

1a. Où doit se former l'image définitive A'B' donnée par l'ensemble des deux lentilles (A sur l'axe optique, B hors de l'axe)?

Où doit alors se former l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par L_1 de l'objet AB ?

1b. Faire un schéma à l'échelle représentant les deux lentilles :

- Positionner les foyers image et objet des deux lentilles.
- Trouver par construction la position de l'objet réel B correspondant à l'image définitive B'
- Expliquer les constructions.

1c. Retrouver par le calcul la distance $\overline{O_1A}$

2. 2a. Sous quel angle α serait vu au mieux, à l'œil nu, l'objet AB ?

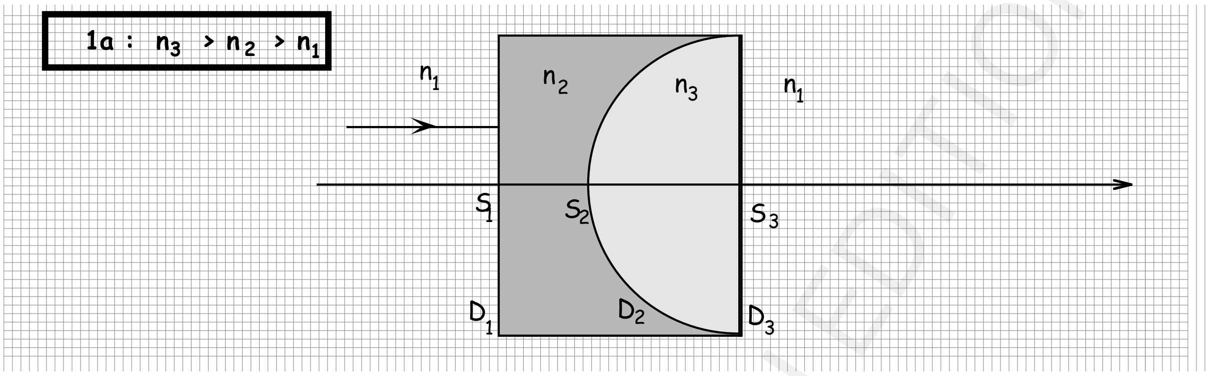
2b. Sous quel angle α' est vue l'image A'B' donnée par le système ?

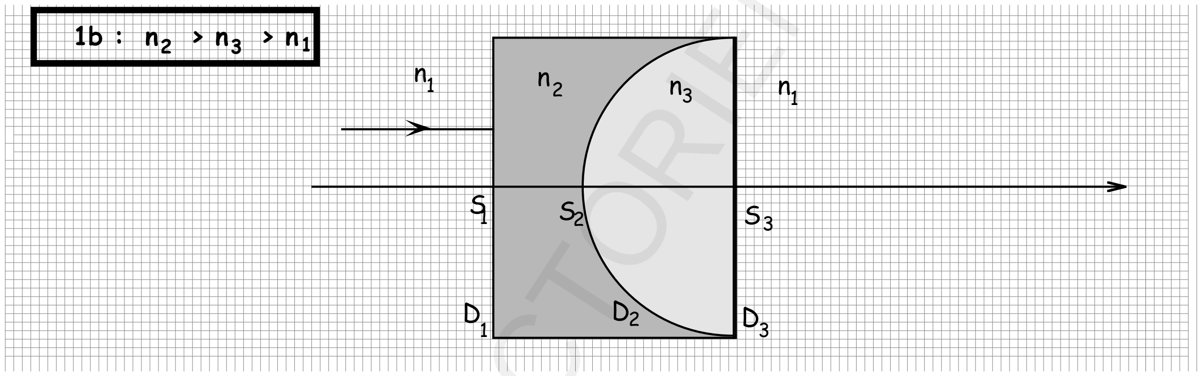
2c. Calculer le grossissement apporté par le système.

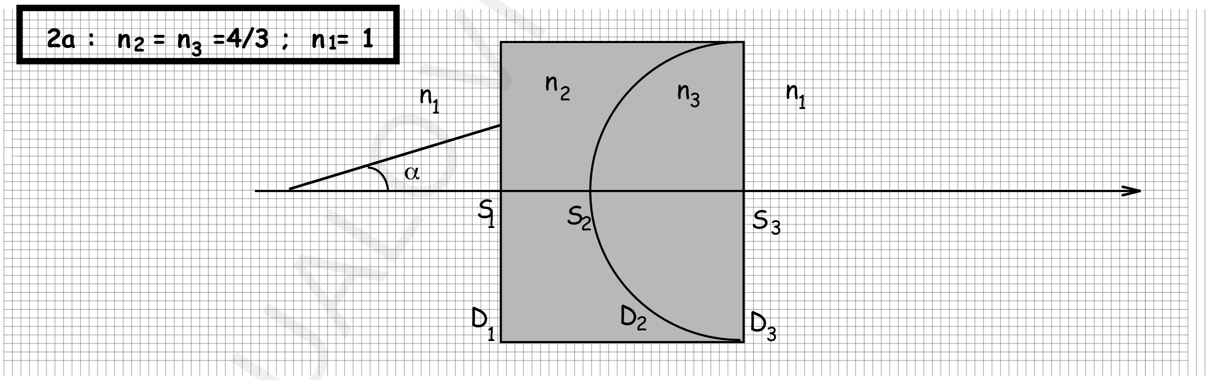
Feuille de construction à rendre avec la copie d'Optique

N° d'anonymat : ………….

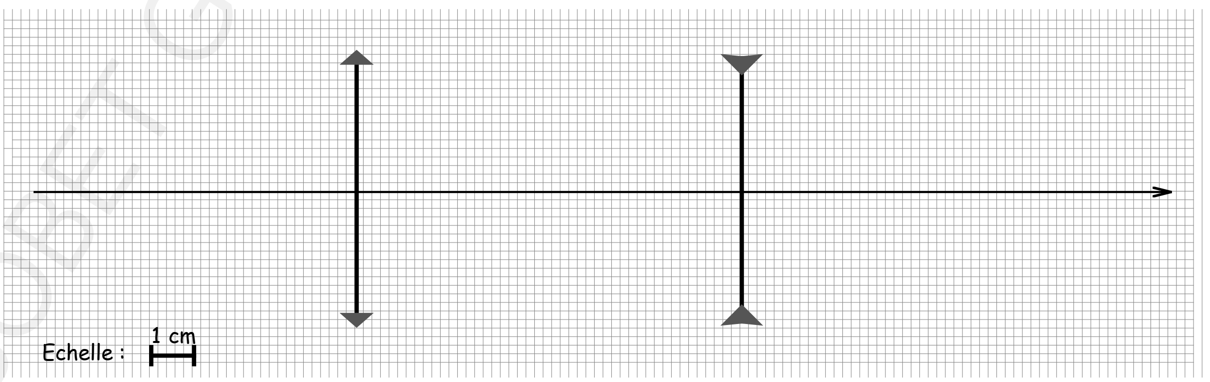
Exercice 1







Exercice 2 – Question 1b



Examen d'Environnement

(2 h 00 min)

1- Définir les concepts suivants : environnement, déchet, ressource naturelle, écosystème, développement durable, effet de serre. (**5 points**)

2- Donner les différentes composantes de l'environnement et dire le rôle que joue chacune d'elle dans l'environnement. (**9 points**)

3- Discuter de l'impact de l'accroissement de la population sur l'environnement. Illustrer votre argumentaire par des exemples bien précis. (**6 points**)

Bonne chance !!!

Dr Jean-Marie P. OUATTARA

Université Félix Houphouët-Boigny — **2014-2015**
UFR-MI-L1 — **2 heures**

Examen de suites et fonctions dérivables

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 (6 points). 1. Quand dit-on qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ? est convergente ?

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \{u_p | p > n\}.$$

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle bornée ? Convergente ? justifier toutes les réponses données.

(b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \sup A_n$ et $i_n = \inf A_n$ existent.

(c) Etudier la monotonie de chacune des suites $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Donner avec justification, la nature de chacune des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} i_n$$

Exercice 2 (6 points). 1. Enoncer le théorème de Rolle.

2. On veut étudier le signe de la fonction $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Justifier que l'équation $\cos x = \frac{2}{\pi}$ admet au moins une solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Etudier la variation de f' (fonction dérivée de f) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Déduire de ce qui précède le signe de f.

Exercice 3 (4 points). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^2 + x^4}.$$

1. Justifier que f admet un developpement limité à l'ordre 10 en 0, et le déterminer.
2. Déduire de ce qui précède la dérivée d'orde 10 en $x = 0$ de la fonction f.

Exercice 4 (4 points). 1. Calculer

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1}$ et déterminer le developpement limité à l'ordre 6 de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ au voisinage de $+\infty$.

Université Félix Houphouët-Boigny **2014-2015**
UFR-MI-L1 **session-2 heures**

Examen de suites et fonctions dérivables

Documents interdits. La rigueur dans la rédaction exigée. $\ln x$ désigne le logarithme Népérien de x

Exercice 1 (7,5 points). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f"(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée $n-$ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{\frac{1}{t}}$$

où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 2 (7,5 points). Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}. \tag{1}$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite (H_n).

3. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.
   (a) En vous aidant de la relation (1), montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Justifier que la limite commune de (u_n) et (v_n) que nous notons γ, appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice 3 (5 points). On rapelle que $\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Donner le developpement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$a) \ \text{sh}x \qquad b) \ \frac{\sin x}{\text{sh}x} \qquad c) \ \ln(1+x)$$

2. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{\text{sh}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Université Félix Houphouët - Boigny *Année 2014 - 2015*
UFR Mathématiques et Informatique
Niveau L1

EXAMEN DE PREMIERE SESSION
ECUE: CALCUL INTEGRAL
DUREE: 1H30

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 4y = 128x\sinh(2x)$
1) Résoudre l'équation (E).
2) Déterminer l'unique solution f *de (E) vérifiant* $f(0) = 0$; $f'(0) = \frac{1}{4}$
3) Donner le développement limité de f *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 4.
4) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f *au point d'abscisse* 0. *Etudier les positions relatives.*

EXERCICE 2

1) Montrer (rigoureusement) que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$
2) Calculer $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$; $a \in]0, +\infty[$

UNIVERSITE FHB ANNEE UNIVERSITAIRE 2015- 2016

UFR MATHS - INFO
NIVEAU: L1

EPREUVE DE CALCUL INTEGRAL
SESSION 2 (Durée: 1h30)

EXERCICE 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive:
$f(x) = \frac{x}{x^4+5}$; $g(x) = (x^2 - x + 2)\exp(-2x)$; $h(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

EXERCICE 2. Répondez par V (VRAI), F (FAUX) ou S.A. (SANS AVIS), en justifiant *brièvement* votre réponse.
NB: Si une réponse juste à une question donnée rapporte n points, une réponse fausse à la même question rapportera $(-n)$ points; alors que S.A. = 0 point.

A. Soit (E) l'équation différentielle: $y' - 3y = \exp(3x)$.
Soient f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\exp(-3x)$.
1) $f'(0) = 4$
2) $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1$
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\exp(3x)$
4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)dt = \frac{3f(x)-\exp(3x)-2}{9}$

B. On pose $f(x) = (x+1)\exp(2x)$
a) f est solution de l'équation $y'(x) - 2y(x) = \exp(2x)$
b) L'équation $f(x) = -\frac{1}{16}$ a deux solutions (Rappel: $2 < e < 3$)
c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $I(\alpha) = \int_\alpha^{-1} f(x)dx$

c - 1: $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ I(\alpha) = -\frac{1}{4e^2} - \frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$

c - 2: $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = +\infty$

UFHB
Année académique 2014 – 2015
UFR-MI
Licence 1

Examen de Structures Algébriques
(*Première session*, 2-heures)

Exercice 1 : (12-points) Soient $(G, *)$ et $(F, \bullet)$ deux groupes, d'éléments neutres respectifs e et s, et

$$f : G \longrightarrow F \text{ un homomorphisme de groupes.}$$

1. Que signifie f est un homomorphisme de groupes ?
2. Montrer que dans le groupe F l'équation

$$z \cdot z = z \quad (I)$$

   n'a qu'une seule solution, qu'on déterminera.
3. Montrer que $f(e)$ vérifie l'équation (I)
4. Montrer que dans le groupe G si deux éléments x et y sont **symétriques** l'un de l'autre

   alors $f(x)$ et $f(\cancel{x}\,y)$ sont **symétriques** l'un de l'autre.
5. On rappelle que

$$Ker(f) = \{x \in G : f(x) = s\} \textbf{ et } Im(f) = \{f(x), x \in G\}$$

   Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sous-groupes respectifs de G et de F.
6. Montrer que l'homomorphisme

   f est **injectif** si et seulement si $Ker(f) = \{e\}$.

Exercice 2 : (8-points)

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$
2. Soit $K = \mathcal{U}(\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})$ le groupe multiplicatif de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$.
   – Quel est le cardinal de K ?

   – Déterminer tous les sous-groupes de K
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^4 + 4x^2 - 3 \in 7\mathbb{Z}$$

UFHB
UFR-MATHEMATIQUES INFORMATIQUE
Année académique 2014 – 2015
Niveau : Licence 1

EXAMEN de Structures algébriques : (Deuxième session 2 Heures)

Exercice 1 : (6-points).
Sur $\mathbb{N}^*$ on considère la loi de composition interne $\wedge$ définie comme suit :

$$a \wedge b = |a - b| + 1$$

où $|a - b|$ est la valeure absolue de $a - b$.

1. La loi $\wedge$ est-elle bien définie ?
2. Etudier les propriétés de $\wedge$.

Exercice 2 : (8-points).

On considère le produit cartésien d'anneaux $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{30\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{31\mathbb{Z}}$ et l'application naturelle

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow A,\ x \longmapsto (\dot{x}, \bar{x}),$$

$\dot{x}$ et $\bar{x}$ étant respectivement les classes de x dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{30\mathbb{Z}}$ et dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{31\mathbb{Z}}$.

1. Montrer que φ est un homomorphisme d'anneaux.
2. Déterminer son noyau $Ker\varphi$ et son image $Im\varphi$.
3. Déterminer tous les antécédents du couple $(\dot{3}, \bar{2})$.

Exercice 3 : (6-points).

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^9 + X^8 + X^7 + 2X - 1}{X^8 + X^7 + X^6}$$

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 2014-2015

Licence 1 : Tronc Commun

EXAMEN DE MECANIQUE 1

Première Session

Durée : 3 Heures

Documents non autorisés

<u>Exercice 1</u> : Soient les vecteurs : $\overrightarrow{P} = 2t\,\overrightarrow{i} + 5t^2\,\overrightarrow{j} - 7t^3\,\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{Q} = -4t^3\,\overrightarrow{i} + 10t^2\,\overrightarrow{j} - 2t\,\overrightarrow{k}$.

1) Vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{Q}) = \dfrac{d\overrightarrow{P}}{dt}\cdot\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{P}\cdot\dfrac{d\overrightarrow{Q}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{P}\wedge\overrightarrow{Q}) = \dfrac{d\overrightarrow{P}}{dt}\wedge\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{P}\wedge\dfrac{d\overrightarrow{Q}}{dt}. \end{cases}$$

2) Calculer les produits suivants : $\overrightarrow{P}\cdot(\overrightarrow{P}\wedge\overrightarrow{Q})$ et $\overrightarrow{P}\wedge(\overrightarrow{P}\wedge\overrightarrow{Q})$.

3) Soit un vecteur $\overrightarrow{U} = \alpha\,\overrightarrow{i} + t^2\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ tel que $\overrightarrow{U}$ soit perpendiculaire à $\overrightarrow{P}$.

a- Déterminer le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$.

b- Déterminer la composante de $\overrightarrow{Q}$ sur l'axe Δ passant par les points $A(0,0,1)$ et $B(1,2,1)$.

<u>Exercice 2</u> : On considère les repères orthonormés directs $\mathcal{R}(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$ et $\mathcal{R}'(O;\overrightarrow{x'},\overrightarrow{y'},\overrightarrow{z})$. Le plan $(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$ est fixe et la droite $(O;\overrightarrow{x'})$ tourne autour de $(O;\overrightarrow{z})$ avec une vitesse angulaire ω, $\omega = \dot{\theta}$ et $\theta = (\overrightarrow{x},\overrightarrow{x'})$. Un mobile $M(\|\overrightarrow{OM}\| = r)$ se déplace sur la droite $(O;\overrightarrow{x'})$ suivant la loi : $r = r_0(\cos\omega t + \sin\omega t)$; $(r_0 = cte)$.

1) Calculer par la méthode directe les composantes des vecteurs vitesse et accélération absolus de M (dans le repère $\mathcal{R}$);

2) Déterminer par la méthode des lois de composition les vecteurs vitesse et accélération absolus :

a) Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $\mathcal{R}'$;

b) Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération d'entraînement de M dans le repère $\mathcal{R}$;

c) Calculer les composantes de l'accélération complémentaire ou accélération de Coriolis de M dans le repère $\mathcal{R}$.

d) Vérifier le résultat obtenu à la question 1).

<u>Exercice 3</u> : Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e}_y$ l'accélération de la pesanteur (figure 1).

1) Calculer la norme v_0 de la vitesse de la bille en O.

2) Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.

3) On désigne par $\overrightarrow{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{CM}$ du point M.

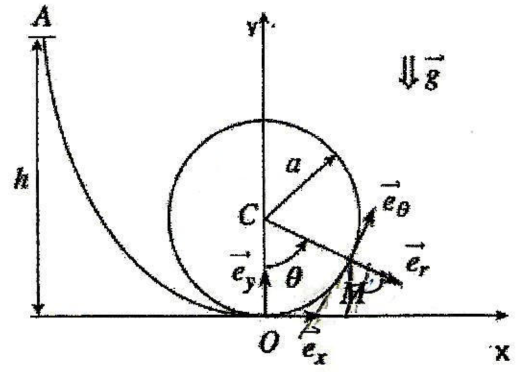


Figure 1: Gouttière

Ecrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ du guide circulaire sur la bille.
4) Déterminer la hauteur minimale h_{min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif dans le guide.
5) On lâche la bille sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 2a$. Calculer, en degrés, la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle la bille quitte le guide.

NB : La rédaction sera particulièrement prise en compte dans l'attribution de l'intégralité des points relatifs aux différentes questions.

UFHB
Année académique 2014 – 2015
UFR-MI
Licence 1

Examen d'Eléments de Logique Session 1, (2-heures)

Exercice 1 : (6-points) Donner la valeur de vérité, en la justifiant, de chacune des assertions suivantes :

1. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E.
   Si tous les objets de A ont une propriété $\mathcal{P}$, alors tous les éléments de E aussi.
2. Si tous les objets de tous les sous-ensembles finis d'un ensemble E ont une propriété commune $\mathcal{Q}$, alors tous les éléments de E aussi.
3. La collection de **tous les ensembles** n'est pas un ensemble.

Exercice 2 : (4-points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'intervalle réel

$$J_n =]n, +\infty[$$

Calculer l'intersection et la réunion des J_n :

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n \quad , \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$$

Exercice 3 : (7-points) Soit $D = \{\clubsuit, \bigcirc, \square, \triangle, 11\}$.
Sur D on considère la relation binaire

$$\mathcal{R} = \{(11,11), (\clubsuit,\clubsuit), (\bigcirc,\bigcirc), (\square,\square), (\triangle,\triangle), (\square,11), (\clubsuit,11), (\bigcirc,11), (\triangle,11), (\triangle,\square)\}$$

1. Représenter $\mathcal{R}$ dans un diagramme de Venn.
2. Etudier $\mathcal{R}$
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, donner un élément maximal et un élément minimal de D.

Exercice 4 : (3-points) .
On considère les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$.
Déterminer le nombre de toutes les applications **surjectives** de A dans B.

UFR-MI, U-FHB d'Abidjan-Cocody
EXAMEN DE MICROÉCONOMIE, LICENCE 1 (L1)
Prof FOADE Denis Joël Tongnivi
Durée : 2 heures

---

1 – QUESTIONS THEORIQUES

1.1 –En courte période, la fonction de coût total a-t-elle combien de composantes ? En longue période, le coût fixe existe-t-il ?

1.2 – Qu'est-ce que vous entendez par le seuil de rentabilité et par le seuil de fermeture ?

1.3 – Qu'est-ce qu'une économie d'échelle ?

1.4 – Comment appelle –t-on la courbe d'une fonction de production ?

1.5 – Qu'entendez-vous par une courbe d'indifférence ? Quelles sont ses propriétés ?

2 –EXERCICE

Soit une fonction de production $q = AK^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$.

2.1 - Quelle est la nature de cette fonction ? Est-elle homogène ? Si oui, de quel degré ?

2.2– Déterminer l'élasticité de la fonction de production par rapport au facteur travail.

2.3 – Pour acheter les facteurs de production, l'entrepreneur paie un taux de salaire w = 2 et un taux de rendement r = 3 et veut dépenser $D(K,L)=100$. Déterminer la production optimale de cet entrepreneur.

3 –RÉFLEXIONS

3.1 - Pourquoi la question<<**que produire**>> constitue un problème pour toute l'économie ? Et quel rôle joue la variable <<**prix**>> dans ce cas ?

3.2 - Comment peut-on, en 2020, réaliser l'émergence économique en Côte d'Ivoire ?

UFR-MI, U-FHB d'Abidjan-Cocody
EXAMEN DE MICROÉCONOMIE, LICENCE 1 (L1)
Prof FOADE Denis Joël Tongnivi
Durée : 2 heures

---

1 – QUESTIONS THEORIQUES

1.1 –En courte période, la fonction de coût total a-t-elle combien de composantes ? En longue période, le coût fixe existe-t-il ?

1.2 – Qu'entendez-vous par les termes suivants : a-no bridge ; b- mésoéconomie ; c- macroéconomie ; microéconomie ; d- équilibre économique ; e-institution économique ; f- taux marginal de substitution entre le bien 1 et le bien 2 ?

1.3 – Quelles sont les conditions nécessaires pour réaliser l'équilibre en concurrence pure et parfaite (CPP) ?

1.4 – Comment appelle-t-on la courbe d'une fonction de production ?

1.5 – Qu'entendez-vous par une courbe d'indifférence ? Quelles sont ses propriétés ?

2 – EXERCICE

Soit une fonction de production $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

2.1 – Quelle est la nature de cette fonction ? Est-elle homogène ? Si oui, de quel degré ?

2.2 – Déterminer l'élasticité de la fonction de production par rapport au facteur travail.

3 –**RÉFLEXION :** Peut-t-on en 2020 réaliser l'émergence économique en Côte d'Ivoire ?

UFRMI	2014/2015
QCM ***réponse*** *juste +1* *réponse fausse -0,5* *sans réponse 0*	**L1** **Outils bureautiques** **Examen - Session 2 – 1H15**

Q1- Quelle est la composition de l'architecture d'un ordinateur selon VON NEUMAN ?

a) UCC, UAL, E/S, ROM , RAM, BUS
b) UC, ECRAN, CABLE, SOURIS
c) UCC, USB, BUS, RAM

Q2 – Les équipements informatiques pouvant être utilisés par les employés de bureau d'une entreprise sont :

a) L'ordinateur portable
b) Le classeur
c) La console HIFI
d) Le GPS

Q3- Une alternative à Microsoft office peut être :

a) Excel
b) Acrobat Reader
c) Libre Office
d) Quick office

Q4- Quelle est l'unité utilisée pour la mesure de la taille d'un écran.

a) Le pied
b) Le nez
c) Le pouce
d) Le coude

Q5 – Identifier dans la liste les technologies non filaires

a) FIREWIRE
b) BLUETOOTH
c) WIRELESS
d) USB (UNIVERSAL SERIAL BUS)

Q6 Quelles sont les caractéristiques du système d'exploitation Linux :

a) Libre , mono tache
b) Propriétaire , multitâche, multi utilisateurs
c) Libre, multitâche, multi utilisateur, graphique
d) Mono tache, interface caractère

Q7 Un antivirus intégrant un pare-feu est :

a) Un système d'exploitation
b) Un utilitaire
c) un outil bureautique
d) un extincteur

Q8 Quelle est la structuration d'une adresse mail ?

a) Le serveur de messagerie
b) Login, @,yahoo.ci
c) Login@serveur de messagerie
d) www.nomde domaine

Q9 Le logiciel Microsoft access 2010 est:

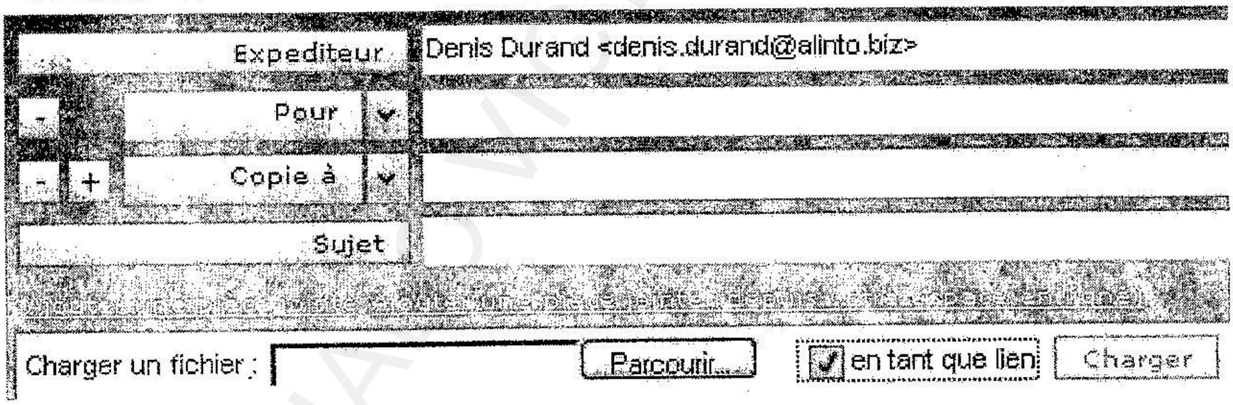
a) un système intégré de sécurité
b) un tableur avancé
c) un système de gestion de base de données
d) un utilitaire

Q10 Quelles expressions correspondent à un réseau social:

a) #LesLivresOntLaParole
b) Bmichel aime votre mail
c) Bernard a noté le livre
d) Olivia recommande la vidéo

EX01 M Durand veut envoyer un sujet d'examen au secrétaire principal dont l'adresse mail est kofisp1@gmail.com. Le chemin du fichier est : 'c:\docsexam\exafran2015s2.docx'
Le texte du message est : *Bjr M le SP;*
vous trouverez ci-joint le sujet d'examen de techniques d'expression. Le mot de passe du fichier est 'miclc31'. cordialement

Reproduire et remplir l'écran d'envoi du message sachant qu il envoie une copie au responsable de niveau L1 (audeb@yahoo.fr) et à lui même.



EX02 Le tableau ci-dessus montre les performances trimestrielles des commerciaux dans une entreprise. Donner les formules de remplissage du tableau et la méthode de tri pour sélectionner le meilleur commercial. On suppose que Matricule est saisi dans la cellule A1

Matricule	Nom et Prénoms	Octobre	Novembre	Décembre	Total	Pourcentage
2000131	Annick josee	4 750 000	4 905 000	6 887 500		
2005010	Yao Raissa Aline	9 150 000	4 150 000	7 320 000		
1999004	Sigui Richard	7 500 150	3 750 075	8 250 165		
2000140	Atto Victor	1 878 000	5 634 000	2 817 000		

COMPOSITION DE TECHNIQUE D'EXPRESSION
NIVEAU : L-1
DUREE : 2 heures

EXERCICE 1 : Classez ces phrases selon le registre

J'ai entendu une voix tout près de moi :
-Hop, je l'ai eue !
C'était Abolfazl. J'ai tourné la tête : il avait l'air de chercher quelque chose dans sa main et prononçait des phrases sans suite :
-Ah, coquine ! Je t'ai bien eue ! Du poulet à la sauce !
Il faisait tout à fait nuit à présent, et le réverbère de la rue était bien faiblard : je me demande comment il arrivait à repérer des mouches dans cette obscurité ! Et par cette bise et ce froid ! Il devait se faire des idées ! Il habitait deux maisons plus loin, et il y avait belle lurette qu'il avait l'esprit dérangé. Du matin au soir, il restait assis devant chez lui à attraper ses mouches ; on prétendait qu'il les mangeait – en tout cas je ne l'avais jamais vu faire. Je crois qu'il faisait seulement semblant, pour se vanter. Il fallait l'entendre :
-Toi, je vais t'accommoder en ragoût !
Ou encore :
-Hier, j'en ai attrapé une, grosse comme un moineau ! Tu n'imagines pas le goût de cette cuisse !
~~Je me~~ suis décidé à entamer la conservation
-Alors, Abolfazl, quel goût ça a ?
-Le goût du blé grillé. Tu ne sais pas, cette fois, elle était grosse comme un moineau !
-Tu es sûr que tu ne rêves pas ? Comment arrives-tu à trouver des mouches par un tel froid ?
-Hé, qu'est-ce que tu en sais, toi ? Je récite des formules magiques, et elles viennent toutes seules.

EXERCICE 2 : relevez dans ce texte les propositions indépendantes et les propositions subordonnées

En descendant de l'avion, il fut saisi par la moiteur étouffante et il enleva sa veste. L'étudiant entra timidement, il se faufila jusqu'à sa place, puis s'installa en silence. Dès que vous sentirez une amélioration, arrêtez le traitement. Les enfants accouraient de toute part mais n'osaient s'approcher des étrangers qui leur faisaient des signes. Le blessé s'immobilisa, vacilla, s'écroula enfin. Quand il était prêt et qu'il avait embrassé sa mère, il partait. Quand il comprit ce qu'il avait fait, il s'enfuit. Parce qu'il était un excellent musicien, tout le monde le sollicitait. La jeune fille, trop impressionnée, n'a pas réussi son examen. Donc, elle redoublera. Bien qu'on ne lui ait pas fait la moindre remarque, il refusa d'aller plus loin. Si personne ne répond, il exigera qu'on lui donne des explications.

EXERCICE 3 : Reconstruisez ces phrases de sorte que le verbe devienne impersonnel par son contexte.

Hommes et femmes, jeunes et vieux, attendaient avec impatience la fête de la nouvelle igname parce qu'elle entamait la saison de l'abondance. Un jeune de trois ans sautait sur sa mère, l'ennuyant et faisant toutes sortes de sottises, jusqu'à ce qu'elle se fâchât et lui donnât une claque puissante. La caverne où se tenait le lion était inaccessible. Un énorme gorille femelle se prélassait au soleil. Un chien bien entretenu sautait sur son patron, s'amusant avec finesse sans faire de sottises.

EXERCICE 4 : Remplacez chaque souligné par une proposition subordonnée de sens proche

Il répond toujours sans mon autorisation. Au lever du jour, le coq chante. Le lièvre réussira toujours grâce à son intelligence. La fillette avoua son erreur pour être pardonnée. Malgré sa timidité, il a pris la parole. Les ouvriers demandent une amélioration de leurs conditions de travail. Le speaker annonce la fin des émissions. Nous attendons sa réussite au Baccalauréat. Le Commandant de bord souhaite le confort des passagers. Je suis persuadé de son honnêteté.

UNIVERSITE **FHB**

U.F.R.Maths-Info

Année

2014-2015

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

Première Session

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1 (10 points)

Le corps de base est $\mathbb{R}$.

1) Trouver les inverses des matrices suivantes :

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

2) Une matrice carrée M est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$. Le plus petit entier p vérifiant ce qui précède, s'appelle l'ordre de nilpotence de M.

On suppose M est nilpotente d'ordre r.

Démontrer que la matrice $(I - M)$ est inversible et d'inverse $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \ldots + M^{r-1}$.

Où I est la matrice identité de même ordre que M.

3) Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, Calculer A^m, $m \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2(10 points)

Soient m, a, b, c des réels, et $(S_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz &= a \\ x + my + z &= b \\ x + y + mz &= c \end{cases}$.

1. Donner la matrice du système (S_m) et déterminer son rang suivant m.
2. Déterminer les solutions de (S_m) suivant les valeurs de m, a, b, c.

UNIVERSITE **FHB** Année

U.F.R.Maths-Info 2014-2015

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

Deuxième Session

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1 (10 points)

Soit A un élément nilpotent de $M_n(\mathbb{R})$(i.e. qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = 0$).

Si p est le plus petit entier k tel que $A^k = 0$. On définit alors la matrice $\exp(A)$ par :

$$\exp(A) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{1}{r!} A^r.$$

1.Montrer que, si A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent, $A + B$ est une matrice nilpotente et que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

2. Montrer que $\exp(A)$ est inversible.

3. Calculer $\exp(A)$ où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

EXERCICE 2(10 points)

Soient $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1- a. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.

b. En déduire la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} -x + y + z & = 2 \\ 3x + 5y + 3z & = 1 \\ x + y - z & = -3 \end{cases}.$$

2- Résoudre, à partir des résultats précédent uniquement, le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 z^2}{x^2} & = e^4 \\ x^6 y^{10} z^6 & = e^2 \\ \dfrac{x^2 y^2}{z^2} & = e^{-6} \end{cases}$$

UNIVERSITE **FHB**

U.F.R.Maths-Info

Année

2014-2015

EXAMEN D'ESPACES VECTORIELS & APPLICATIONS LINEAIRES

L1

Prémière Session

Durée : 1 H 45

EXERCICE 1 (04 points)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ où :

$$\oplus : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (a,b) \longmapsto a \oplus b = ab \end{cases} ; \otimes : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, b) \longmapsto \lambda \otimes b = b^\lambda \end{cases}.$$

EXERCICE 2 (06 points)

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,; x + y + z = 0\}$ et

$G = \{(a-b, a+b, b) \in \mathbb{R}^3 \,; a, b \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

   Donner les dimensions de F et G.

2. Déterminer $F \cap G$ et sa dimension.

EXERCICE 3 (10 points)

$\beta = (i; j; k)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(i) = 2i + 2j + k$; $f(j) = i + 3j + k$; $f(k) = i + 2j + 2k$.

1- a- Donner la matrice M de f dans la base β.

b- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis donner la matrice de f^{-1} dans la base β.

c- Déterminer l'image et le noyau de f.

2- a- Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\det(M - \lambda I) = 0$, où I est la matrice unité d'ordre 3.

(On pourra remarquer que 1 est une racine).

b- $E = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,; f(u) = u\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: Déterminer une base de E :

3- On donne les vecteurs $u = (1;0;-1)$, $v = (0;1;-2)$ et $w = (1;1;1)$.

a- Montrer que $\beta' = (u; v; w)$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

b- Exprimer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.

c- En déduire la matrice D de f dans la base β'.

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2014 – 2015

LICENCE 1
ECUE : Espaces vectoriels
Session du 12 février 2016 - Durée : 2 heures.

Exercice 1. *Montrer que l-ensemble F défini par :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : \; x + y + z = 0; \quad x + 2y - z = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$. En déterminer une base et la dimension.

Exercice 2. *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, f une application linéaire de E dans F. Soit $g : E \times F \to E \times F$ l'application définie par $g(x, y) = (x, y - f(x))$.*

(a) *Montrer que g est une application linéaire.*

(b) *Montrer que g est un isomorphisme.*

Exercice 3. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.*
2. *On pose : $c_1 = e_1$; $c_2 = e_1 + e_2 - e_3$; $c_3 = e_1 + e_2 + e_3$.*
   (a) *Montrer que $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{C}$.*
3. *Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2014 – 2015

MIAGE 1
ECUE : ESPACES VECTORIELS
Session du 10 Août 2015 - Durée : 2 heures.

Exercice 1. *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ sa base canonique :*

$$e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1).$$

Soit $E \to E$ l'endomorphisme de E défini par :

$$g(x,y) = (-5x - 14y, 3x + 8y).$$

1. *Donner la matrice M de g dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$.*
2. *On pose :*
$$f_1 = (7,-3), \quad f_2 = (2,-1).$$
3. *Montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ est une base de E. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.*
4. *Calculer la matrice D de g dans la base $\mathcal{F}$.*
5. *Monter que, quel que soit l'entier naturel n,*
$$M^n = PD^nP^{-1}.$$
En déduire la valeur explicite de M^n pour tout entier naturel n.
6. *Soit (u_0, v_0) un couple de nombres réels. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier natuel n, on ait :*
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -10u_n - 28v_n \\ v_{n+1} &= 6u_n + 16v_n. \end{aligned} \qquad (1)$$
Calculer u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.
On pourra utiliser les question précédentes en remarquant que
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(-5u_n - 14v_n) \\ v_{n+1} &= 2(3u_n + 8v_n). \end{aligned} \qquad (2)$$

Établissement :

UFR MI

Année

2014-2015

EXAMEN ANALYSE RÉELLE

Première session

Licence 1

Durée : **02H30**

EXERCICE 1 :

Soit x un nombre réel strictement positif.

1. Démontrer (sans utiliser la théorie de l'intégration) que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1}e^{px/n}\right)=\dfrac{e^x-1}{x}$.
2. En déduire la relation suivante : $\displaystyle\int_0^x e^t dt = e^x - 1$.

EXERCICE 2 :

1. Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'existence d'une période T pour f entraîne la propriété suivante :

   La fonction F définie pour tout nombre réel x par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)dt$ est constante.
2. On note f la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

   On pose pour tout entier $n\geq 1$, $I_n=\displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

   (a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

   (b) Montrer que I_n est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.

EXERCICE 3 :

Calculer la limite : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{\sin(x)}-\sqrt{sh(x)}}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{\tan(x)}\right)}$.

EXERCICE 4 :

1. Résoudre l'équation différentielle suivante en donnant son type : $y'-\dfrac{y}{x}+x^3y^4=0$.
2. Donner une équation différentielle ayant $e^{-x}\cos(2x)$ et $e^{-x}\sin(2x)$ comme solutions.

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR de Mathématiques et Informatique

Année 2014-2015

Epreuve de la deuxième session d'Analyse Réelle en L1

Durée : 03 heures
Rediger avec soin et rigueur

Exercice I (04 points)
Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$ (01 point)

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(1+x)^2} dx$ (01,25 points)

c) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$; $n \in \mathbb{N}^*$. (01,75 points)

Exercice II (04 points)
1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnele

$$f(x) = \frac{4x}{x^4 - 1} \quad \text{(01,25 point).}$$

2) Calculer l'intégrale $I(A) = \displaystyle\int_2^A f(x)dx$; $A \geq 2$ (01,75 points)

et en déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ (01 point).

Exercice III (06 points)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y'\sqrt{1+x^2} - y = 1$ (0,75 point)

b) $y'(2 + \cos x) + y \sin x = (2 + \cos x) \sin x$ (02 points)

c) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + xchx$ (03,25 points)
(on pourra écrire chx en fonction de e^x et utiliser le principe de superposition des solutions)

Exercice IV (06 points)

On se propose de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(-x) = x \quad et \quad f(0) = 1 \quad (E)$.

1) Comment obtient-on le système

$$\begin{cases} f''(x) + f(-x) = x \\ f''(-x) + f(x) = -x \end{cases} \quad \text{(0,5 points)}$$

2) On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$.

a) Quelle est la parité de g et de h (0,75 point) ?

b) Etablir deux équations différentielles linéaires du second ordre dont g et h sont solutions (02,75 points).

c) Déduire de b) la solution f de (E) (02 points).

Université Félix Houphouet BOIGNY Cocody UFRMI

DEUXIEME SESSION

Année 2014 -2015

Epreuve D'Algorithme

(1h30

Exercice 1 : Quelles seront les valeurs des variables A, B et C après exécution des instructions suivantes ?

Variables A, B, C en Entier

Début

A ← 5

B ← 3

C ← A + B

A ← 2

C ← B – A

Fin

Exercice 2 : Ecrire un algorithme qui demande deux nombres à l'utilisateur et l'informe ensuite si leur produit est négatif ou positif (on laisse de côté le cas où le produit est nul). Attention toutefois : on ne doit **pas** calculer le produit des deux nombres.

Exercice 3 : Ecrire un algorithme qui lit le prix HT d'un article, le nombre d'articles et le taux de TVA, et qui fournit le prix total TTC correspondant. Faire en sorte que des libellés apparaissent clairement.

Exercice 4 : Un magasin de reprographie facture 15 francs les dix premières photocopies, 10 francs les vingt suivantes et 5 francs au-delà. Ecrivez un algorithme qui demande à l'utilisateur le nombre de photocopies effectuées et qui affiche la facture correspondante

Partie Programmation en langage PASCAL

Exercice 1 : Ecrire un programme en pascal qui, à partir d'un nombre positif **n** donné, calcule et affiche sa factorielle.

Exercice 2 : Ecrire un programme qui saisit les composantes des vecteurs ***u* et** *v*,calcule le produit scalaire de ces vecteurs réels de dimension ***n***.

Exercice 3 : Ecrire unprogramme permettant de :

a) saisir 100 notes ;
b) faire la somme de ces 100 notes ;
c) Calculer la moyenne de ces notes ;
d) Donner le nombre de notes supérieures à la moyenne ;
e) Afficher ces notes supérieures à la moyenne.

Exercice 4 : Un étudiant passe un examen dans trois matières. Il est admis si :

- soit, il obtient au moins **9** dans chacune des matières ;

- soit, la moyenne des trois matières est au moins égale à **10** et la note la plus faible égale au moins à **8**.

- si ces conditions ne sont pas remplies, alors il est recalé.

Ecrire un programme correspondant.

Université Félix Houphouet BOIGNY Cocody UFRMI

DEUXIEME SESSION

Année 2014 -2015

EPREUVE DE PROGRAMMATION EN PASCAL (1h30)

Exercice 1

Soit l'algorithme suivant :

```
Début
    Lire (n)
    Pour k de 1 à n répéter
    Lire (T[k])
    FinPour
    Lire (v)
    [trv ← faux, i ← 0] répéter
     i ← i + 1
    trv ← (T[i] = v)
    Jusqu'à (i = n) ou (trv)
       Si (trv) Alors
          rt ←" est dans T "
         Sinon rt ←" n'est pas dans T "
       FinSi
       Ecrire (v, rt)
Fin
```

Traduire cet algorithme en Pascal.

Exercice 2

Ecrire un programme en Pascal qui permet de calculer et d'afficher la distance entre deux points dont les coordonnées sont données. Soient les points M (a, b) et N (c, d) ; la distance entre eux est donnée par la formule suivante :

$$d(M, N) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Exercice 3

Ecrire un programme qui permet de calculer et d'afficher le PGCD de deux entiers non nuls donnés.

Exercice 4

Ecrire en pascal un programme intitulé FACTORIELLE, qui permet de lire un entier **nb** positif puis de calculer et afficher son factoriel.

UFHB-UFRMI: Licence 1
UE: Probabilités-Statistique

Année Académique
2014/2015

ECUE Statistique - Semestre 2
Examen 1ère session
Durée : 1 h 30

Exercice 1 On a noté dans le tableau suivant, la distribution de 400 personnes selon la catégorie socio-professionnelleet le sexe :

Catégorie socio-professionnelle \ Sexe	Hommes	Femmes
Ouvriers	122	78
Cadres moyens	98	62
Cadres supérieures	30	10

(1) Déterminer les distributions marginales.

(2) Calculer le coefficient C de Cramer.

Exercice 2

Soient (x,y) un couple de variables quantitatives. On a calculé les deux droites de régression, celle de y sur x et celle de x sur y, par la méthode des moindres carrés. On a obtenu les deux droites suivantes : $y = 0,232x + 3,699$ et $x = 1,140y - 0,739$.

(1) Quel est le point d'intersection des deux droites de régression ? En déduire les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

(2) Partant des coefficients directeurs des deux droites, déterminer le coefficient de corrélation linéaire r(x,y).

(3) Sachant que $\text{Cov}(x, y) = 0,366$, en déduire les variances σ_x^2 et σ_y^2.

Exercice 3

La répartition des salaries mensuels d'une entreprise est donnée par le tableau suivant

Salaires	[1000,1400[	[1400,2000[	[2000,2200[	[2200,3000[
Effectifs	100	150	40	10

(1) Calculer le salaire moyen, le salaire le plus observé ainsi que l'écart-type de cette distribution

(2) Tracer l'histogramme de la distribution des salaires.

(3) Calculer et interpréter les quartiles de cette distribution.

(4) Tracer la boîte à moustache de cette série.

(5) Quelle est la proportion des employés dont le salaire est compris entre 1300 et 2100?

Université Félix H. Boigny, Licence 1
Semestre 2
UE: Probabilité et Statitique

Année universitaire
2014/2015

Examen de Probabilité (session 1)(20 pts) - 01h15

NB: Tout document est strictement interdit. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans la l'attribution des points.

Exercice 1 (7 pts)

(1) On constitue un groupe ordonné de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes. Calculer la probabilité des évènements suivants

(a) A: "Le groupe contient des personnes de même sexe"

(b) B: "Le groupe contient au moins une femme et au moins un homme"

(2) On suppose maintenant que le choix se fait simultannement avec des cumuls éventuels. Calculer la probabilité des évènements suivants

(a) D: "Le groupe contient au moins une femme"

(b) B: "Le groupe ne contient que deux femmes"

Exercice 2 (8 pts)

Soient trois sacs notés respectivement A contenant deux billes rouges, trois billes bleus; B contenant deux billes bleus, quatre billes vertes et C contenant une bille verte, une bille rouge. On joue en lançant d'abord un dé parfait. On tire ensuite une bille dans un sac choisi en fonction du résultat du dé. Le sac A est choisi quand le dé donne 1, 2 ou 3, le sac B quand on obtient 4 ou 5 et le sac C quand on obtient 6.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir une bille rouge par ce jeu?

(2) On obtient une bille verte. Quelle est la probabilité que cette bille soit issu du sac B?

(3) On obtient une bille bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3?

(4) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une bille verte, sachant que le lancer du dé a donné 3 ou 6?

(5) Est-ce que l'évènement "choisir dans le sac C" et l'évènement "obtenir une bille rouge" sont indépendants? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (5 pts)

(1) Donner la définition exacte d'une probabiité $\mathbb{P}$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Comment appelle-t-on le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$?

(2) Quelle sont les éléments à décrire pour avoir la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète notée X.

(3) Soit Y une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ de fonction de densité f.

(a) Définir la fonction de repartition de Y notée F.

(b) Dnner l'expression du moment centré d'ordre 2 de Y. Que represente t'il pour la variable Y.

Université Félix H. Boigny, Licence 1
Semestre 2
UE: Probabilité et Statitique

Année universitaire
2014/2015

Examen de Probabilité (session 2)(20 pts) - 01h15

NB: Tout document est strictement interdit. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans la l'attribution des points.

Exercice 1 (7 pts)

(1) On constitue un groupe ordonné de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes. Calculer la probabilité des évènements suivants

(a) A: "Le groupe contient des personnes de même sexe"

(b) B: "Le groupe contient au moins une femme et au moins un homme"

(2) On suppose maintenant que le choix se fait simultannement avec des cumuls éventuels. Calculer la probabilité des évènements suivants

(a) D: "Le groupe contient au moins une femme"

(b) B: "Le groupe ne contient que deux femmes"

Exercice 2 (8 pts)

Soient trois sacs notés respectivement A contenant deux billes rouges, trois billes bleus; B contenant deux billes bleus, quatre billes vertes et C contenant une bille verte, une bille rouge. On joue en lançant d'abord un dé parfait. On tire ensuite une bille dans un sac choisi en fonction du résultat du dé. Le sac A est choisi quand le dé donne $1, 2$ ou 3, le sac B quand on obtient 4 ou 5 et le sac C quand on obtient 6.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir une bille rouge par ce jeu?

(2) On obtient une bille verte. Quelle est la probabilité que cette bille soit issu du sac B?

(3) On obtient une bille bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3?

(4) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une bille verte, sachant que le lancer du dé a donné 3 ou 6?

(5) Est-ce que l'évènement "choisir dans le sac C" et l'évènement "obtenir une bille rouge" sont indépendants? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (5 pts)

(1) Donner la définition exacte d'une probabiité $\mathbb{P}$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Comment appelle-t-on le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$?

(2) Quelle sont les éléments à décrire pour avoir la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète notée X.

(3) Soit Y une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ de fonction de densité f.

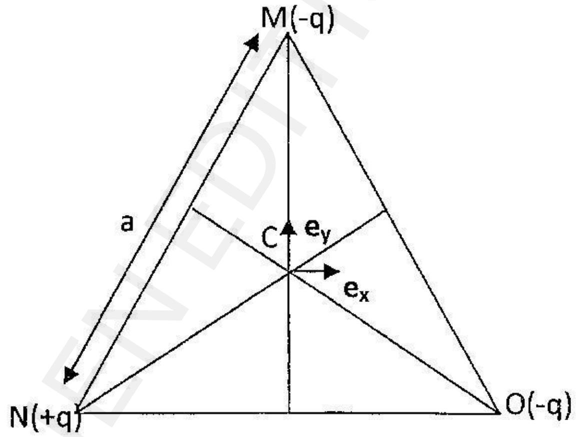
(a) Définir la fonction de repartition de Y notée F.

(b) Dnnner l'expression du moment centré d'ordre 2 de Y. Que represente t'il pour la variable Y.

LICENCE 1 Math - Info
EXAMEN : ELECTRICITE
1ère session / Durée : 2 H

Exercice 1 :

Trois charges **+q**, **-q** et **-q** sont placées aux sommets d'un triangle équilatérale MNO de côté a comme indiqué la figure ci – contre :



On désire déterminer le **champ $\vec{E}$** et le **potentiel V** électrostatiques régnant au **centre C** du triangle en fonction de a et q. Pour cela :

1. Reprendre la figure en y représentant le champ $\vec{E}$.
2. Montrer que la distance $r = OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$
3. Déterminer les caractéristiques et l'expression du champ $\vec{E}$. On considérera le repère $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
4. Déterminer l'expression du potentiel V puis calculer E et V.

Application numérique : q = 0,1 nC, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 N.m^2.C^{-2}$ et a = 10 cm.

Exercice 2 :

Un fil rectiligne, infini, de dimensions transversales négligeables, porte une densité de charges linéique uniforme λ > 0. Le fil est parallèle à l'axe (Oz) et coupe le plan (xOy) en **F(a ; 0 ; 0).**

1. Déterminer le champ $\vec{E}$ et le potentiel V en un point M du plan (xOy), en introduisant la variable r = FM.
2. Exprimer le potentiel V_0 en O, puis $V - V_0$ en fonction de λ, r et a, sans faire intervenir de constante supplémentaire.
3. On place maintenant (et jusqu'à la fin de cet exercice) un second fil, portant la densité linéique $-\lambda$, parallèle au premier fil, et coupant le plan (xOy) en ***F'(-a ; 0 ; 0).*** M étant un point quelconque du plan (xOy), calculer le potentiel V en M, créé par l'ensemble des deux fils, puis exprimer le potentiel V_0 en O, et enfin $V - V_0$ en fonction de λ, $FM = r$, $F'M = r'$, sans constante supplémentaire.

4. Déterminer la valeur de V_0 pour que V tende vers zéro lorsque le point M s'éloigne indéfiniment dans le plan (xOy). On gardera cette valeur dans la suite.

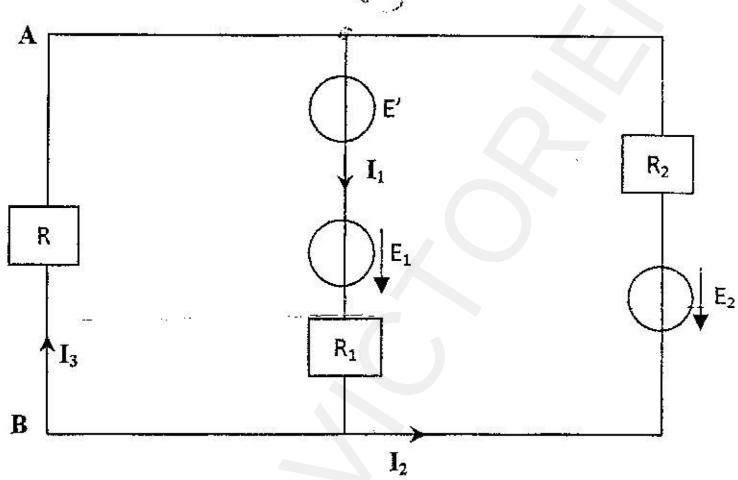
5. On pose $\alpha = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\lambda}$

   Montrer que les surfaces équipotentielles sont définies par une relation $\frac{r'}{r} = k$.

   Calculer k en fonction de α et du potentiel V.

Exercice 3 :

On considère le montage électrique ci-dessous où E_1 et E_2 désignent des générateurs et E' un récepteur non polarisé. On donne $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R = 1\ \Omega$; $E' = 4$ V, $E_1 = 20$ V et $E_2 = 10$ V.



1. Remplacer le récepteur non polarisé par son schéma équivalent. En vous servant des lois de Kirchhoff, calculer les courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans les différentes branches du circuit.
2. En appliquant le théorème de Norton à la portion du circuit située à droite de AB, exprimer puis calculer I_N et R_N.
3. En déduire le courant I_3 circulant dans la résistance R.

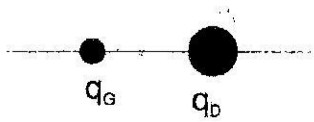
Université F. HOUPHOUET BOIGNY, Abidjan – Cocody

LICENCE 1 Math - Info
EXAMEN : ELECTRICITE
2ème session / Durée : 2 H

Exercice 1 : (8 points)

NB : l'exercice 1 : question à choix multiple (indiquer la bonne réponse parmi ces propositions)

I. Deux charges de signes opposés sont placées sur une ligne comme montré ci-dessous. La charge de droite est trois plus grande que celle de gauche. Autre qu'à l'infini, indiquer où le champ électrique est nul (égal à zéro)?



A. Entre les deux charges
B. À droite de la charge sur la droite
C. À gauche de la charge sur la gauche
D. Le champ électrique n'est nulle part égal à zéro
E. Pas assez d'information – besoin de savoir quelle charge est positive

II. Charge Positive

Placer une charge positive dans un champ électrique. Elle se déplacera du:

A. potentiel électrique le plus haut vers le plus bas; l'énergie potentielle la plus basse à la plus élevée
B. potentiel électrique le plus haut vers le bas ; l'énergie potentielle la plus élevée à la plus basse
C. potentiel électrique le plus bas vers le plus élevé; l'énergie potentielle la plus basse à la plus élevée
D. potentiel électrique le plus bas vers le plus élevé; l'énergie potentielle la plus élevée à la plus basse

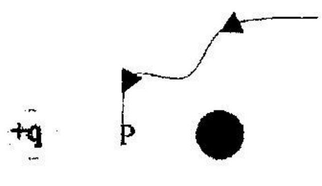
III. Charge Négative

Placer une charge négative dans un champ électrique. Elle se déplacera du:

A. potentiel électrique le plus haut vers le plus bas; l'énergie potentielle la plus basse à la plus élevée
B. potentiel électrique le plus haut vers le bas ; l'énergie potentielle la plus élevée à la plus basse
C. potentiel électrique le plus bas vers le plus élevé; l'énergie potentielle la plus basse à la plus élevée
D. potentiel électrique le plus bas vers le plus élevé; l'énergie potentielle la plus élevée à la plus basse

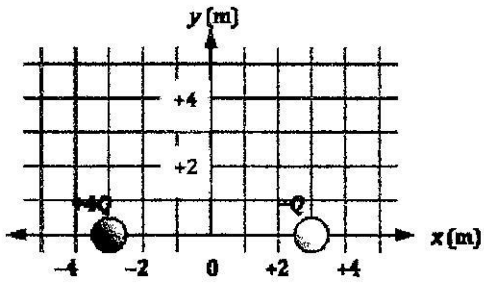
IV. Deux charges ponctuelles

Le travail effectué dans le déplacement d'une charge de test positive de l'infini au point P à mi-chemin entre deux charges de grandeur + q et -q:



A. est positif.
B. est négatif.
C. est zéro.
D. ne peut être déterminé car pas assez d'information est donnée.
E. Je ne sais pas

Exercice 2 : (4 points)



Une charge +4Q est placée à (-3, 0) m et une charge -Q est placée à (3, 0) m comme indiqué dans le schéma ci-dessus.

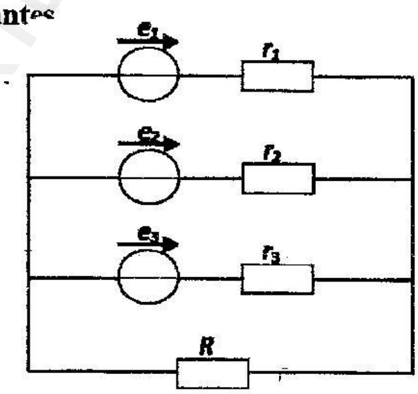
a. Déterminer la coordonnée x de la position où le champ électrique est égal à 0 due aux deux charges.
b. Déterminer la coordonnée x de la position où le potentiel électrique est égal à 0 due aux deux charges.
c. Si Q = 1.00µC, calculer le travail fourni pour apporter un électron de l'infini à l'origine.

Pendant que l'électron se déplace vers l'origine, le travail effectué par le champ est-il positif, négatif ou nul?

L'exercice 3 est constitué de deux parties (I et II) indépendantes

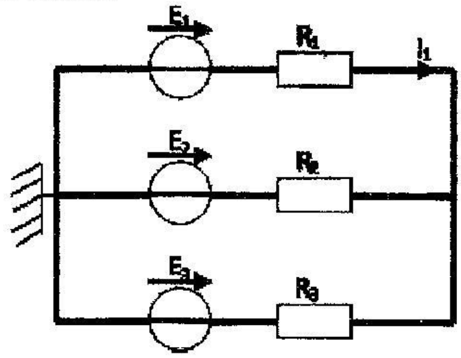
Exercice 3 : (8 points)

I. Déterminer l'intensité du courant traversant la résistance $R = 1\ \Omega$ dans le montage suivant. On donne $e_1 = 1$ V, $e_2 = 2$ V, $e_3 = 4$ V et $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 2\ \Omega$, $r_3 = 4\Omega$.



II.

a. Déterminer par application des lois de Kirchhoff (ou méthode des courants fictifs), le courant I_1 circulant dans la résistance R_1 du montage ci-dessous.



b.

- Déterminer le courant, noté I_{11}, quand $E_2 = E_3 = 0$?
- Déterminer le courant, noté I_{12}, quand $E_1 = E_3 = 0$?
- Déterminer le courant, noté I_{13}, quand $E_1 = E_2 = 0$?

Montrer que l'on a bien : $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$.
Enoncer le théorème de superposition.

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody)

UFR Mathématique-Informatique (MI)

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2014 – 2015

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours – Application (5 points)

On considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale monochromatique se propageant dans le vide.

1) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de cette onde en fonction de l'amplitude E_0 du champ électrique, de la perméabilité magnétique du vide μ_0, de la célérité c de l'onde dans le vide, de la pulsation ω de l'onde, du temps t, du vecteur d'onde $\vec{k}$, du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde $\vec{u}$.

2) Après l'avoir définie, calculer l'intensité I de cette onde en fonction de E_0, μ_0 et c.

Application :

Un faisceau laser de puissance 1,0 mW et de fréquence $4{,}74.10^{14}$ Hz, a une section égale à $3{,}14.10^{-6}$ m^2. Déterminer :

a) L'énergie ε reçue pendant 1,0 s par un écran interceptant perpendiculairement ce faisceau.

b) L'intensité lumineuse I.

c) L'amplitude E_0 du champ électrique. (On supposera que le milieu considéré est le vide).

Exercice 2 : Construction d'images – Tracé de rayons lumineux (3 points)

On fera les schémas directement sur la feuille annexe.

1/ Figure 1 : Construire l'image de l'objet AB à travers le dioptre plan (Σ).

2/ Figure 2 : Construire l'image de l'objet AB à travers le miroir plan (M).

3/ Figure 3 : Construire l'image de l'objet AB à travers le miroir sphérique (M).

4/ Figure 4 : Construire l'image de l'objet AB à travers la lentille mince (L).

5/ Figure 5 : Tracer les faisceaux entrant et sortant du doublet L_1-L_2.

6/ Figure 6 : Schématiser la marche du rayon lumineux à travers la demi-sphère de centre C.

Exercice 3 : Microscope optique (12 points)

On considère un microscope optique, fonctionnant en lumière blanche de longueur d'onde moyenne $\lambda = 0{,}5\ \mu$m, dont l'objectif et l'oculaire sont assimilés à deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2, de focales images f_1' et f_2'. L'ensemble est dans l'air. L'œil est placé en Ω au voisinage du foyer image de l'oculaire F_2'. Il observe l'image définitive située à la distance minimale de vision distincte d_m de Ω.

On notera Δ l'intervalle optique séparant le foyer image de L_1 du foyer objet de L_2. Pour les applications numériques, on prendra : f_1' = 2 mm ; f_2' = 30 mm ; Δ = 180 mm ; d_m = 25 cm.

1/ L'œil se trouve au centre du cercle oculaire, image de la monture de L_1 donnée par L_2.

a) Trouver $\overline{F_2'\Omega}$ en fonction de f_1', f_2' et Δ, et calculer sa valeur.

b) En déduire le diamètre a du cercle oculaire sachant que L_1 a un diamètre D = 11 mm.

2/ Trouver le grandissement linéaire du microscope, γ, en fonction de f_1', f_2', Δ et d_m, et calculer sa valeur.

3/ Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil ne peut distinguer deux points que si l'angle sous lequel il les voit est au moins égal à ε = 1,5'.

a) Trouver en fonction de ε, d_m et γ, la taille ℓ du plus petit objet AB dont les extrémités A et B sont vues distinctement à travers le microscope.

b) Calculer ℓ et comparer cette valeur à la longueur d'onde moyenne du rayonnement utilisé. En déduire le phénomène optique qui limite la taille du plus petit détail véhiculé par le microscope optique.

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody)

UFR MI

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

DEUXIEME SESSION 2014 – 2015

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures 30 minutes

Exercice 1 : Intensité lumineuse (5 points)

On considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale monochromatique se propageant dans le vide.

1) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de cette onde en fonction de l'amplitude E_0 du champ électrique, de la perméabilité magnétique du vide μ_0, de la célérité c de l'onde dans le vide, de la pulsation ω de l'onde, du temps t, du vecteur d'onde $\vec{k}$, du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde $\vec{u}$.

2) Après l'avoir définie, calculer l'intensité I de cette onde en fonction de E_0, μ_0 et c.

Application :

Un faisceau laser de puissance 1,0 mW et de fréquence $4{,}74.10^{14}$ Hz, a une section égale à $3{,}14.10^{-6}$ m^2. Déterminer :

a) L'énergie ε reçue pendant 1,0 s par un écran interceptant perpendiculairement ce faisceau.

b) L'intensité lumineuse I.

c) L'amplitude E_0 du champ électrique. (On supposera que le milieu considéré est le vide).

Exercice 2 : Système catadioptrique (5 points)

Un système optique est formé d'une lentille mince convergente de focale 0,30 m et d'un miroir plan disposé à 0,15 m derrière la lentille. Déterminer la position de l'image que ce système donne d'un objet situé à 0,15 m en avant de la lentille.

Exercice 3 : Mise au point d'un doublet (10 points)

Sur le schéma ci-dessous : la distance D est fixe ; le réglage du système est réalisé en jouant sur la distance d ; $f_1' = 4$ cm et $f_2' = -6$ cm.

1. Mise au point à l'infini

a) Le système est réglé de telle sorte que les objets situés à l'infini donnent une image nette sur l'écran. Quel est nécessairement le signe de $D - f_1'$? (Expliquez votre réponse).

b) Quelle est la valeur de d, notée d_∞, correspondant à ce réglage ?

c) Faire un schéma du système et construire l'image d'un objet AB situé à l'infini et vu sous l'angle α, pour D = 5 cm.

d) Calculer la taille de l'image, $\overline{A'B'}$, en fonction de α.

2. Modification du système

a) Pour mettre le système au point sur un objet situé à distance finie, dans quel sens faut-il déplacer la lentille divergente ? (Expliquez votre réponse).

On supposera que l'objet est situé avant le foyer objet F_1 de L_1.

b) On souhaite réaliser un système tel que d_∞ corresponde à la valeur D.

Calculer la nouvelle valeur de D.

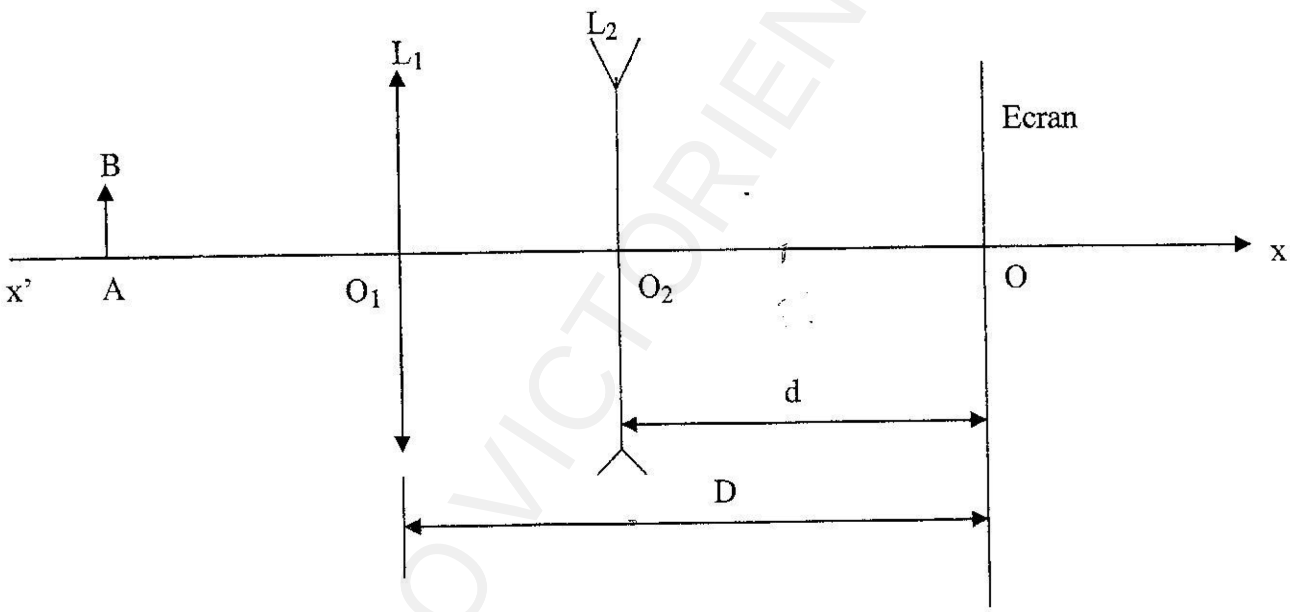
3. Latitude de mise au point

a) Dans le cas précédent (d_∞ = D), indiquer la profondeur de mise au point du système, c'est-à-dire le domaine des positions de l'objet AB susceptibles de donner une image nette sur l'écran lorsque l'on donne à d une valeur adaptée.

b) Faire un schéma soigné à l'échelle 1/ 2 permettant de déterminer la position $\overline{O_1 A}$ de A.

Retrouver le résultat par le calcul.

Donnée : d = 6 cm.



UFR MI : TEST D'EVALUATION EN SECOURISME Nov 2015 1ère SESSION

Répondez par vrai ou faux ! Vrai faux

1) La conduite à tenir face à une fracture est :
Éviter les manipulations du blessé
Pratiquer une immobilisation provisoire;

2) Le bilan d'une victime consiste à vérifier:

la conscience

la ventilation

3)Le dégagement d'urgence:

Se fait en présence d'un danger imminent

se fait après le bilan de la victime

3) La conduite à tenir face à une hémorragie est :

donner à boire à la victime

arrêter l'hémorragie

4) Les Points de compression sont :

au pli de l'aine

à la base du thorax

5) Les risques chez une victime inconsciente sont :

la chute de sa langue en arrière

l'installation des détresses ventilatoire et circulatoire

6) Les signes d'efficacité de RCP sont :

A : la reprise de la ventilation

B : la reprise de la circulation

7) La pâleur aux extrémités peut être le signe :

d'une hémorragie interne

d'une hypothermie

8) Face à un arrêt cardio ventilatoire :

A : le secouriste pratique 32 massages pour 2 insuf

B : je mets la victime en PLS

9) Les signes de malaise constatés ou à rechercher chez une victime sont

motsbredouillés;
agitation importante, gestes inappropriés

10)La conduite à tenir face aux Brûlures internes par ingestion est :

ne pas faire vomir

lui donner de l'eau à boire

NB : 1H 30mn

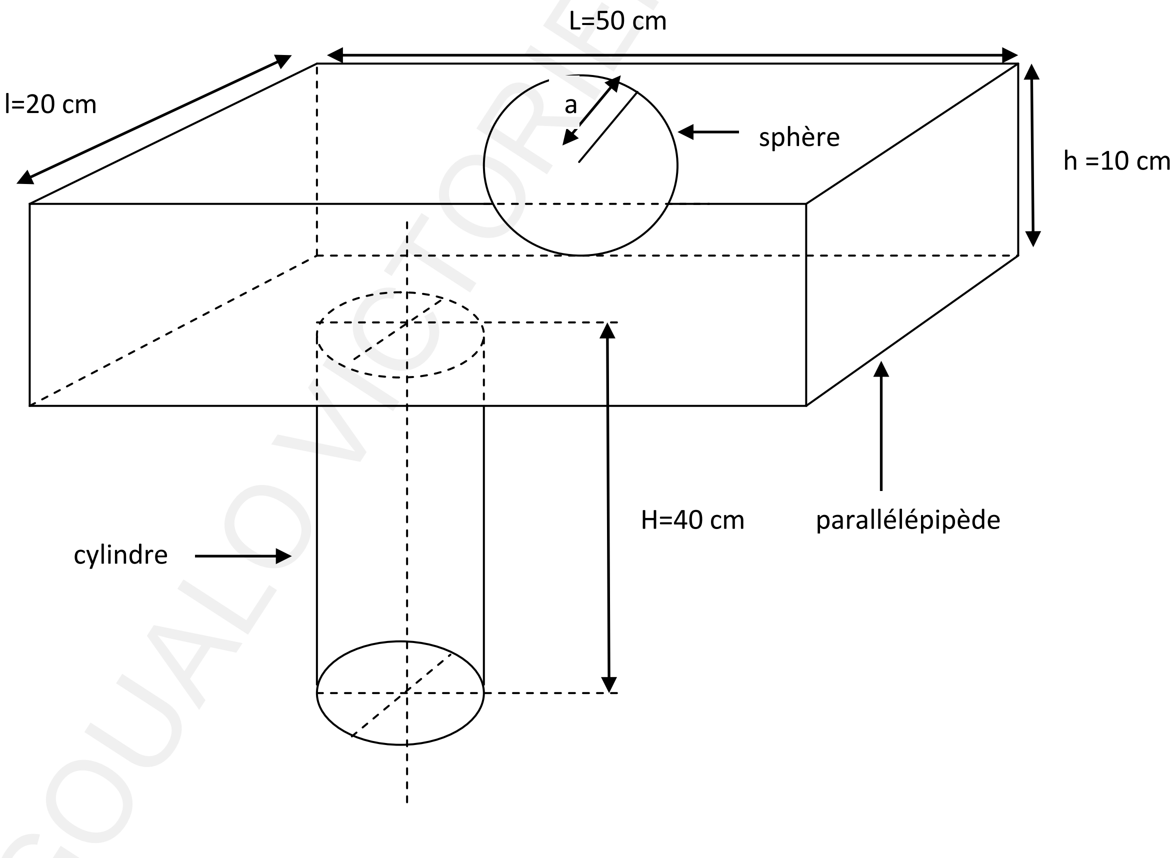
TP physique : **PETITES MESURES ET ERREURS**

PARTIE THEORIQUE

1) Après avoir lu entièrement le sujet. Donner le but du TP ?
2) Donner la formule du volume
   - v_c d'un cylindre de surface de base S et de hauteur H
   - v_p d'un parallélépipède de longueur L, de largeur l et de hauteur h
   - v_s d'une sphère de rayon a

3) Déterminer les expressions Δv_c , Δv_p et Δv_s

PARTIE PRATIQUE



Le schéma ci-dessus représente un dispositif mécanique A constitué de trois (3) parties :

- Un parallélélopipède de longeur L=50 cm, de largeur l=20 cm et de hauteur h=10 cm
- Une sphère de rayon a=10 cm
- Un cylindre de surface de base S=314 cm^2 et de hauteur H=40 cm

Toutes les dimensions ont été mesurées avec une règle graduée en millimètre

1) Soient v_c le volume du cylindre, v_p le volume du parallélépipède, v_s le volume de la sphère. Calculer v_t le volume total du dispositif A
2) Déterminer l'expression de l'erreur Δv_t et calculer Δv_t
3) La masse totale du dispositif A est m= (210228 ,8 $\pm$ 0,1) g. calculer sa masse volumique ρ ainsi que l'erreur $\Delta\rho$
4) Le dispositif mécanique A est fait en quel métal ?

Métal	Nickel	Fer	Laiton	Etain	Cuivre
$\rho(\mathrm{kg/m^3})$	8900	7860	7300	7290	8920

EXAMEN 1ère SESSION (Novembre 2013)
LICENCE 1 – TRONC COMMUN

UE ELECTRICITE : *Electrostatique*
(Durée : 1 H 30 Min.)

Il est rappelé aux étudiants que :

- ***aucun document n'est autorisé***
- *les applications numériques éventuelles devront être effectuées avec soin et **les résultats sans unités seront considérées comme nuls. on respectera les notations données dans l'énoncé.***

Le sujet comporte 1 page numérotée 1/1.

1ère partie : QUESTIONS DE COURS 6

I. Symétries

1. Enoncer le Principe de Curie.
2. Soit une sphère de rayon a, de centre O, portant une répartition surfacique uniforme de charge **σ**. Quelles sont les symétries de cette répartition de charges ?

II. Champ et Potentiel

1. Enoncer le théorème de Gauss pour le champ électrostatique.
2. Qu'est ce qu'une ligne de champ ? Donner son équation différentielle en coordonnées cartésiennes.

III. Conducteurs en équilibre

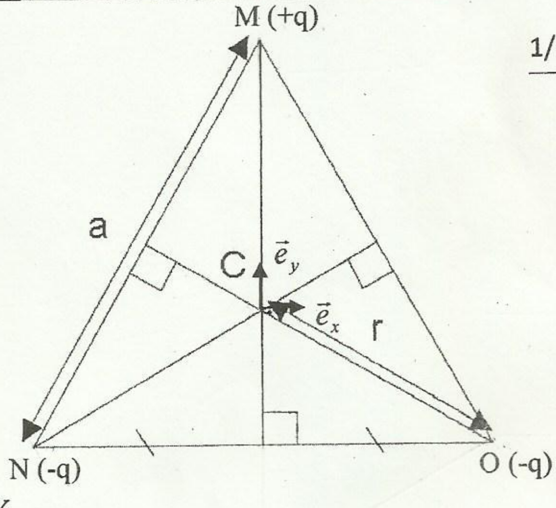
1. Qu'est ce qu'un conducteur en équilibre
2. Définir la capacité C d'un condensateur et calculer C pour un condensateur sphérique.

2ème Partie : EXERCICES

EXERCICE 1 : 8

Trois charges ponctuelles $+q$, $-q$ et $-q$ sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral MNO de côté **a** comme indiqué la figure ci-contre :

On désire déterminer le **champ** $\vec{E}$ et **le potentiel** V **électrostatiques** régnant au **centre C** du triangle en fonction de **a** et **q**. Pour cela :



1/1

1. Reprendre la figure en y représentant le champ $\vec{E}$
2. Montrer que la distance $r = OC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$
3. Déterminer les caractéristiques et l'expression du champ $\vec{E}$. *on considérera le repère orthonormé* $\left(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y\right)$
4. Déterminer l'expression du potentiel V puis calculer E et V

Application numérique : q = 0,1 nC, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\,\mathrm{N.m^2.C^{-2}}$ et a = 10 cm.

EXERCICE 2 : 6

Soit une sphère creuse de centre O et de rayon R, portant une charge uniformément repartie de densité superficielle **σ**.

– Calculer le champ ***E(r)*** et le potentiel ***V(r)*** créés par cette sphère en tout point M à la distance **r** du centre (*on considérera les cas r<R et r>R*).
On prendra le potentiel nul à l'infini.
– Tracer les courbes **E(r)** et **V(r)** pour **0 < r < ∞**.

Département : Physique et Chimie	Examen	2
	D.S.	
Matière : Physique – Section PT 1 -	Date : 11/03/2008	

N.B. L'étudiant pourra utiliser un résultat donné dans l'épreuve, qu'il n'a pu retrouver, pour la suite.

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$). Un point M de l'espace est repéré dans la base cylindrique ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$) par (r, θ, z).

ELECTROSTATIQUE

Problème

A/ On considère un cylindre creux (S) de rayon R, de longueur infinie, chargé en surface par une densité surfacique de charges uniforme $\sigma > 0$ (figure 1). Soit M un point quelconque de l'espace.

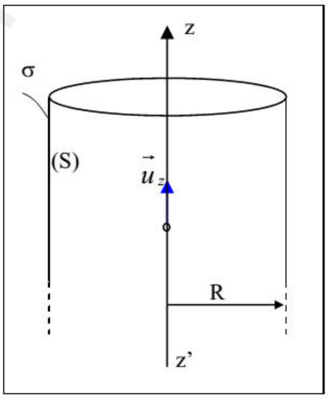


Figure 1

1) Indiquer les coordonnées dont dépend le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et déterminer sa direction.
2) a) Définir et justifier la surface de Gauss.
   b) Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace (r < R et r > R).
3) a) Tracez l'allure de E(r) en fonction de r (où E(r) est la norme du champ).
   b) Le champ $\vec{E}(M)$ est-il continu à la traversée de la surface du cylindre.
4) En prenant comme référence du potentiel $V(r = 0) = V_0$, calculez le potentiel V(r) en tout point M de l'espace.
5) a) Tracez l'allure de V(r) en fonction de r.
   b) Vérifier que le potentiel V(r) est continu à la traversée du cylindre.

B/ Une couronne cylindrique (C) d'axe $\overrightarrow{z'z}$ et de rayon intérieur R_1 et extérieur R de longueur infinie, porte une charge volumique répartie entre les surfaces des deux cylindres avec une densité constante $\rho > 0$ (figure 2).

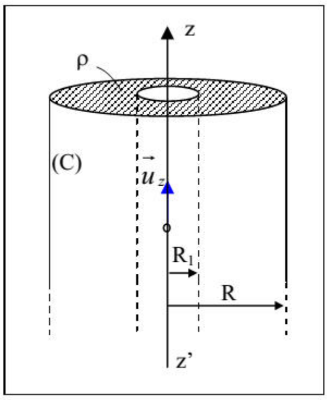


Figure 2

6) Précisez les invariances du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et déterminer sa direction.

7) a) En utilisant le théorème de Gauss, donner les expressions du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

b) Le champ $\vec{E}(M)$ est-il continu à la traversée des deux surfaces de la couronne cylindrique (C).

8) On fait tendre $R_1 \rightarrow R$, la charge totale de la distribution volumique de la couronne cylindrique est alors répartie sur la surface d'un cylindre creux de longueur infinie et de rayon R. Soit σ la densité de charges du cylindre creux.

a) Exprimer σ en fonction de ρ, R_1 et R.

b) Retrouver les expressions de $\vec{E}(M)$ crée par un cylindre creux.

9) On se place maintenant dans le cas où $R_1 = 0$ et on suppose que le rayon R est négligeable devant la longueur du cylindre chargé. La charge totale de la distribution volumique peut être considérée répartie uniformément sur un fil infini. On désigne par λ la densité linéique du fil.

a) Exprimer λ en fonction de ρ et R.

b) En déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$ crée par le fil.

c) Retrouver $\vec{E}(M)$ crée par un fil de longueur infinie à partir du théorème de Gauss.

d) En déduire l'expression du potentiel V(M) crée par le fil infini à une constante additive près qu'on notera K.

C/ On considère deux fils rectilignes, de longueurs infinies, portant des distributions linéiques de charges de densités constantes $+\lambda$ et $-\lambda$ ($\lambda > 0$). Ces deux fils sont parallèles entre eux et perpendiculaire au plan (Oxy). On désigne par A(-a/2, 0) et B(+a/2, 0) les intersections respectives du fil chargé ($-\lambda$) et celui chargé à ($+\lambda$) avec le plan (Oxy). L'origine O du repère (Oxy) est le milieu de AB (AB = a), (figure 3). Soit *M* un point du plan (Oxy) repéré en coordonnées polaires par (r, θ) avec $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM})$.

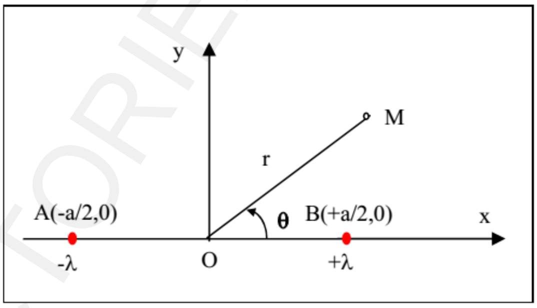


Figure 3

On désigne par V(M) et $\vec{E}(M)$ respectivement le potentiel et le champ électrostatique crées par les deux fils en un point M très éloigné des fils : $r >> a$.

10) En utilisant les résultats de **B-9-d)**, donner les expressions du potentiel $V_{-\lambda}(M)$ crée par le fil en A et du potentiel $V_{+\lambda}(M)$ crée par le fil en B (à constante additive près).

11) Sachant que le point O est pris comme origine du potentiel : $V(O) = 0$, en déduire l'expression du potentiel V(M) crée par les deux fils.

12) Dans le cadre de l'approximation dipolaire (r >> a), exprimer les distances AM et BM en fonction de r, a et θ.

13) a) Montrer que : $V(M) = \dfrac{\lambda\, a \cos\theta}{2\,\pi\,\varepsilon_0\, r}$

b) Montrer que les deux fils chargés se comportent comme un dipôle électrostatique isolé dont on précisera le moment dipolaire $\vec{p}$.

14) En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ électrostatique $\vec{E}(M)$, son module et sa direction.

On donne * $\overrightarrow{grad}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$ où f(r, θ, z) est une fonction scalaire

* Pour x << 1, $\mathrm{Log}(1+x) \cong x$ (au 1er ordre)

المعهد التحضيري للدراسات الهندسية بالمنار

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs – El Manar

Département : Physique et Chimie	**Examen**	**2**
Année universitaire : 2006-2007	**D.S.**	
Matière : Physique – Section PT 1 -	**Date : 13/03/07**	

N.B. L'étudiant pourra utiliser un résultat donné dans l'épreuve, qu'il n'a pu retrouver, pour la suite.

Problème d'électrostatique

Les parties 1 et 2 sont dépendantes.

Dans tout ce problème l'espace sera rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) et un point quelconque M de l'espace sera repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Partie 1 : Une lame chargée en volume

On considère une lame chargée en volume limitée par les plans d'équations respectives x = -h et x = +h (où e est une constante positive désignant l'épaisseur de la lame) et infinie dans les directions de Oy et de Oz (figure 1).

La lame est chargée uniformément en volume avec une densité ρ positive. Soit $\vec{E}_1(M)$ et V_1(M) le champ et le potentiel électrostatiques créés en M par cette distribution de charges.

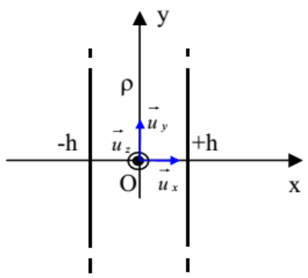


Figure 1

1) De quelles variables d'espace, le potentiel V_1(M) dépend t-il ?
2) Déduire la forme des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.
3) Montrer que $\vec{E}_1(M) = E_1(z)\vec{u}_z$ et $E_1(-z) = -E_1(z)$.
4) Calculer le champ $\vec{E}_1(M)$ à l'aide du théorème de Gauss en tout point M de l'espace.
5) Déduire le potentiel V_1(M). On prendra V_1(0, 0, 0) = 0.
6) Tracer les courbes de variations de E_1 et V_1 en fonction de z.
7) On se place dans le cas où l'épaisseur 2h est "très faible". La distribution de charges est alors assimilée au plan (Oxy) chargé surfaciquement avec une densité uniforme σ.
   a) Exprimer la densité surfacique σ en fonction de ρ et h.
   b) Déduire l'expression du champ et du potentiel électrostatiques $\vec{E}_p(M)$ et $V_p(M)$ créés par le plan chargé.
   c) Tracer les courbes de variations de E_p et V_p en fonction de z.
8) Une distribution de charges sur un plan infini ou dans une tranche infinie peut-elle exister dans la réalité?

Partie 2 : Deux lames de charges opposées

On considère maintenant la distribution de charges représentée sur la figure 2 comprenant deux lames (I et II) infinies dans les directions y et z, d'épaisseur 2h, centrées en A et A', d'abscisses respectives +a et -a ($a > h$), et de charges volumiques uniformes ρ et - ρ. On désigne par $\overrightarrow{E_I}(M)$ le champ électrostatique crée par la lame de centre A et $\overrightarrow{E_{II}}(M)$ celui crée par la lame de centre A'.

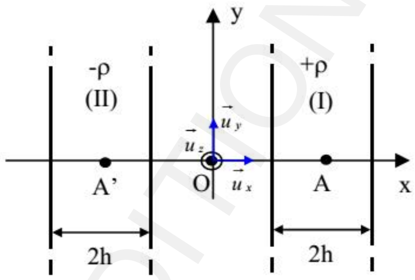


Figure 2

1) a) Montrer que le plan x = 0 est un plan de symétrie impair pour les deux lames.

b) En déduire que le champ crée par les deux lames E_2 est une fonction paire de x : $E_2(x) = E_2(-x)$

2) a) Donner les expressions de $\vec{E}_I(M)$ et $\vec{E}_{II}(M)$ dans les trois cas suivants : cas a) : $x \geq a + h$, cas b) : $a - h \leq x \leq a + h$ et cas c) $0 \leq x \leq a - h$.

b) Déterminer les expressions du champ résultant $\vec{E}_2(M)$ dans les trois cas a), b) et c).

c) Tracer alors l'allure de E_2 en fonction de x.

3) a) Montrer que : $V_2(x) = -V_2(-x)$ où V_2 est le potentiel associé aux deux lames.

b) Donner les expressions de $V_2(M)$ dans les trois cas a), b) et c).

c) tracer l'allure de V_2 en fonction de x.

SOMMES DE RIEMANN

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 24.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Déterminer sa limite.

Exercice 24.2 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 24.3 *Calculer la limite de* $u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 24.4 *Déterminer la limite de* $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice 24.5 *Déterminer la limite de* $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

2 Les techniques

Exercice 24.6 *Déterminer la limite de* $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 24.7 *Soit $x \in \mathbb{R}\diagdown\{-1,1\}$, on pose* $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right) dt$.

1. *Déterminer Df.*
2. *Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.*
3. *Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.*

Exercice 24.8 *Soit*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}$$

déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Indication : il y a un 1 de trop !).

Exercice 24.9 *Soit* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ *et* $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. *Nature et limite de la suite* $(S_n)_n$.
2. *Nature et limite de la suite* $(U_n)_n$. *(On pourra comparer* U_{2n} *et* S_n *)*

Exercice 24.10 *Soit* f *continue sur* $[0,1]$, *déterminer la limite de* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx$.

Exercice 24.11

1. *Montrer que pour* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$
2. *Déterminer la limite de la suite* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 24.12 *Déterminer* $\lim_{n\to\infty} a_n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ *où* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$.

Exercice 24.13 *(D'après Mines Douai 2009). On définit* f *et* φ *sur* $\mathbb{R}_2[X]$ *par* $f : P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$ *et* $\varphi : P \longmapsto P(1)$.

1. *Vérifier que* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ *et que* $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$.
2. *Montrer que* $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.
3. *En déduire que* $\varphi(f^n(P)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 P(t)\,dt$.

3 Les exotiques

Exercice 24.14 *Déterminer la limite de* $u_n = n^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} \left(1^1 2^2 3^3 \cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 24.15 *On désire déterminer la limite de*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2+nk+2009}$$

1. *S'agit-il d'une somme de Riemann ?*
2. *Simplifier*

$$\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{2009}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)}$$

3. *Conclure.*

4 Le grenier

Exercice 24.16 *Déterminer pour* $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2x^2}$

rép : on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2x^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{1+x^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ *est une somme de Riemann pour* $f(t) = \frac{1}{1+x^2t^2}$. *La somme converge vers* $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\arctan x}{x}$.

Exercice 24.17 *Calculer la limite de* $\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$

rép : c'est $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}$ *qui est une somme de Riemann, converge vers* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+8x}} = \frac{1}{2}$

Exercice 24.18 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

Réponse : On va utiliser l'inégalité suivante, $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, *inégalité qui peut s'établir à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange. Notons* Π_n *le produit à étudier et* $u_n = \ln(\Pi_n)$. *Alors on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

mais $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *où* $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ *est une somme de Riemman qui converge vers* $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ *où* $g(x) = x(1-x)$ *est une somme de Riemman qui converge. Par encadrement, on en déduit que* $(u_n)_n$ *converge vers* $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$. *La valeur de cette intégrale est l'aire du demi disque de centre* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) = e^{\frac{\pi}{8}}$$

Suites et fonctions dérivables

1.1 TD suites et fonctions

1.1.1 Propriété du corps des réelles

EXERCICE 1

Monter que le sous ensemble $X = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ n'a pas de borne superieure dans $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 2

Montrer que pour tous réelles a et b,on a :

$\max(a, b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|a-b|}{2}$ et $\min(a, b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|a-b|}{2}$

EXERCICE 3

Soient A,B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.Montrer que :

$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$et $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$

EXERCICE 4

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$et $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$

2.on suppose $A \subset B$,comparer $\sup(A)$ et $\sup(B)$; $\inf(A)$ et $\inf(B)$.

3.on suppose $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$.Montrer que :$\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$

4.Quelles sont les bornes superieurs et inférieurs dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ si elles existent.

EXERCICE 5

Montrer que l'ensemble $E = \{2^p 3^q : (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$

Indication :Prouver que $F = \{p \ln 2 + q \ln 3 : (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

UFR MI **Fiche 1**: **INTEGRALES INDEFINIES**: **L1**

EXERCICE I: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$; $I_4 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx$

$I_5 = \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$; $I_6 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; $I_7 = \int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$; $I_8 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$, $a \neq 0$.

EXERCICE II: Calculer:

$J_1 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$; $J_2 = \int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$; $J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; $J_4 = \int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$

$J_5 = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$; $J_6 = \int \frac{dx}{x^3+1}$; $J_7 = \int \frac{dx}{x^4+1}$; $J_8 = \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$. $J_9 = \int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

EXERCICE III:

1) A quelle condition l'intégrale $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ est-elle une fraction rationnelle?

2) Calculer les intégrales L_1 et L_2 où $L_1 = \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$; $L_2 = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$

EXERCICE IV: En utilisant la formule $\int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda\int \frac{dx}{y}$;

où $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$; $P_n(x)$: polynôme de degré n; $Q_{n-1}(x)$: polynôme de degré $n-1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer les intégrales
$N_1 = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; $N_2 = \int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

EXERCICE V: Montrer que $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}}$

où A, B et C sont des coefficients indéterminés.
Calculer alors $\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

EXERCICE VI: Intégrales de la forme $I = \int x^m(a+bx^n)^p dx$, avec $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

On rappelle que l'intégration de I se ramène à celle d'une fonction rationnelle seulement dans l'un des trois cas suivants:

★) $p \in \mathbb{Z}$. On pose $x = t^N$, ($N =$ dénominateur commun à m et n)
★) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. On pose $a+bx^n = t^N$ ($N =$ dénominateur de p)
★) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. On pose $ax^{-n}+b = t^N$ ($N =$ dénominateur de p)

1) Trouver une formule de récurrence pour le calcul de $I_n = \int \frac{dt}{(t^2-a^2)^n}$, $a \neq 0$.

Calculer alors $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

2) Calculer les intégrales $\int \frac{x^3}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ et $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Exercices

I. Calculer les intégrales :

1. $\int x^5\,dx$. Rép. $\frac{x^6}{6}+C$.

2. $\int (x+\sqrt{x})\,dx$. Rép. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. Rép. $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C$.

4. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$. Rép. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$.

5. $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$. Rép. $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. Rép. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

7. $\int \left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. Rép. $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$.

Intégration par changement de variable :

8. $\int e^{5x}\,dx$. Rép. $\frac{1}{5}e^{5x}+C$.

9. $\int \cos 5x\,dx$. Rép. $\frac{\sin 5x}{5}+C$.

10. $\int \sin ax\,dx$. Rép. $-\frac{\cos ax}{a}+C$.

11. $\int \frac{\operatorname{Log} x}{x}\,dx$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2 x+C$.

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. Rép. $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3}+C$.

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. Rép. $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7}+C$.

14. $\int \frac{dx}{3x-7}$. Rép. $\frac{1}{3}\operatorname{Log}|3x-7|+C$.

15. $\int \frac{dx}{1-x}$. Rép. $-\operatorname{Log}|1-x|+C$.

16. $\int \frac{dx}{5-2x}$. Rép. $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}|5-2x|+C$.

17. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$. Rép. $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}|\cos 2x|+C$.

18. $\int \operatorname{cotg}(5x-7)\,dx$. Rép. $\frac{1}{5}\operatorname{Log}|\sin(5x-7)|+C$.

19. $\int \frac{dy}{\operatorname{cotg} 3y}$. Rép. $-\frac{1}{3}\operatorname{Log}|\cos 3y|+C$.

20. $\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\,dx$. Rép. $3\operatorname{Log}\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C$.

21. $\int \operatorname{tg}\varphi\cdot\sec^2\varphi\,d\varphi$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+C$. x   21. $\int \operatorname{tg}\varphi\,\frac{1}{\sin\varphi}\,d\varphi$.

22. $\int (\operatorname{cotg} e^x)\,e^x\,dx$. Rép. $\operatorname{Log}|\sin e^x|+C$.

23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S-\operatorname{cotg}\frac{S}{4}\right)dS$. Rép. $-\frac{1}{4}\operatorname{Log}|\cos 4S|-4\operatorname{Log}\left|\sin\frac{S}{4}\right|+C$.

24. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$. Rép. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

25. $\int \cos^3 x\sin x\,dx$. Rép. $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$.

26. $\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx$. Rép. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$.

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. Rép. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$.

28. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$. Rép. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. x

29. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$. Rép. $-\frac{1}{\sin x}+C$.

30. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$. Rép. $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$.

31. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$.

32. $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\,dx$. Rép. $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}+C$.

33. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$. Rép. $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$.

34. $\int \frac{\operatorname{Log}(x+1)}{x+1}\,dx$. Rép. $\frac{\operatorname{Log}^2(x+1)}{2}+C$.

35. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$. Rép. $\sqrt{2\sin x+1}+C$.

36. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$. Rép. $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$.

37. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. Rép. $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$.

38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$. Rép. $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3}+C$.

39. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{(2+3\sin 2x)^3}$. Rép. $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2}+C$.

40. $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$.

41. $\int \frac{\operatorname{Log}^2 x\, dx}{x}$. Rép. $\frac{\operatorname{Log}^3 x}{3}+C$.

42. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Rép. $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$.

43. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x\, dx}{1+x^2}$. Rép. $\frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{2}+C$.

44. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Rép. $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$.

45. $\int \frac{\operatorname{arc\,cotg} x}{1+x^2}\, dx$. Rép. $-\frac{\operatorname{arc\,cotg}^2 x}{2}+C$.

46. $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+1)+C$.

47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+2x+3)+C$.

48. $\int \frac{\cos x\, dx}{2\sin x+3}$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{Log}(2\sin x+3)+C$.

49. $\int \frac{dx}{x\operatorname{Log} x}$. Rép. $\operatorname{Log}|\operatorname{Log} x|+C$.

50. $\int 2x(x^2+1)^4\, dx$. Rép. $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$.

51. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$.

52. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}$. Rép. $\operatorname{Log}|\operatorname{arc\,tg} x|+C$.

53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$. Rép. $\frac{1}{3}\operatorname{Log}|3\operatorname{tg} x+1|+C$.

54. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$. Rép. $\operatorname{Log}|\arcsin x|+C$.

56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}\, dx$. Rép. $\frac{1}{6}\operatorname{Log}|2+3\sin 2x|+C$.

57. $\int \cos(\operatorname{Log} x)\frac{dx}{x}$. Rép. $\sin(\operatorname{Log} x)+C$.

58. $\int \cos(a+bx)\, dx$. Rép. $\frac{1}{b}\sin(a+bx)+C$.

59. $\int e^{2x}\, dx$. Rép. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

60. $\int e^{\frac{x}{3}}\, dx$. Rép. $3e^{\frac{x}{3}}+C$.

61. $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$. Rép. $e^{\sin x}+C$.

62. $\int a^{x^2} x\, dx$. Rép. $\frac{a^{x^2}}{2\operatorname{Log} a}+C$.

63. $\int e^{\frac{x}{a}}\, dx$. Rép. $ae^{\frac{x}{a}}+C$.

64. $\int (e^{2x})^2\, dx$. Rép. $\frac{1}{4}e^{4x}+C$.

65. $\int 3^x e^x \, dx$. Rép. $\frac{3^x e^x}{\operatorname{Log} 3 + 1} + C$.

66. $\int e^{-3x} \, dx$. Rép. $-\frac{1}{3} e^{-3x} + C$.

67. $\int (e^{5x} + a^{5x}) \, dx$. Rép. $\frac{1}{5} \left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\operatorname{Log} a} + C \right)$.

68. $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) \, dx$. Rép. $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$.

69. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$. Rép. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x}{\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b} - 2x + C$.

70. $\int \frac{e^x \, dx}{3 + 4e^x}$. Rép. $\frac{1}{4} \operatorname{Log} (3 + 4e^x) + C$.

71. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{2 + e^{2x}}$. Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{Log} (2 + e^{2x}) + C$.

72. $\int \frac{dx}{1 + 2x^2}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2}x) + C$.

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin (\sqrt{3}x) + C$.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$. Rép. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C$.

75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. Rép. $\arcsin \frac{x}{3} + C$.

76. $\int \frac{dx}{4 + x^2}$. Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} + C$.

77. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$. Rép. $\frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x}{2} + C$.

78. $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$. Rép. $\frac{1}{12} \operatorname{Log} \left| \frac{2 + 3x}{2 - 3x} \right| + C$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$. Rép. $\operatorname{Log} \left| x + \sqrt{x^2 + 9} \right| + C$.

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$. Rép. $\frac{1}{b} \operatorname{Log} \left| bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2} \right| + C$.

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$. Rép. $\frac{1}{a} \operatorname{Log} \left| ax + \sqrt{b^2 + a^2 x^2} \right| + C$.

82. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - c^2}$. Rép. $\frac{1}{2ac} \operatorname{Log} \left| \frac{ax - c}{ax + c} \right| + C$.

83. $\int \frac{x^2 \, dx}{5 - x^6}$. Rép. $\frac{1}{6\sqrt{5}} \operatorname{Log} \left| \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} \right| + C$.

84. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$. Rép. $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$.

85. $\int \frac{x \, dx}{x^4 + a^4}$. Rép. $\frac{1}{2a^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{a^2} + C$.

86. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$. Rép. $\arcsin e^x + C$.

124. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. Rép. $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$.

125. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. Rép. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$.

126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. Rép. $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\operatorname{Log}(4x-1+$
$+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$.

II. Intégration par parties :

127. $\int xe^x\,dx$. Rép. $e^x(x-1)+C$.

128. $\int x\operatorname{Log} x\,dx$. Rép. $\frac{1}{2}x^2\left(\operatorname{Log} x-\frac{1}{2}\right)+C$.

129. $\int x\sin x\,dx$. Rép. $\sin x - x\cos x + C$.

130. $\int \operatorname{Log} x\,dx$. Rép. $x(\operatorname{Log} x-1)+C$.

131. $\int \arcsin x\,dx$. Rép. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

132. $\int \operatorname{Log}(1-x)\,dx$. Rép. $-x-(1-x)\operatorname{Log}(1-x)+C$.

133. $\int x^n\operatorname{Log} x\,dx$. Rép. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\operatorname{Log} x-\frac{1}{n+1}\right)+C$.

134. $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$. Rép. $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x-x]+C$.

135. $\int x\arcsin x\,dx$. Rép. $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}]+C$.

136. $\int \operatorname{Log}(x^2+1)\,dx$. Rép. $x\operatorname{Log}(x^2+1)-2x+2\operatorname{arc\,tg} x+C$.

137. $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$. Rép. $(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

138. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. Rép. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

139. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. Rép. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C$.

140. $\int x\cos^2 x\,dx$. Rép. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

141. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Rép. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$.

142. $\int \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{(x^2+1)^2}\,dx$. Rép. $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+C$.

143. $\int x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. Rép. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$.

144. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. Rép. $\operatorname{Log}\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsin x+C$.

145. $\int \operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. Rép. $x \operatorname{Log}\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\sqrt{1+x^2}+C$.

146. $\int \arcsin x \dfrac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Rép. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|+C$.

Dans les exemples suivants introduire des variables trigonométriques:

147. $\int \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. Rép. $-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.

148. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. Rép. $2\arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$.

149. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Rép. $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

150. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. Rép. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\dfrac{a}{x}+C$.

151. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. Rép. $\dfrac{x}{a^2}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Intégration des fractions rationnelles:

152. $\int \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. Rép. $\operatorname{Log}\left|\dfrac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$.

153. $\int \dfrac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. Rép. $\dfrac{1}{8}\operatorname{Log}\dfrac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}+C$.

154. $\int \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. Rép. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\operatorname{Log}\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

155. $\int \dfrac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. Rép. $\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{6}\operatorname{Log}\dfrac{(x-1)}{(x+1)^3}+\dfrac{16}{3}\operatorname{Log}(x+2)+C$.

156. $\int \dfrac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. Rép. $\dfrac{1}{x-1}+\operatorname{Log}\dfrac{x-2}{x-1}+C$.

157. $\int \dfrac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. Rép. $\dfrac{3}{x-2}+\operatorname{Log}\dfrac{(x-2)^2}{x^2}+C$.

158. $\int \dfrac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. Rép. $\dfrac{4x+3}{2(x+1)^2}+\operatorname{Log}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}+C$.

159. $\int \dfrac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. Rép. $-\dfrac{5x+12}{x^2+6x+8}+\operatorname{Log}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^2+C$.

160. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$. Rép. $\operatorname{Log}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

161. $\int \dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. Rép. $\operatorname{Log}\dfrac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{2}+C$.

162. $\int \dfrac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. Rép. $\operatorname{Log}\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$.

163. $\int \dfrac{dx}{x^3+1}$. Rép. $\dfrac{1}{6}\operatorname{Log}\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

164. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$. Rép. $\operatorname{Log} \frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}+C$.

165. $\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$.

166. $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$. Rép. $\frac{1}{3}\left[x^3+\operatorname{Log}(x^3-1)\right]+C$.

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. Rép. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\operatorname{Log}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

168. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. Rép. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\operatorname{Log} \frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg} x+C$.

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$. Rép. $\operatorname{Log} \frac{x-1}{x}-\frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}-$

$-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Intégration des fonctions irrationnelles :

170. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. Rép. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\operatorname{Log}(\sqrt[4]{x^3}+1)\right]+C$.

171. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. Rép. $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$.

172. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. Rép. $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\operatorname{Log} x-24\operatorname{Log}(\sqrt[12]{x}+1)+C$.

173. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. Rép. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+$

$+6\sqrt[6]{x}-9\operatorname{Log}(\sqrt[6]{x}+1)+\frac{3}{2}\operatorname{Log}(\sqrt[6]{x^2}+1)+3\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}+C$.

174. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^3}$. Rép. $\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

175. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. Rép. $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\operatorname{Log}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+C$.

176. $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$.

Rép. $14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$.

177. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$.

Rép. $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$

Intégrales du type $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$:

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log}\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$.

179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. Rép. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Log}\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$.

180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. Rép. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$.

181. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\, dx$. Rép. $\sqrt{x^2+2x}+\text{Log}\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$.

182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. Rép. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$.

183. $\int \sqrt{2x-x^2}\, dx$. Rép. $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]+C$.

184. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. Rép. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\text{Log}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. Rép. $\text{Log}\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$.

186. $\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\, dx$. Rép. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$.

187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\, dx$. Rép. $\text{Log}\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$.

188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\, dx$. Rép. $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\text{Log}\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C$.

Intégration des fonctions trigonométriques :

189. $\int \sin^3 x\, dx$. Rép. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$.

190. $\int \sin^5 x\, dx$. Rép. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$.

191. $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$. Rép. $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.

192. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$. Rép. $\text{cosec}\, x-\frac{1}{3}\text{cosec}^3 x+C$.

193. $\int \cos^2 x\, dx$. Rép. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

194. $\int \sin^4 x\, dx$. Rép. $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

195. $\int \cos^6 x\, dx$. Rép. $\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C$.

196. $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$. Rép. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$.

197. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{Log}|\cos x| + C$.

198. $\int \operatorname{cotg}^5 x\, dx$. Rép. $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{Log}|\sin x| + C$.

199. $\int \operatorname{cotg}^3 x\, dx$. Rép. $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - \operatorname{Log}|\sin x| + C$.

200. $\int \sec^8 x\, dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$.

201. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x\, dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$.

202. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Rép. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.

203. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$. Rép. $C - \operatorname{cosec} x$.

204. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. Rép. $\frac{3}{5}\left(\cos^{\frac{5}{3}} x\right) + 3\left(\cos^{-\frac{1}{3}} x\right) + C$.

205. $\int \sin x \sin 3x\, dx$. Rép. $-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

206. $\int \cos 4x \cos 7x\, dx$. Rép. $\frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C$.

207. $\int \cos 2x \sin 4x\, dx$. Rép. $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.

208. $\int \sin \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x\, dx$. Rép. $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{1}{2} x + C$.

209. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$. Rép. $\frac{1}{3}\operatorname{Log}\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}\right| + C$.

210. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

211. $\int \frac{\sin x\, dx}{1 + \sin x}$. Rép. $\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x + C$.

212. $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \cos x}$. Rép. $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$.

213. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx$. Rép. $\operatorname{arc\,tg}(2\sin^2 x - 1) + C$.

214. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^3}$. Rép. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2} + C$.

215. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$. Rép. $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right] + C$.

216. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}\, dx$. Rép. $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - x + C$.

PARTIE 3

- **Quelques éléments de correction de devoirs**

- **Quelques éléments de correction des examens de 2012-2013**

- **Quelques éléments de correction des examens de 2013-2014**

- **Quelques éléments de correction des examens de 2014-2015**

Aller plus loin

Université Félix Houphouët-Boigny **2013-2014**
UFR-MI-MIAGE-L1 **40 minutes**

CORRECTION **Intérrogation écrite**

Documents et calculatrices interdits.

Barème indicatif : +0,5 point pour toute bonne réponse, -0,25 point pour toute réponse fausse, 0 point pour les questions sans réponse.

Répondez par vraie ou faux aux affirmations suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}$ toutes parties majorée admet un maximum. F
2. Si A est une partie minorée de $\mathbb{R}$ alors $\inf A = -\sup(-A)$. V
3. Entre deux nombres rationnels, il toujours une infinitée de nombre irationnels. V
4. Si n est la partie entière de x alors on a $x - 1 < n \leq x$. V
5. Toute suite décroissante admet une limite. V
6. La somme de deux irrationnels est un irrationel. F
7. Toute suite bornée est convergente. F
8. Toute suite numérique qui converge vers 1 est positif á partir d'un certain rang. V
9. Une suite croissante non majorée diverge. V
10. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui est de Cauchy. V
11. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes alors la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. V
12. Pour tout couple de réels non nuls (a, b), il existe une infinité de suites qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. V
13. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. V
14. Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f atteint ses bornes sur I. F
15. Toute fonction continue sur un intervalle I est uniformement continue sur cet intervalle. F
16. Si f est uniformement continue sur I alors f est continue en tout point de I. V
17. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [-1, 4]$ alors l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[a, b]$. V
18. Le théorème de Rolle dit que si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. F
19. Une fonction continue f admet un extrémum en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$. V
20. Si f est une fonction bijective dérivable en 2 et telle que $f(2) = 2 = f'(2)$ alors $(f^{-1})'(2) = 1/2$. V
21. Si une fonction f admt un developpement limité en x_0 alors f est dérivable en x_0. F
22. Pour qu'une fonction admette un developpement limité d'ordre 10 en x_0 il faut que la fonction soit de classe C^{10} dans un voisinage de x_0. F

23. Si le developpement limité de f au voisinage de 0 est $f(x) = x - 2x^7 + x^8 + o(x^8)$, alors la courbe de f au voisinage de 0 est en dessous de la tangente. F
24. Si f admet un developpement limité en $+\infty$ alors la courbe de f admet une asymptote oblique. F
25. Si f admet un developpement limité d'ordre 1 en x_0 alors f admet un prolongement par continuité en x_0 continue, mais pas dérivable en x_0. F
26. La formule de Taylor permet d'avoir le developpement limité de toute fonction à tout ordre. F
27. Si une fonction n'est pas définie en un point, alors elle n'admet pas de developpement limité en ce point. F
28. Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = 1 + x^2$ des fonctions définie sur $\mathbb{R}$. Il existe $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel $\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{\cos x_0}{2x_0}$ V
29. Une suite arithmétique non nul n'est jamais convergente. F
30. Toute suite géométrique admet une limite. F
31. Il existe au moins une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant $\varphi(3) > 3$. V
32. Toute partie bornée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum et un minimum. V
33. Il existe des parties bornées de $\mathbb{Q}$ qui n'admettent pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. V
34. Si la dérivée de f s'annulle en x_0 alors f admet en ce point un extrémum local. F
35. Une fonction f strictement croissante sur un intervalle I est contiunue sur I. F
36. La fonction tangente hyperbolique notée th est bijective sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est notée $\text{Arcth}x$. F
37. Les fonctions sin, cos et tan admettent des développements limité de tout ordre en 0. V
38. Une fonction f peut être dérivable en un point x_0 sans être continue en x_0. F
39. Une fonction f peut être continue en un point x_0 sans être dérivable en x_0. V
40. Pour avoir le developpement limité de $e^{\cos x}$ au voisinage de 0, on remplace dans le développement limité de e^x au voisinage de 1, x par le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0. V

CORRECTION DU DEVOIR 1 DE SUITES ET FONCTIONS DERIVABLES L1

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions majorées sur $\mathbb{R}$
comparons $\sup(f)+\sup(g)$ et $\sup(f+g)$ avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
par definition $\sup(f)=\sup\{f(x)|x\in\mathbb{R}\}$, $\sup(g)=\sup\{g(x)|x\in\mathbb{R}\}$ et $\sup(f+g)=\sup\{(f+g)(x)|x\in\mathbb{R}\}$
or $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\leq\sup(f)+\sup(g)$
donc $\forall x\in\mathbb{R},(f+g)(x)\leq\sup(f)+\sup(g)$ d'ou $\sup(f+g)\leq\sup(f)+\sup(g)$
montrons qu'il n'y pas d'égalité à travers **un contre-exemple**.
soit $f(x)=x$ sur [0 ;1] et $g(x)=-x$ sur [0 ;1]
$(f+g)(x)=0\Longrightarrow\sup(f+g)=0$
$\sup f=\sup\{f(x)|x\in[0;1]\}=1$
et $\sup g=\sup\{g(x)|x\in[0;1]\}=\sup\{x|x\in[-1;0]\}=0$
$\sup f+\sup g=1\neq0=\sup(f+g)$

Exercice 2

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ signifie que pour tous réels $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$, il existe un rationnel $r\in\mathbb{Q}$ tel que $a<r<b$.

2.Justifions que $\{2^{\frac{p}{q}}|(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire $\forall a,b\in\mathbb{R}_+$ avec $a<b$,on cherche p,q tel que $a<2^{\frac{p}{q}}<b$
$a<b\Rightarrow b>0$
$a<b\Rightarrow\exists a_1\in\mathbb{R}^+$ tel que $a<a_1<b$, on a :$a_1\geq0$
$a_1<b\Rightarrow\frac{\ln a_1}{\ln 2}=\frac{\ln b}{\ln 2}$ et $\frac{\ln a_1}{\ln 2}\in\mathbb{R},\frac{\ln b}{\ln 2}\in\mathbb{R}$
D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tels que :

$$\begin{aligned}\frac{\ln a_1}{\ln 2}<\frac{p}{q}<\frac{\ln b}{\ln 2}&\Leftrightarrow\ln a_1<\frac{p}{q}\ln 2<\ln b\\&\Leftrightarrow\ln a_1<\ln 2^{\frac{p}{q}}<\ln b\\&\Leftrightarrow a_1<2^{\frac{p}{q}}<b\\&\Leftrightarrow a<2^{\frac{p}{q}}<b\text{ car }a<a_1\end{aligned}$$

Exercice 3

1.$(u_n)_{n\in\mathbb{R}^*}$ est dite de cauchy si elle vérifie la rélation suivante :
$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall(p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq N$ et $q \geq N \Rightarrow |u_q - u_p| \leq \varepsilon$

2.on donne $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
(a)Etudier la monotonie d'une suite revient à dire si elle est croissante,decroissante ou constante.
monotonie de (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} > 0 \; car \; n > 0 \end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

(b)Montrons que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{n+n} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n} \\ \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{2n} - u_n \geq n \times \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2} \Rightarrow u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

(c)pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$,
$\forall N \in \mathbb{N}, \exists(N, 2N) \in \mathbb{N}^2 : N \geq N$ et $2N \geq N \Rightarrow |u_{2N} - u_N| > \frac{1}{2}$
ceci est la négation de la définition d'une suite de cauchy ; donc $u_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de cauchy.
(d)$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car (u_n) est une suite croissante et n'est pas de cauchy.
En effet il y a un théorème 2.2.8 page 16 du cours qui dit que
une suite réelle ou complexe converge si et seulement si elle est de cauchy
alors dit que la suite n'est pas de cauchy sous entend qu'elle ne converge pas donc diverge.Pour deduire la limite puisqu'on sait qu'elle diverge,il y a un autre thèoreme 2.2.1 page 14 qui dit
Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Exercice 4

1.
✠ f admet un developpement limité d'ordre n en x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$)s'il existe :
-$P_n(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, n un entier naturel
-une fonction $\varepsilon(x)$ définie dans un voisinage de x_0 et tel que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
tel que $f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$ dans un voisinage de x_0
✠ f admet un developpement limité d'ordre n en $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$)s'il existe :
-$P_n(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, n un entier naturel
-une fonction $\varepsilon(x)$ définie dans un voisinage de x_0 et tel que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
tel que $f(x) = P(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$ dans un voisinage de $+\infty$

2.$g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$ $D_g = \mathbb{R}$ et g est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.
D'après la formule de Taylor g admet en 0 un $DL_n, \forall n \in \mathbb{N}$
On a : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + o(x^6)$
Posons $U = -x^2$,$U \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$
alors $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + o(u^6)$
$\Longrightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$

$$\Longrightarrow \frac{x-1}{1+x^2} = (x-1)\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)\right) = x - x^3 + x^5 - 1 + x^2 - x^4 + x^6 + o(x^6)$$

$$\boxed{\Longrightarrow \frac{x-1}{1+x^2} = -1 + x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6 + o(x^6)}$$

Autre méthode

utilisons la division par ordre croissant de $x - 1$ par $1 + x^2$ vue en Structure algébrique au CM du prof KOUAKOU MATHIAS

$-1+x|1+x^2$

$1+x^2|-----------------------$

$-----|\boxed{-1+x+x^2-x^3-x^4+x^5+x^6+o(x^6)}$

$x+x^2|$

$-x+x^3|$

$-----|$

$x^2-x^3|$

$-x^2-x^4|$

$-----|$

$-x^3-x^4|$

$x^3+x^5|$

$-----|$

$-x^4+x^5|$

$x^4+x^6|$

$-----|$

$x^5+x^6|$

$-x^5-x^7|$

$-----|$

$x^6-x^7|$

$-x^6-x^8|$

$-----|$

$-x^7-x^8|$

3.Au voisinage de $+\infty$,on a :$\frac{1}{x}f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^6}+o(\frac{1}{x})$
$f(x)=2x+1-\frac{7}{x^5}+o(\frac{1}{x^5})$
La droite d'équation $y=2x+1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$
$f(x)-(2x+1)=-\frac{7}{x^5}<0$ donc la courbe est en dessous de l'asymptote

$\boxed{\text{CORRECTION DU DEVOIR 2 DE SUITES ET FONCTIONS DERIVABLES L1}}$

Exercice 1

Montrons que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est bornée alors f^2 est bornée
$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est bornée signifie $\exists M \in \mathbb{R}_+ | \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < M \Longrightarrow (|f(x)|)^2 < M^2 \Longrightarrow |f^2(x)| < M^2$ alors f^2 est bornée

Par définition,on a :$\inf(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ et $\sup(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$
Montrons que $\inf f^2 = (\inf f)^2$
(1)$\forall x \in \mathbb{R}$ $0 \leq \inf f \leq f(x) \Longrightarrow (\inf f)^2 \leq f^2(x) \Longrightarrow (\inf f)^2 \leq \inf f^2$

(2)$\forall x \in \mathbb{R}$ $\inf f^2 \leq f^2(x) \Longrightarrow \sqrt{\inf f^2} \leq f(x) \Longrightarrow \sqrt{\inf f^2} \leq \inf f \Longrightarrow \inf f^2 \leq (\inf f)^2$
(1) *et* (2) permettent de conclure que : $\boxed{\inf f^2 = (\inf f)^2}$
Montrons que $\sup f^2 = (\sup f)^2$
(1)$\forall x \in \mathbb{R}$ $0 \leq f(x) \leq \sup f \Longrightarrow f^2(x) \leq (\sup f)^2 \Longrightarrow \sup f^2 \leq (\sup f)^2$

(2)$f^2(x) \leq \sup f^2 \Longrightarrow f(x) \leq \sqrt{\sup f^2} \Longrightarrow \sup f \leq \sqrt{\sup f^2} \Longrightarrow (\sup f)^2 \leq \sup f^2$
(1) *et* (2) permettent de conclure que : $\boxed{\sup f^2 = (\sup f)^2}$

Exercice 2

1) **Théorème de Rolle** :Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis :Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2)Demontrons que pour tous réel $x > 0$, $Arctanx > \frac{x}{x^2+1}$

soit $x > 0$, considérons $[x, x+1]$

$$\begin{aligned} soit\ f : [x, x+1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto Arctant \end{aligned}$$

f est continue sur $[x, x+1]$
Considérons la fonction $t \mapsto Arctant$ qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
Pour x>0,elle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ d'après le théorème des accroisements finis
$\exists c \in]0, x[$ tel que :
$Arctan'(c) = \frac{Arctanx - Arctan0}{x-0} = \frac{Arctanx}{x}$
$Acrtan'(c) = \frac{1}{c^2+1} = \frac{Acrtanx}{x}$
or $c \in]0, x[$ signifie

$$0 < c < x \Longrightarrow 0 < c^2 < x^2 \Longrightarrow 1 < c^2 + 1 < x^2 + 1 \Longrightarrow 1 > \frac{1}{c^2+1} = \frac{Acrtanx}{x} > \frac{1}{x^2+1}$$

d'où $\boxed{Arctanx > \frac{x}{x^2+1}}$

Exercice 3

Calcul de limite
1.
soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{k+1}{k}}}{n}$

Propriété :

> Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ alors $\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$

On a : $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{k+1}{k}} = e$ alors $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{k+1}{k}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{k}} \longrightarrow e$
2.
soit $v_n = \sqrt[n]{n!}$

Propriété :

> Si $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ admet pour limite λ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lambda$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty\Rightarrow v_n=\sqrt[n]{n!}\to+\infty$$

Exercice 4

1.
2.Posons $x=u+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow u=x-\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\cos x=\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin u=-\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5}\right)+o(u^5)\\ =-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}+o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\end{aligned}$$

à dévélopper ensuite

3-$DL_4(0)$ de $e^{\cos x}$

$$e^{\cos x}=e^{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}=e.e^{\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}\quad=e.\left[\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}\right]+o(x^4)$$

4-Donnons $f^{(10)}(0)$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10}$

x^{10} correspond à $\frac{(x-0)^{10}f^{(10)}(0)}{10!}$ donc $\boxed{f^{(10)}(0)=10!}$

CORRECTION DU DEVOIR 3 DE SUITES ET FONCTIONS DERIVABLES L1

Exercice 1

1. Calculons les intégrales suivants :
$I = \int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{\ln x}dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^e \Longrightarrow \boxed{I = \frac{2}{3}}$
$J = \int_0^\pi \sin x e^x dx$
intégrons J par partie
Posons $u = \sin x \Longrightarrow u' = \cos x \; et \; v' = e^x \Longrightarrow v = e^x$
$J = [\sin x e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x e^x dx$
intégrons par partie $\int_0^\pi$
Posons $u = \sin x \Longrightarrow u' = \cos x \; et \; v' = e^x \Longrightarrow v = e^x$
$J = [\sin x e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x e^2 dx$
intégrons par partie $\int_0^\pi \cos x e^x dx$
Posons $u = \cos x \Longrightarrow u' = \sin x \; et \; v' = e^x \Longrightarrow v = e^x$

$$\int_0^\pi \cos x e^x dx = [\cos x e^x]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x e^x dx$$

$$J = [\sin x e^x]_0^\pi - [\cos x e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x e^x dx \Longrightarrow 2J = [(\sin x - \cos x)e^x]_0^\pi \Longrightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right)}$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$K = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

intégrons par partie $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$
Posons $u = x \Longrightarrow u' = 1 \; et \; v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$

$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \left[-\frac{x}{2(1+x^2)}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
on a alors

$$K = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \left[\frac{x}{2(1+x^2)}\right]_0^1 \Longrightarrow K = \left[\frac{3}{2}Arctanx + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_0^1 \Longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{8}}$$

2.Calcul de l'intégral $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
posons $x = \sin t$ alors pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow t = \frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow t = -\frac{\pi}{4}$
$t \mapsto \sin t$ est bijective sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$
soit $x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos tdt$
posons $A = \displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx \; avec \; f(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$A = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\sin t)\cos tdt = f(x) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-2\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \; car \; \cos t > 0 \; \forall t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\; et \; 1 - 2\sin^2 t = \cos 2t$$

Alors $A = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2tdt = \left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow \boxed{A = 1}$
Pour votre entraînement calculer l'intégrale suivant $B = \int_0^{5\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}dt$
A la fin l'on trouve que $\boxed{B = [\ln(2+x)]_1^{-1} = \ln 3}$
3.$\displaystyle\int \sin^5 x \cos^4 x$
Règle : Si l'un des exposants est impair alors
-s'il s'agit de celui de $\sin x$,on pose $t = \cos x$
-s'il s'agit de celui de $\cos x$,on pose $t = \sin x$

Exercice 2
1.$xy' + y = 3x^2 \Longleftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 3x$

resolvons $y' + \frac{1}{x}y = 0$

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{x}y = 0 &\iff \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \\ &\iff \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx \\ &\iff \ln|y| = -\ln|x| + c \\ &\iff y = \frac{\lambda}{|x|}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière
On pose $y_p = \frac{\lambda(x)}{|x|}$

$$y_p' = \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2} \Longrightarrow y_p' + \frac{1}{x}y_p = 3x \Longrightarrow \frac{\lambda'(x)x}{x^2} - \frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = 3x \Longrightarrow \frac{\lambda'(x)x}{x^2} = 3x$$
$$\Longrightarrow \lambda(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}$$

$y_p = x^2 \Longrightarrow y = x^2 + \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\ sur\ \mathbb{R} - \{0\}$
Après raccordement , $\boxed{y = x^2\ sur\ \mathbb{R}}$
2.**Méthode :**Soit l'équation $ay'' + by' + cy = 0$
équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$
Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles de l'équation
alors $\boxed{y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2}, (A, B) \in \mathbb{R}^2}$
Si r est solution double de l'équation
alors $\boxed{y = (A + Bx)\, e^{rx}}$
si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont deux solutions complexes de l'équation
alors $\boxed{y = (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))\, e^{\alpha x}}$

- ⊙ $y'' + y' + y = 0 \Longrightarrow y = \left(A\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + B\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\right) e^{\frac{-x}{2}}, A, B \in \mathbb{R}\ car\ \Delta = -3 = 3i^2$
- ⊙ $y'' - 2y' + y = 0 \Longrightarrow y = (A + Bx)\, e^{rx}, A, B \in \mathbb{R}\ car\ \Delta = 0$
- ⊙ $y'' - 2y' + y = \sin x + e^x$

ici l'on doit resoudre $y'' - 2y' + y = \sin x$ d'un côté et $y'' - 2y' + y = e^x$ d'un autre côté puis faire une association des solutions.
Le reste du raisonnement est laissé au lecteur.

UFHB
UFR MATH INFO

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2013-2014

CORRECTION du devoir d'amphi de structure algébrique du 04-04-14

Exercice 1

1-Table de l'addition et de la multiplication de $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

$\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

Table addition

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

(1,5pts)

Table multiplication

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

(1,5pts)

2-a) Dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 + \dot{3}x + 2 & \dot{4}x^3 + x + \dot{3} \\
- \quad x^5 + \dot{4}x^3 + \dot{2}x^2 & \dot{4}x^2 + \dot{4}x + \dot{4} \\
\hline
x^4 - \dot{4}x^3 - \dot{2}x^2 + \dot{3}x + \dot{2} & \\
x^4 + \dot{1}x + \dot{3}x^2 + \dot{3}x + \dot{2} & 3\ pts \\
- \quad x^4 + \dot{4}x^2 + \dot{2}x & \\
\hline
\dot{4}x + \dot{2}x &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\dot{2} + x + x^2 & \dot{2} + x + \dot{4}x^3 \\
- \quad \dot{2} + x + \dot{4}x^3 & \dot{1} + \dot{3}x^2 \\
\hline
x^2 + x^3 & \\
- \quad x^2 + \dot{3}x^3 & 3\ pts \\
\hline
-\dot{2}x^3 - \dot{2}x^5 & \\
\dot{3}x^3 + \dot{3}x^5 & \\
x^3(\dot{3} + \dot{3}x^2) &
\end{array}$$

$$-\dot{2}x^3 - \dot{2}x^5 = \dot{3}x^3 + \dot{3}x^5$$

Car dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$;

$$-\dot{2} = \dot{\overbrace{5-2}} = \dot{3}$$

Exercice 2

1- Card (P(A))=$2^4 = 16$ $(2\ pts)$

2- $\emptyset$ est l'élément neutre de Δ

$\{\emptyset\} = H_1 \subset \{\emptyset, \{1\}\} = H_2 \subset \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} H_3 \subset P(A) = H_4$

$\{1\}\Delta\{2\} = \{1,2\}$

Le cardinal de tout sous-groupe doit diviser le cardinal du groupe.

Vérifions la stabilité de H_3

Δ	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

d' où la stabilité de H_3 $(4\ pts\ pour\ cette\ question)$

3-Soit $(x, y, z) \in (P(A))^3$
Montrons que $x.(y.z) = (x.y).z$
$x.(y.z) = x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = (x.y).z$
Montrons que $x.(y + z) = x.y + x.z$
$x.(y + z) = x \cap (y\Delta z) = (x \cap y)\Delta(x \cap z) = x.y + x.z$ Car l'intersection est distributive sur Δ
Vous devez montrer que $x \cap (y\Delta z) = (x \cap z)\Delta(y \cap z)$ cela est laissé au lecteur
Complément : $1_{P(A)} = A\ \ et\ \ \ 0_{P(A)} = \emptyset$ $(5\ pts\ pour\ cette\ question)$

Attention !! ici x, y, z sont des ensembles et non des réels

Université Félix Houphouet Boigny d'Abidjan-UFR Maths-Info-Licence 1-2014-2015

Durée : 1 heure 30 mn

NB :la clarté de la rédaction sera notée !

$\boxed{\textbf{CORRECTION DU Devoir Surveillé (I) Structure algébrique}}$ $Groupe 1-2-3-4$

Exercice 1 (10 points)

1) Faux

i) L'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}}$ n'est pas intègre car 18 n'est pas un nombre premier et $18 \neq 0$.(Remarque : $\overline{3} \neq \overline{0}$ et $\overline{6} \neq \overline{0}$ mais $\overline{3} \times \overline{6} = \overline{0}$)

ii)Vrai

En effet ,$\forall k \in \mathbb{Z}, n^2.k = n(nk) \in n\mathbb{Z} \in n\mathbb{Z}$ donc $n^2\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$

2) On a :$84\mathbb{Z} + 180\mathbb{Z} = pgcd(84, 180)\mathbb{Z}$

$pgcd(84, 180) = 12$ donc $84\mathbb{Z} + 180\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

donc $\boxed{\exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 84a + 180b = 12}$

3)

i)$4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}+16\mathbb{Z}+34\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z})+(16\mathbb{Z}+34\mathbb{Z}) = pgcd(4, 6)\mathbb{Z}+pgcd(16, 34)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ donc $\boxed{\text{m=2}}$

ii)$3\mathbb{Z} \bigcap 2\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = ppcm(6, k)\mathbb{Z}$

L'entier k est tel que $ppcm(6, k) = 36$. Prendre $\boxed{k = 36}$

(Remarque $6\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z} \Longrightarrow k$ divise 36)

4) Eléments inversibles de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{32\mathbb{Z}}$.

Soit U_{32} l'ensemble de ces élements. On a :

$$U_{32} = \{\overline{x} \in \frac{\mathbb{Z}}{32\mathbb{Z}} | x \in [[0, 31]], pgcd(x, 32) = 1\}$$

$$\boxed{U_{32} = \{\dot{1}, \dot{3}, \dot{5}, \dot{7}, \dot{9}, \dot{11}, \dot{13}, \dot{15}, \dot{17}, \dot{19}, \dot{21}, \dot{23}, \dot{25}, \dot{27}, \dot{29}, \dot{31}\}}$$

Exercice 2 (10 points)

1)
i)Supposons $(xy)^2 = x^2 \bullet y^2$.On a :

$$\begin{aligned}
&xy \bullet xy = x \bullet xyy \\
&x^{-1} \bullet xyxy = x^{-1}xxyy \\
&yxy = xyy \\
&yxyy^{-1} = xyyy^{-1} \\
&yx = xy \ \text{ d'ou la commutativité}
\end{aligned}$$

ii)Supposons $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\left((xy)^{-1}\right)^{-1} = \left(x^{-1}y^{-1}\right)^{-1} \\
&xy = \left(y^{-1}\right)^{-1} \bullet \left(x^{-1}\right)^{-1} \\
&xy = yx \text{ d'ou la commutativité}
\end{aligned}$$

2) Supposons que $\forall a \in G, a^2 = e$.
$\forall x, y \in G$, on a : $x^2 = e$ et $y^2 = e$ et $(xy)^2 = e$
Ainsi $(xy)^2 = x^2y^2$ pour tout $x, y \in G$.
D'après la question 1)i) la loi "$\bullet$"est commutative
($\triangle$! **il y a bien sur d'autres preuves**!)

Université Félix Houphouet Boigny d'Abidjan-UFR Maths-Info-Licence 1-2014-2015

Durée : 1 heure 30 mn

NB :la clarté de la rédaction sera notée !

$\boxed{\textbf{Correction du Devoir Surveillé (II) Structure algébrique}}$ $Groupe 5-6-7-8-9-10$

Exercice 1 (10 points)

1/ i) Faux

En effet, $4 \in 2^2\mathbb{Z}$ mais $4 \notin 2^7\mathbb{Z}$

ii) Faux

Zéro $''0''$ n'est pas un nombre premier mais l'anneau $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}}{0\mathbb{Z}}$ est intègre

2/i)$4\mathbb{Z} \bigcap 18\mathbb{Z} \bigcap 16\mathbb{Z} \bigcap 42\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

$4\mathbb{Z} \bigcap 18\mathbb{Z} \bigcap 16\mathbb{Z} \bigcap 42\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z} \bigcap 18\mathbb{Z}) \bigcap (16\mathbb{Z} \bigcap 42\mathbb{Z}) = (ppcm(4, 18)\mathbb{Z}) \bigcap (ppcm(16, 42)\mathbb{Z})$

$4\mathbb{Z} \bigcap 18\mathbb{Z} \bigcap 16\mathbb{Z} \bigcap 42\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z} \bigcap 336\mathbb{Z} = 1008\mathbb{Z} \Longrightarrow \boxed{m = 1008}$

ii)$3\mathbb{Z} \bigcap 2\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = ppcm(6, k)\mathbb{Z}$

k est tel que $ppcm(6, k) = 36$. On trouve $k = 36$

Remarque : $(6\mathbb{Z} \bigcap k\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z} \Longrightarrow k$ divise $36)$

3/ élements non inversibles de $\dfrac{\mathbb{Z}}{32\mathbb{Z}}$

Soit D_{32} l'ensemble de ces éléments. On a :

$D_{32} = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}/32\mathbb{Z} | x \in]]0, 31]], pgcd(32, x) \neq 1\}$

$D_{32} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

Exercice 2 (10 points)

1/ Pour a) et b) voir le cours

2/ On a : $M = m\mathbb{Z} \bigcap n\mathbb{Z}$, donc M est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ comme intersection de 2 sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

On sait que $m\mathbb{Z} \bigcap n\mathbb{Z} = ppcm(m, n)\mathbb{Z}$

M n'est pas un sous-anneau de l'anneau unitaire $(\mathbb{Z}, +, \times)$ $\quad (si\ (m, n) \neq (1, 1))$

3) $\circledast$ la loi $''\top''$ est une loi de composition interne. En effet,$\forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$,

si $x \top y \Longleftrightarrow$ on a : $xy+3x+3y+6=-3$
$\Longleftrightarrow (x+3)(y+3)=0 \Longleftrightarrow x=3$ ou $y=-3$. ce qui est absurde
donc $x \top y \in G$
$\circledast$ $(x \top y) \top z$ et $x \top (y \top z)$ sont tous les deux égaux à $xyz+3xz+3yz+3xy+9x+9y+9z+24$
$\circledast$ Commutativité
$x \top y = xy+3x+3y+6 = yx+3y+3x+6 = y \top x$
$\circledast$ élement neutre $e=-2$ car $(-2) \top x = x$ et $x \top (-2) = x, \forall x \in G$
$\circledast$ soit $x \in G$.
$\exists ? y \in G$ tel que $x \top y = -2$ *et* $y \top x = -2$

$$\begin{aligned}
x \top y &\Longleftrightarrow xy+3x+3y++6=-2\\
&(x+3)y=-(3x+8)\\
&y=-\frac{3x+8}{x+3} \text{ car } x \neq -3\\
aussi\ -\frac{3x+8}{x+3}=-3 &\Longleftrightarrow 3(x+3)=3x+8\\
&2x=-6\\
&x=-3 \text{ ce qui est absurde}
\end{aligned}$$

donc est le symétrie de x pour la loi$''\top''$

En somme $(G,\top)$ est un groupe commutative d'élément neutre -2

==

CORRIGE DU DEVOIR DE MECANIQUE
Parcours : Tronc Commun
Niveau : Licence 1

==

Exercice 1 :

Soient deux vecteurs $\vec{u} = (1,2,-3)\ et\ \vec{v} = (2,-1,1)$

1- Trouvons un vecteur unitaire $\vec{\omega}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}\ ,\ \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\-5\end{pmatrix}$$

2-Les cosinus directeurs de $\vec{\omega}$

$$\|\vec{\omega}\| = 1 \Longrightarrow \begin{cases}\cos\theta_x = \omega_x = -\frac{\sqrt{3}}{15}\\ \cos\theta_y = \omega_y = -\frac{7\sqrt{3}}{15}\\ cos\theta_z = \omega_z = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Exercice 2 :

1-calcul du vecteur vitesse et du vecteur accélération de P

$OP = r = at \qquad (\vec{x},\overrightarrow{OP}) = \theta = \Omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \Omega \qquad \overrightarrow{OP} = r\vec{u} = at\vec{u}\ ,\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\theta}\vec{v}$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = a(\vec{u} + t\Omega\vec{v})}\ \text{Vitesse} \qquad \boxed{\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = a\Omega(-t\Omega\vec{u} + 2\vec{v})}\ \text{accélération}$$

2-les vecteurs unitaires de la base intrinsèque en fonction de $a, \Omega, t, \vec{u}\ et\ \vec{v}$

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}\ \ or\ \|\vec{V}\| = a(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \vec{T} = \frac{a(\vec{u}+t\Omega\vec{v})}{a(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \boxed{\vec{T} = \frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}}(\vec{u}+t\Omega\vec{v})}$$

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\|}\ \ or\ \ \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\left[(1+t^2\Omega^2)^{-\frac{1}{2}}(\vec{u}+t\Omega\vec{v})\right]}{dt} = -\frac{1}{2}.2\Omega^2 t(1+t^2\Omega^2)^{-\frac{3}{2}}.(\vec{u}+t\Omega\vec{v}) + \frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{d\vec{u}}{dt} + t\Omega\frac{d\vec{v}}{dt} + \Omega\vec{v}\right]$$

$$or\ \ \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{v} = \Omega\vec{v}\ \ et\ \ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u} = -\Omega\vec{u}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\Omega^2 t(1+t^2\Omega^2)^{-\frac{3}{2}}.(\vec{u}+t\Omega\vec{v}) + \frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}}[\Omega\vec{v}\ + -t\Omega^2\vec{u} + \Omega\vec{v}]$$

$$= \frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}[-\Omega^2 t(\vec{u}+t\Omega\vec{v}) + (1+t^2\Omega^2)(\Omega\vec{v}\ + -t\Omega^2\vec{u} + \Omega\vec{v})]$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}[-\Omega^2t\vec{u}-t^2\Omega^3\vec{v}+\Omega\vec{v}\ -t\Omega^2\vec{u}+\Omega\vec{v}+t^2\Omega^2(\Omega\vec{v}\ -t\Omega^2\vec{u}+\Omega\vec{v})]$$

$$=\frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}[-t\Omega^2\vec{u}-t^2\Omega^3\vec{v}+\Omega\vec{v}\ -t\Omega^2\vec{u}+\Omega\vec{v}+t^2\Omega^3\vec{v}\ -t^3\Omega^4\vec{u}+t^2\Omega^3\vec{v}]$$

$$=\frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}[-2t\Omega^2\vec{u}+2\Omega\vec{v}\ -t^3\Omega^4\vec{u}+t^2\Omega^3\vec{v}]$$

$$=\frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}[2\Omega(-t\Omega\vec{u}+\vec{v})+t^2\Omega^3(-\Omega\vec{u}+\vec{v})]$$

$$=\frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}(2\Omega+t^2\Omega^3)(-\Omega\vec{u}+\vec{v})\Longrightarrow\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{\Omega(2+t^2\Omega^2)}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}(-\Omega\vec{u}+\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{\Omega(2+t^2\Omega^2)}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}(-t\Omega\vec{u}+\vec{v})\quad et\quad\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\|=\frac{\Omega(2+t^2\Omega^2)}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}\|-t\Omega\vec{u}+\vec{v}\|=\frac{\Omega(2+t^2\Omega^2)}{1+t^2\Omega^2}$$

$$car\ dans\ la\ base\ (\vec{u},\vec{v}),\|-t\Omega\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{(-t\Omega)^2+(1)^2}=(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}$$

Donc $$\boxed{\vec{N}=\frac{1}{(1+t^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}}(-t\Omega\vec{u}+\vec{v})}$$

3- le rayon de courbure

Par définition

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{\vec{N}}{R}\Longrightarrow\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|=\left\|\frac{\vec{N}}{R}\right\|\Leftrightarrow\left\|\frac{ds}{d\vec{T}}\right\|=\left\|\frac{R}{\vec{N}}\right\|\Leftrightarrow\left\|\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\vec{T}}{dt}}\right\|=\left\|\frac{R}{\vec{N}}\right\|\Leftrightarrow\frac{\|\vec{V}\|}{\|d\vec{T}\|}=\frac{R}{\|\vec{N}\|}\ \ car\ \|\vec{V}\|=\frac{ds}{dt}$$

$$\Longrightarrow R=\|\vec{N}\|.\frac{\|\vec{v}\|}{\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\|}\quad or\ \|\vec{N}\|=1\ car\ \overrightarrow{N}\ est\ vecteur\ unitaire\ \ ainsi\quad R=\frac{\|\vec{v}\|}{\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\|}$$

$$\boxed{R=\frac{a(1+t^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\Omega(2+t^2\Omega^2)}}$$

<u>Exercice 3</u> :

$(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$ la base polaire ; l'équation de la courbe plane du point M est : $\rho=\frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta), t=0, \theta_0=0$

1) a- l'abscisse curviligne s du mobile en fonction de θ.

Commençons par déterminer ds

On a:

$$ds=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho d\theta)^2}\Longrightarrow ds^2=(d\rho)^2+(\rho d\theta)^2=\frac{{\rho_0}^2}{4}sin^2\theta d\theta^2+\frac{{\rho_0}^2}{4}(1+\cos\theta)^2(d\theta)^2\ car\ d\rho=\frac{1}{2}\rho_0(-sin\theta)d\theta$$

$$ds^2=\frac{{\rho_0}^2}{4}d\theta^2(sin^2\theta+1+2\cos\theta+cos^2\theta)=\frac{{\rho_0}^2}{4}d\theta^2(2+2\cos\theta)=\frac{{\rho_0}^2}{2}d\theta^2(1+\cos\theta)\ \ car\ \ sin^2\theta+cos^2\theta=1$$

On sait que $cos^2 a = \frac{1+cos2a}{2} \Longrightarrow 1 + cos2a = 2cos^2 a$ alors $cos2\frac{\theta}{2} + 1 = 2cos^2\frac{\theta}{2}$

Ainsi $ds^2 = \frac{{\rho_0}^2}{2} d\theta^2(1+\cos\theta) = \frac{{\rho_0}^2}{2} d\theta^2\left(2cos^2\frac{\theta}{2}\right) = {\rho_0}^2 d\theta^2 cos^2\frac{\theta}{2}$ donc $\boxed{ds = \rho_0 cos\frac{\theta}{2} d\theta}$

$$s = \int ds = \int \rho_0 cos\frac{\theta}{2} d\theta \Longrightarrow s = 2\rho_0 sin\frac{\theta}{2} + s_0 = 2\rho_0 sin\frac{\theta}{2}\ avec\ s_0 = 0\ car\ à\ t = 0, \theta_0 = 0$$

$par\ conséquent$ $\boxed{s = 2\rho_0 sin\frac{\theta}{2}}$

b-l'angle polaire lorsque nous avons $s = \rho_0$

$s = \rho_0 \Longrightarrow \rho_0 = 2\rho_0 sin\frac{\theta}{2} \Longrightarrow sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

2) a-module de la vitesse du mobile en fonction du temps puis en fonction de ρ

$$\theta = \omega t, \dot{\theta} = \omega = cte \qquad \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + cos\theta)\vec{e}_\rho$$

$$\vec{V} = -\frac{1}{2}\rho_0\omega \sin\omega t\, \vec{e}_\rho + \frac{1}{2}\rho_0\omega(\,1 + \cos\omega t\,)\vec{e}_\theta = \frac{1}{2}\rho_0\big(\omega \sin\omega t\, \vec{e}_\rho + \,(\,1 + \cos\omega t\,)\vec{e}_\theta\big)$$

$$\Longrightarrow \|\vec{V}\| = \frac{1}{2}\rho_0\sqrt{(\omega \sin\omega t)^2 + (1 + \cos\omega t)^2} = \frac{1}{2}\rho_0\omega\sqrt{\sin^2\omega t + 1 + 2\cos\omega t + cos^2\omega t} = \frac{1}{2}\rho_0\omega\sqrt{2 + 2\cos\omega t}$$

$or\ \ cos\omega t = 2cos\frac{\omega t}{2} - 1$ Alors $\boxed{V = \|\vec{V}\| = \rho_0\omega cos\frac{\omega t}{2}}$ *module de la vitesse du mobile en fonction du temps*

$d'unepart : V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\rho_0 sin\frac{\theta}{2}\right)\ d'après\ 1)a$

$$V = 2\rho_0\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}cos\frac{\theta}{2} = \rho_0\dot{\theta}cos\frac{\theta}{2} = \rho_0\omega cos\frac{\theta}{2}$$

D'après les deux expressions de V on en déduit que $\rho_0\omega cos\frac{\theta}{2} = \rho_0\omega cos\frac{\omega t}{2} \Longrightarrow \theta = \omega t$

$d'autre\ part\quad \rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos\theta) = \frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos\omega t)\ \ or\ \ cos\omega t = 2cos^2\frac{\omega t}{2} - 1$

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0\left(1 + 2cos^2\frac{\omega t}{2} - 1\right) = \rho_0 cos^2\frac{\omega t}{2} \Longrightarrow cos^2\frac{\omega t}{2} = \frac{\rho}{\rho_0} \Longrightarrow \qquad cos\frac{\omega t}{2} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

Ainsi

$V = \rho_0\omega cos\frac{\omega t}{2} = \rho_0\omega\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = \omega\sqrt{\rho_0\rho} \Longrightarrow$ $\boxed{V = \|\vec{V}\| = \omega\sqrt{\rho_0\rho}}$ *de la vitesse du mobile en fonction de ρ*

b-Les composantes radiales γ_r et ortho radiale γ_θ de l'accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2[-(1 + 2cos\omega t)\vec{e}_\rho + (-2sin\omega t)\vec{e}_\theta] \Longrightarrow \begin{cases}\vec{\gamma}_\rho = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1 + 2cos\omega t)\vec{e}_\rho \\ \vec{\gamma}_\theta = 2\rho_0\omega^2 sin\omega t\ \vec{e}_\theta\end{cases}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{{\gamma^2}_\rho + {\gamma^2}_\theta} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\left(1 + 8cos^2\frac{\omega t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

c- Les composantes (γ_T, γ_N) de l'accélération dans la base intrinsèque $(\vec{T}, \vec{N})$

$$\gamma_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(\rho_0 \omega \cos\frac{\omega t}{2}\right)}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \sin\frac{\omega t}{2}$$

on sait que $\gamma^2 = {\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2 \Longrightarrow {\gamma_N}^2 = \gamma^2 - {\gamma_T}^2 = \frac{9}{4}{\rho_0}^2\omega^4 \cos^2\frac{\omega t}{2}$

$$\boxed{\gamma_N = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}}$$

d-le rayon R de courbure de la trajectoire

On a: $\gamma_N = \frac{V^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{V^2}{\gamma_N}$

$$\boxed{R = \frac{2}{3}\rho_0 \cos\frac{\omega t}{2}}$$

UFR Mathématiques et Informatique Année 2014-2015
Niveau L1 :Groupes 1,2,3,4et5.

correction Devoir surveillé d'élements de logique (1 heure)

Exercice 1 :12-points

1. 2 arguments sont :
-Si un élément de la collection se repète. ex :$\{a, b, a, d\}$
-Si on a une collection d'ensemble. ex :$\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$

2.L'affirmation est une opinion car elle peut être vraie ou fausse ;d'où elle peut avoir 2 valeurs de vérité
donc **l'affirmation n'est pas une assertion.**

3.$\odot$ La relation $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \sin x$ n'est pas une application
$\odot$ La relation $\{(1, \clubsuit), (2, \clubsuit), (7, \triangle), (5, \heartsuit)\}$ n'est pas une application de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ dans $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$
4.Sur l'ensemble $K = \{\triangle, \bigcirc, Y, \square\}$
-$\mathcal{R} = \{(\triangle, \triangle), (\bigcirc, \bigcirc), (Y, Y), (\square, \square), (\triangle, \bigcirc)\}$ est à la fois réflexive,transitive mais non symétrique.

-$\mathcal{R} = \{(\triangle, \triangle), (\bigcirc, \bigcirc), (\square, \square), (\triangle, \bigcirc), (\bigcirc, \triangle)\}$ est à la fois non réflexive,transitive et symetrique.

-$\mathcal{R} = \{(\triangle, \triangle), (\triangle, \bigcirc), (\bigcirc, \square)\}$ est à la fois non reflexive,non transitive mais anti-symétrique.

-$\mathcal{R} = \{(\square, \square), (\triangle, \triangle), (Y, Y)\}$ est à la fois non réflexive,anti-symétrique et symétrique.

Exercice 2 :8-points
1.Montrons que $A \cup (\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} B_k) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$

$\odot$ $A \cup (\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} B_k) \subset \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$
Soit $x \in A \cup (\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k)$
Puisque $x \in A \cup (\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k)$ alors $x \in A$ ou $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$
$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$ signifie pour tout $k \in \mathbb{N}, x \in B_k$
d'où $x \in A \cup B_k \Longrightarrow x \in (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \cdots \cap (A \cup B_n) \cap \cdots$
donc $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$

$\odot$ $A \cup (\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} B_k) \supset \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$
Soit $t \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$
$t \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$ signifie pour tout $k \in \mathbb{N}, t \in A \cup B_k$
donc $t \in A$ ou $t \in B_k$
Comme $t \in B_k$ alors $t \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$

finalement ona :$t \in A \cup (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k)$

2.Montrons que $(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_i) \cup (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \bigcap_{i,k\in\mathbb{N}} (A_i \cup B_k)$

laisser au lecteur

UFR Mathématiques et Informatique Année 2014-2015
Niveau L1 :Groupes 6,7,8,9 et 10.

correction Devoir surveillé d'élements de logique (1 heure)

Exercice 1 :12-points

1. 2 arguments sont :
-Si un élément de la collection se repète. ex :$\{zoulou, éléphant, zoulou, poulet\}$
-Si on a une collection d'ensemble. ex :$\{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$

2.L'affirmation est l'avis dun individu λ car elle peut être vraie ou fausse;d'où elle peut avoir 2 valeurs de vérité
donc **l'affirmation n'est pas une assertion.**

3.$\odot$ La relation $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sin x$ n'est pas une application
$\odot$ La relation $\{(1, \clubsuit), (2, \clubsuit), (4, \triangle), (5, \heartsuit)\}$ n'est pas une application de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ dans $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$
4.Sur l'ensemble $K = \{D, \triangle, \bigcirc, \square\}$
-$\mathcal{R} = \{(\triangle, \triangle), (\bigcirc, \bigcirc), (D, D), (\square, \square), (\bigcirc, \triangle), (\triangle, \square)\}$ est à la fois réflexive,non transitive et symétrique.

-$\mathcal{R} = \{(\bigcirc, \triangle), (\bigcirc, \bigcirc), (\square, \square)\}$ est à la fois non réflexive,transitive et non symetrique.

-$\mathcal{R} = \{(\triangle, \triangle), (\square, \square), (\bigcirc, \triangle), (\triangle, D)\}$ est à la fois non reflexive,non transitive et anti-symétrique.

-$\mathcal{R} = \{(\square, \square), (\triangle, \triangle), (D, D), (\bigcirc, \bigcirc)\}$ est à la fois une rélation d'équivalance et d'ordre.

Exercice 2 :8-points
1.Montrons que $A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$

$\odot$ $A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$
Soit $x \in A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)$
Puisque $x \in A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)$ alors $x \in A$ et $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ signifie qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_{k_0}$
donc $x \in A \cap B_{k_0} \Longrightarrow x \in (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cap (A \cap B_{k_0}) \cap \cdots \cap (A \cap B_n)$
d'où $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$

$\odot$ $A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) \supset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$
Soit $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$
$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap B_k)$ signifie qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t \in A \cap B_{k_0}$
donc $t \in A$ et $t \in B_{k_0}$
Comme $t \in A \cap B_{k_0}$ alors $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$

finalement ona :$t \in A \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)$

2.Montrons que $(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_i) \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \bigcup_{i,k\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_k)$

laisser au lecteur

UFHB année universitaire 2013-2014

$\boxed{\texttt{CORRECTION DU DEVOIR DE CALCUL MATRICIEL L1 GROUPE 3}}$

EXERCICE

1. soit M $\in M_4(\mathbb{R})$

M=$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$ ${}^tM = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$

2-calculons M.$({}^tM)$ et $({}^tM)$.M

$$M.({}^tM) = ({}^tM).M = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$$

3-determinant de M

$$\begin{aligned} det(M^tM) = (det(M))^2 &= det[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4] \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

4-M est inversible ssi det(M)$\neq 0$

$det(M) \neq 0 \Rightarrow (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$

$\forall (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ on a : $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}{}^tM}$

car $M^tM = t_M M = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$

$\Rightarrow M.\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}t_M\right) = \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}t_M\right).M = I_4$

Université FHB année universitaire 2014-2015
UFR MI

Correction Devoir de Calcul Matriciel

L1 Groupe 6

Durée : $1h30'$

Exercice 1

1)$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + A + 2I_3 = A^2 - A = 2I_3 \Longrightarrow \frac{1}{2}(A - I_3)A = A \times \left[\frac{1}{2}(A - I_3)\right]$

ce qui montre que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2)$A^2 = A + 2I_3 = u_2A + v_2I_3$ avec $u_2 = 1$ et $v_2 = 2$
$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *supposons* $A^n = u_nA + v_nI_3$,
Evaluons $A^{n+1} = AA^n = A(u_nA + v_nI_3) = u_nA^2 + v_nA = u_n(A + 2I) + v_nA = (u_n + v_n)A + 2u_nI_3$
soit donc $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I_3$ avec $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n$
De ce qui précède on a :
$\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) + 2u_n = 2(2u_n + v_n) = 2\alpha_n$ et
$\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n = -u_n + v_n = -\beta_n$
on sait que $A^0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3 \Longrightarrow u_0 = 0$ et $v_0 = 1 \Longrightarrow \alpha_0 = 2u_0 + v_0 = 1$ et
$\beta_0 = u_0 - v_0 = 0 - 1 = -1$, il est aisé de vérifier que $\alpha_n = 2^n$ et $\beta_n = (-1)^{n+1}$

Exercice 2

1-Soient $M = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$,on a :$(S) \Longleftrightarrow MX + B$

2-a. calcul de $M^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $M^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

b.on a alors $M^3 = 8I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{8}M^2 \times M = M \times \left(\frac{1}{8}M^2\right) = I_3 \Leftrightarrow M$ est inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{8}M^2$.

3-a. $MX = B \Leftrightarrow (M^{-1}M)X = M^{-1}B \Leftrightarrow X = M^{-1}B = \frac{1}{8}M^2B$

b.$X = \frac{1}{8}M^2B = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2a+6b \\ -2a-2b \\ 4a+4b \end{bmatrix}$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{\tfrac{1}{8}(-2a+6b, -2a-2b, 4a+4b)\}}$$

c.Lorsque : $a = 3; b = -5$ et $c = 4$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{\left(\tfrac{-9}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}\right)\}}$$

Université FHB année universitaire 2014-2015
UFR MI

Correction Devoir de Calcul Matriciel

L1 Groupe 9

Durée : $1h30'$

Exercice 1

1.

$$\forall(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2, E(t_1)E(t_2) = I_3 + (t_1+t_2)A + \frac{(t_1^2+2t_1t_2+t_2^2)^2}{2}A^2$$
$$= I_3 + (t_1+t_2)A + \frac{(t_1+t_2)^2}{2}A^2 = E(t_1+t_2)m.$$
$$\forall t\in\mathbb{R}, (-t)+t = t+(-t) = 0 \Rightarrow E(-t)E(t) = E(0) = I_3 = E(t)E(-t)$$
$$\Rightarrow E(t) \text{ inversible d'inverse } (E(t))^{-1} = E(-t), \forall t\in\mathbb{R}$$
$$\text{Donc } (E(t))^{-1} = I_3 + (-t)A + \frac{-t^2}{2}A^2 = E(-t), \forall t\in\mathbb{R}$$

2.$\forall t\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*,$ on a $(E(t))^n = I_3 + nA + \frac{(nt)^2}{2}A^2$

3.

$$B = \begin{bmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Il faut remarque que pour $A = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,on a :$A^2 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ et $A^3 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = 0$ ainsi

$B = I_3 + 4A + \frac{4^2}{2}A^2 = I_3 + 4A + 8A^2 = E(4)$, avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
comme $E(-4)$ est inversible d'inverse $E(-4)$ d'après 1. alors

$$B^{-1} = E(-4) = I_3 + (-4)A + \frac{(-4)^2}{2}A^2 = I_3 - 4A + 8A^2$$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Je rappelle que $B = E(4) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = E(4n) = I_3 + (4n)A + \frac{(4n)^2}{2}A^2 = I_3 - 4A + 8A^2 = I_3 + 4nA + 8n^2A^2 = I_3 - 4A + 8A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.$\det(B) = 1$ et $com(^tB) =^t com(B) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$

il faut remarquer que $com(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 2

La matrice augmentée de $(S_m), m \in \mathbb{R}$ est :
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & -m \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - mL_1 \end{array}$
$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 1-m \end{array}\right]$
Discussion :
Si $m = 1$ on a :$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 1 (\text{incompatible}) \\ 0 = 0 \end{cases}$
Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \varnothing = \{\}$

Si $m=-2$ on a :$(S_{-2}\Leftrightarrow)\begin{cases}x+y-2z=1\\-3y+3z=1\\0=3(\text{incompatible})\end{cases}$

Donc $S_{\mathbb{R}^3}=\varnothing=\{\}$

Si $m\in\mathbb{R}\backslash\{1,-2\}$, on a :

$$(S_m)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+mz=1\\(m-1)y+(1-m)z=1\\(1-m)(2+m)z=1-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+mz=1\\y-z=\frac{1}{m-1}\\z=\frac{1}{2+m}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+mz=1\\y=z+\frac{1}{m-1}=\frac{2+m}{(m-1)(2+m)}\\z=\frac{1}{2+m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y-mz+1=1-\frac{2+m}{(m-1)(2+m)}-\frac{m}{2+m}\\y=z+\frac{1}{m-1}=\frac{2+m}{(m-1)(2+m)}\\z=\frac{1}{2+m}\end{cases}\Leftrightarrow$$

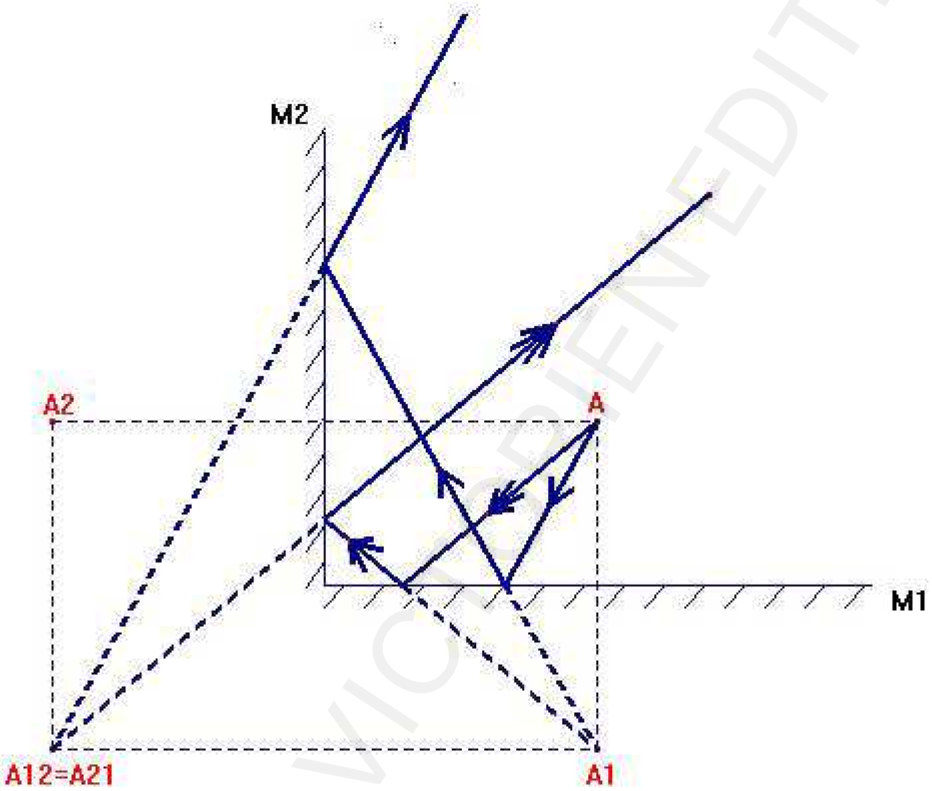
$$\begin{cases}x=\frac{-3}{(m-1)(2+m)}\\y=\frac{2+m}{(m-1)(2+m)}\\z=\frac{1}{2+m}\end{cases}$$

Ainsi donc $\boxed{S_{\mathbb{R}^3}=\{\left(\dfrac{-3}{(m-1)(2+m)},\dfrac{2+m}{(m-1)(2+m)},\dfrac{1}{2+m}\right),\forall m\in\mathbb{R}\backslash\{1,-2\}\}}$

Correction

Exercice 1 :Miroir plan

A' image de A donné par un miroir plan est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.



<u>Construction de A1 image de A par le miroir M1 :</u>

A1 est le symétrique de A par rapport au plan du miroir M1.
A1 est en avant du miroir M2, il peut donc jouer le rôle d'objet réel par rapport au miroir M2.

<u>Construction de A12 image de A1 par le miroir M2 :</u>

A12 est le symétrique de A1 par rapport au plan du miroir M2.

Le processus ne peut pas se poursuivre par une nouvelle réflexion sur M1 car A12 se trouve en arrière de M1 et ne peut donc jouer le rôle d'objet réel pour M1.

<u>Construction de A2 image de A par le miroir M2 :</u>

A2 est le symétrique de A par rapport au plan du miroir M2.
A2 est en avant du miroir M1, il peut donc jouer le rôle d'objet réel par rapport au miroir M2.

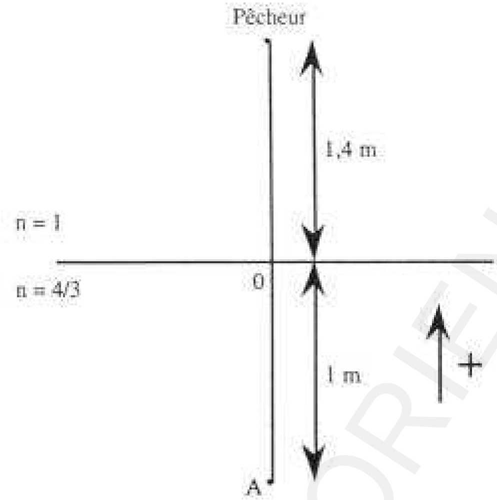
<u>Construction de A21 image de A2 par le miroir M1 :</u>

A21 est le symétrique de A2 par rapport au plan du miroir M1.

Le processus ne peut pas se poursuivre par une nouvelle réflexion sur M2 car A21 se trouve en arrière de M2 et ne peut donc jouer le rôle d'objet réel pour M2.

Finalement, l'observateur peut voir 3 images : A1, A2, A21=A12.

Exercice 2 : Dioptre plan



1. Soit OA' la distance observée : $\frac{n}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$ donc $\overline{OA'} = \frac{3\overline{OA}}{4}$ soit

   $\overline{OA'} = -0{,}75m$.
   Doù $\overline{P_eA'} = -1{,}4 - 0{,}75 = -2{,}15m$.
   Le pêcheur voit donc le poisson à 2,15 m en dessous de lui.

2. Cette fois, on choisit le sens positif vers le bas.
   $\frac{1}{\overline{OP_e}} = \frac{n}{\overline{OP'_e}}$ donc $\overline{OP'_e} = -1{,}86m$ et $\overline{AP'_e} = -2{,}86m$.
   Le Poisson voit donc le pêcheur à 2,86 m au dessus de lui.

3. $\frac{n}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$. donc $n\overline{OA'} = \overline{OA}$, et $\overline{OA} = n(\overline{OA} + \overline{AA'})$ d'ou $(1-n)\overline{OA} = n\overline{AA'}$ or
   $\overline{AA'} = 0{,}15m$ donc h = $\overline{OA}$ = -0,6 m.
   Donc il doit y avoir 60 cm d'eau au-dessus du poisson pour qu'il subisse

Correction

Miroirs et dioptres sphériques

Vérifications des connaissances :

On remarquera que les notations diffèrent de celles utilisées dans le cours. En effet, l'indice du milieu de la face d'entrée est n et l'indice du milieu de la face de sortie est n'. La formule de conjugaison du cours : $\frac{n_2}{\overline{SA_2}} - \frac{n_1}{\overline{SA_1}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$ ***devient*** $\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$***.***

La vergence est par définition $V = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$.

Sur la figure $\overline{SC} < 0$. Le dioptre est convergent si V>0 et donc si n>n'.

Le foyer image est F' : c'est l'image réelle d'un point à l'infini sur l'axe, c'est à dire d'un point qui envoie des rayons parallèles à l'axe optique.

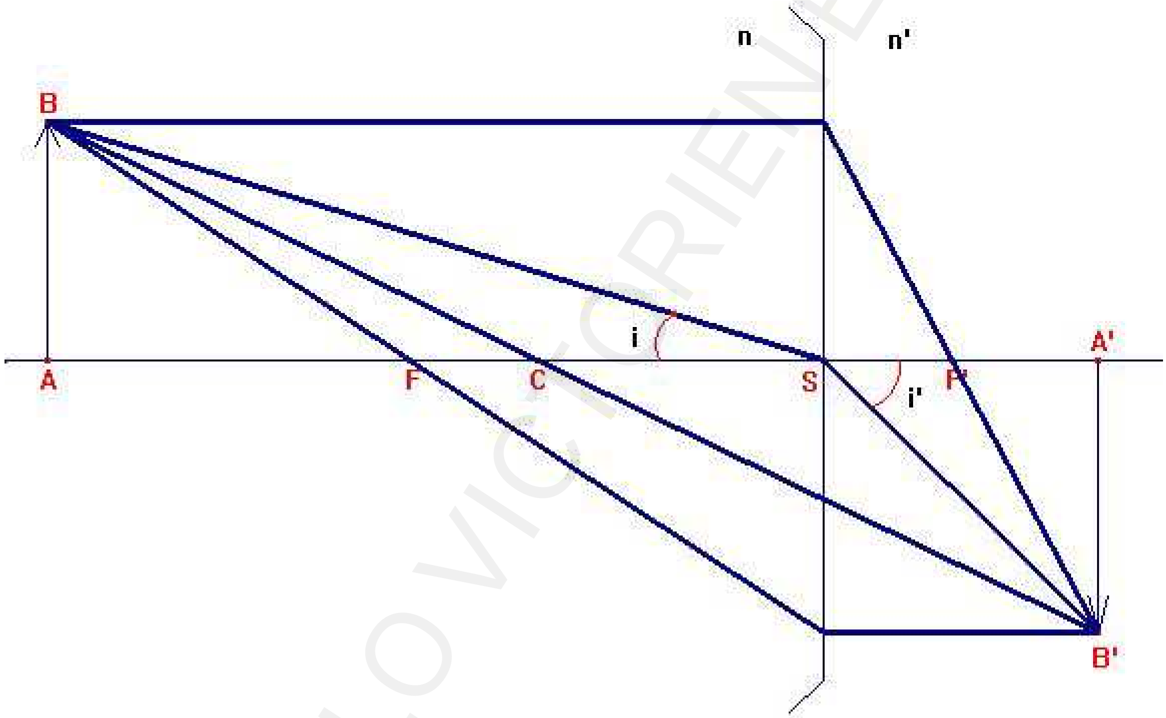
Quand les foyers image et objet et le centre d'un dioptre sont donnés on peut tracer 3 rayons connus :

- Le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique émerge du dioptre en coupant l'axe optique au foyer image du dioptre.
- Le rayon issu de B passant par le foyer objet du dioptre émerge du dioptre en étant parallèle à l'axe optique.
- Le rayon issu de B et passant par le centre du dioptre émerge du dioptre en ne changeant pas de direction.

Les 3 rayons tracés se coupent en un même point (conditions de Gauss), ce point est l'image de B par le dioptre. Un petit objet plan perpendiculaire à l'axe optique du dioptre donne une image, elle aussi, perpendiculaire à l'axe optique : l'image de A est donc à l'intersection de l'axe optique et de sa perpendiculaire passant par B.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation de Gauss (angles faibles autour de l'axe optique), nous pouvons sur la figure assimiler la trace de la face courbe du dioptre à celle de son plan tangent (segment de droite aux 2 brisures indiquant le sens de la courbure).

De plus, le rayon issu de B passant par S fait un angle par rapport à l'axe optique, ce rayon émerge du dioptre en passant par le point B' et en faisant un angle i' par rapport à l'axe optique.



N.B. : Sur la figure, pour qu'elle soit lisible, on a dilaté les dimensions perpendiculairement à l'axe optique. Sur cette figure les angles que forment les rayons avec l'axe optique sont donc beaucoup plus grands qu'en réalité. On peut donc utiliser les approximations $\tan(i) \approx i$ et $\tan(i') \approx i'$ pour le raisonnement.

<u>Formules de conjugaisons:</u>

$$\boxed{\begin{matrix} A \\ n \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} A' \\ n' \end{matrix}}$$

Les rayons envoyés sur ledioptre par l'objet A arrivent dans le milieu d'indice n.

Les rayons qui contribuent à la formation de l'image A' de Aémergent dans le milieu d'indice n'.

- Origine au sommet : $\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$

- Origine au centre : $\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$

<u>Formules de grandissement :</u>

- Origine au sommet

$\tan(i) = \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}$ et $\tan(i') = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}}$,
comme nous considérons l'approximation de Gauss $\tan(i) \approx i$ et $\tan(i') \approx i'$
donc $i = \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}$ et $i' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}}$.

De plus grâce aux lois de Descartes, nous pouvons écrire $n.\sin(i) = n'.\sin(i')$,
mais pour les mêmes raisons : $\sin(i) \approx i$ et $\sin(i') \approx i'$,
nous obtenons donc : $n.i = n'.i'$.

Soit $n\frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = n'\frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}}$ et finalement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

- Origine au centre

D'après le théorème de Thalès dans les triangles CAB et CA'B', nous pouvons écrire :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

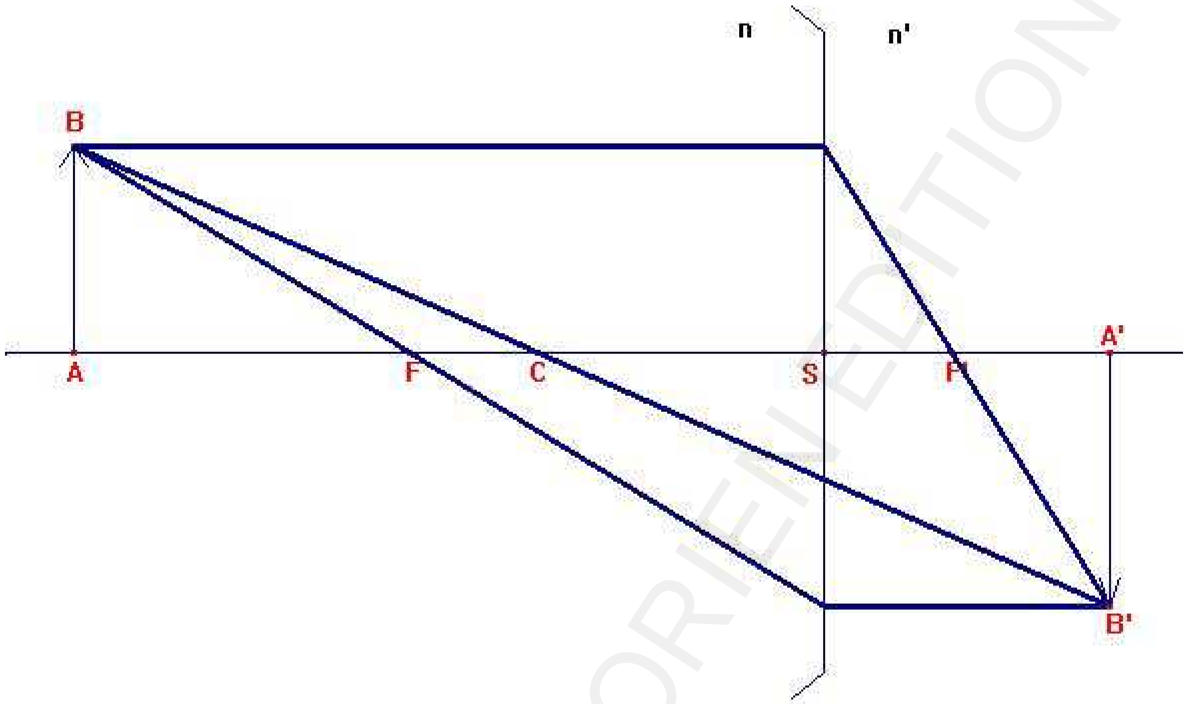
- Origine aux foyers

$\overline{AB} = \overline{SI}$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}}$
d'après le théorème de Thalès dans les triangles A'B'F' et F'SI nous pouvons écrire :
$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}$.

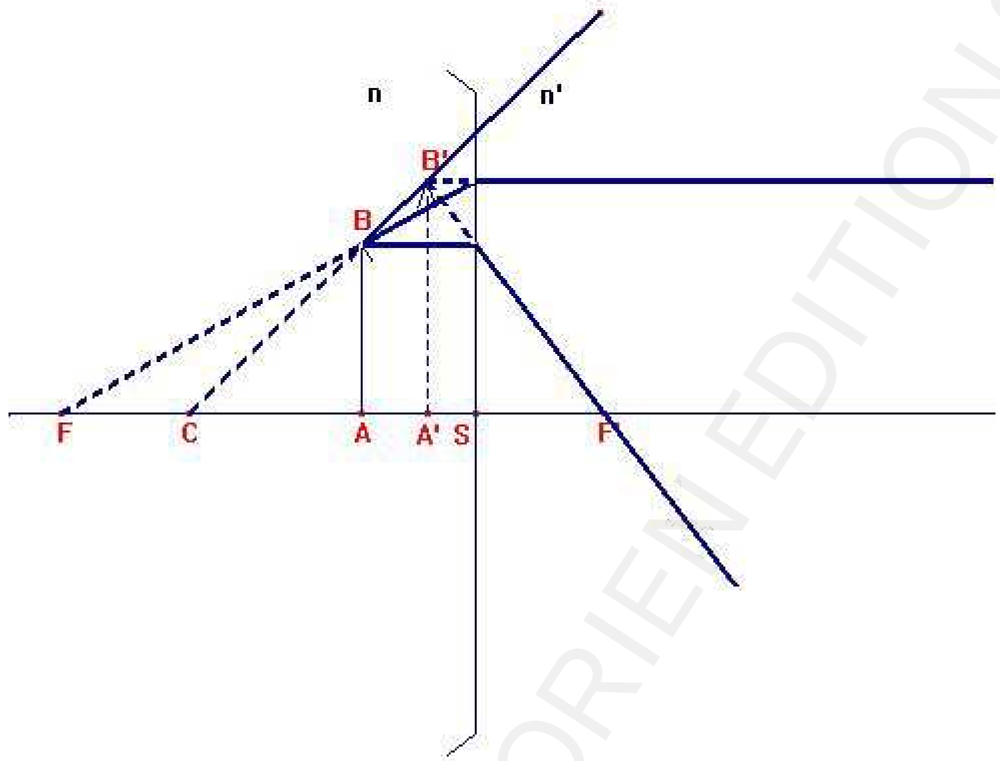
$\overline{A'B'} = \overline{SJ}$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{AB}}$
d'après le théorème de Thalès dans les triangles ABF et FSJ nous pouvons écrire :
$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$.

On en déduit la formule de Newton : $\overline{F'A'}.\overline{FA} = \overline{F'S}.\overline{FS}$

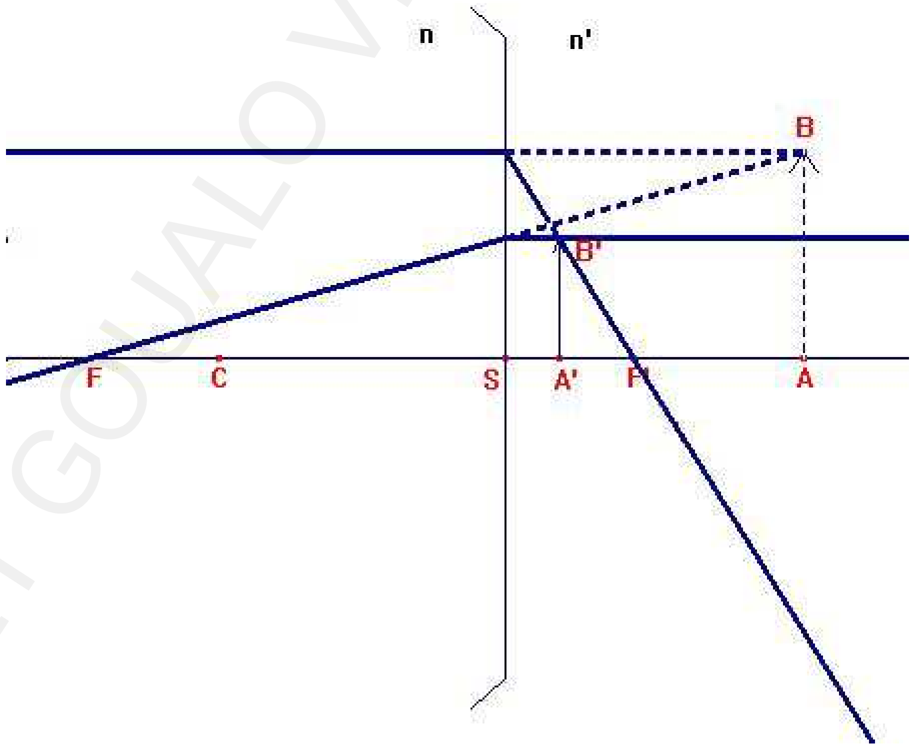
1er Cas : $A \in]-\infty, F]$, l'objet est réel et l'image est réelle.



2ème cas : $A \in [F,S]$, l'objet est réel, l'image est virtuelle :



3ème cas : $A \in [S,+\infty[$, l'objet est virtuel, l'image est réelle:



Exercice 2 : Dioptre sphérique

1. Position des foyers du dioptre

$$\boxed{\begin{matrix}A\\ n\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}A'\\ n'\end{matrix}}$$

La formule de conjugaison d'un dioptre sphérique avec origine au sommet est :
$\dfrac{n'}{\overline{SA'}} - \dfrac{n}{\overline{SA}} = \dfrac{n'-n}{\overline{SC}}$ (1).

Si l'image se trouve en F', foyer image du dioptre, l'objet est positionné en $-\infty$: $\overline{SA} = -\infty$ et $\overline{SA'} = \overline{SF'}$. Soit, en remplaçant dans l'équation (1) : $\overline{SF'} = \dfrac{n'}{n'-n}\overline{SC}$.

De la même manière, si l'objet se trouve en F, foyer objet du dioptre, l'image est positionnée en $+\infty$: $\overline{SA'} = +\infty$ et $\overline{SA} = \overline{SF}$. Soit, en remplaçant dans l'équation (1) : $\overline{SF} = -\dfrac{n}{n'-n}\overline{SC}$.

<u>Application Numérique</u> : $\overline{SF} = -30\text{cm}$ et $\overline{SF'} = 40\text{cm}$.

2. Position de AB et A'B'

La formule de grandissement avec origine au sommet est : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{n}{n'}\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ (2).

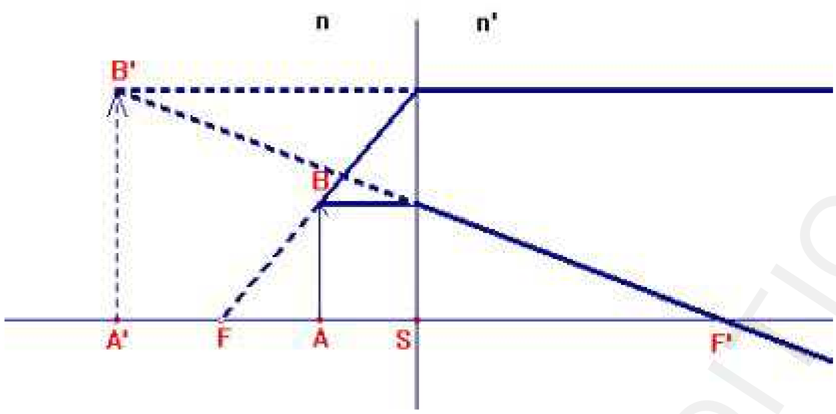
De l'équation (2), on a : $\dfrac{\overline{SA'}}{n'} = \dfrac{\gamma}{n}\overline{SA}$ d'où en inversant cette équation $\dfrac{n'}{\overline{SA'}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{n}{\overline{SA}}$ (3).

A partir de l'équation (1), on obtient $\dfrac{n'}{\overline{SA'}} = \dfrac{n'-n}{\overline{SC}} + \dfrac{n}{\overline{SA}}$ et en remplaçant ceci dans l'équation (3), on obtient $\dfrac{n'-n}{\overline{SC}} + \dfrac{n}{\overline{SA}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{n}{\overline{SA}}$ soit $\dfrac{n}{\overline{SA}}\left(\dfrac{1}{\gamma} - 1\right) = \dfrac{n'-n}{\overline{SC}}$ d'où $\overline{SA} = \dfrac{n\overline{SC}}{n'-n}\dfrac{1-\gamma}{\gamma}$.

De la même manière on obtient : $\overline{SA'} = \dfrac{n'\overline{SC}(1-\gamma)}{n'-n}$.

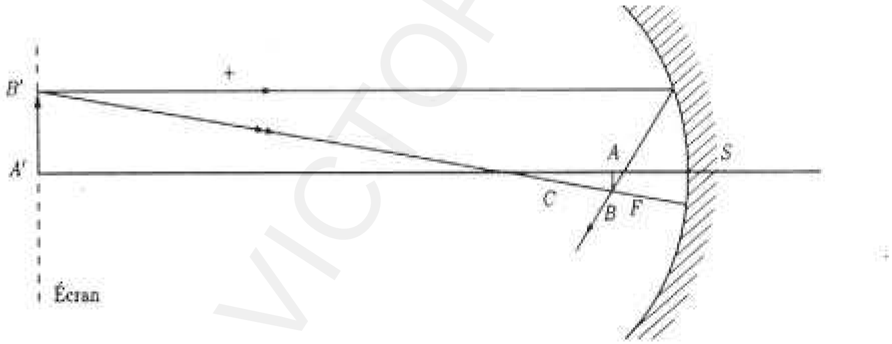
<u>Application numérique</u> : $\overline{SA} = -15\text{cm}$ et $\overline{SA'} = -40\text{cm}$

3. Marche d'un faisceau lumineux



A est le milieu de FS. L'image A'B' est virtuelle.

Exercice 3 :



1. Par définition, le foyer objet et le foyer image d'un miroir sont confondus, et si on choisit le sens de la lumière comme sens positif : $\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = -0{,}5$ m

2. Si on utilise par exemple la formule de conjugaison avec l'origine au foyer $\overline{FA}.\overline{FA'} = \overline{FS}^2$. $\overline{FA'} = -4{,}5$ m , $\overline{FS} = +0{,}5$ m, on trouve $\overline{FA} = -0{,}056$ m. On trouve que l'objet et l'image se trouvent du même côté du foyer.

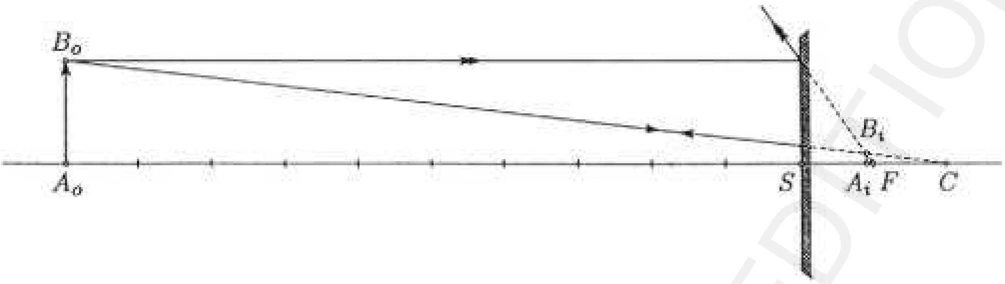
3. $\gamma = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = -9 = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$. L'image est renversée par rapport à l'objet.

4. Les trois rayon possibles sont :

   - celui qui passe par le centre et n'est pas dévié,
   - Le rayon parallèle à *CS* qui passe par *F* après réflexion,
   - Le rayon qui passe par *F'* et qui est parallèle à *CS* après réflexion.

Voir figure ci dessus.

Exercice 4 : Rétroviseur



En prenant le sommet S comme origine, on a :

$\frac{1}{\overline{SA_0}} + \frac{1}{\overline{SA_i}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ or, $\overline{SA_0}$ = - 10 m et $\gamma = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_0B_0}} = +\frac{1}{10} = -\frac{\overline{SA_i}}{\overline{SA_0}}$ donc $\overline{SA_i}$ = 1 m donc de la relation de conjugaison, on tire $\overline{SC}$ = 2,22 m.

Le miroir est convexe de rayon R= 2,22 m.

Exercice 5 : Association de dioptres sphériques.

Formule de conjugaison avec origine au sommet du premier dioptre : $\frac{n}{\overline{SA_1}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n - n_1}{\overline{SC_1}}$ (1).

Formule de conjugaison avec origine au sommet du second dioptre : $\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA_1}} = \frac{n_2 - n}{\overline{SC_2}}$ (2).

En additionnant (1) et (2), on obtient : $\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n - n_1}{\overline{SC_1}} + \frac{n_2 - n}{\overline{SC_2}}$ (3), formule de conjugaison du système optique complet avec origine en S.

Formule de grandissement avec origine au sommet du premier dioptre : $\gamma_1 = \frac{n_1}{n}\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}$

Formule de grandissement avec origine au sommet du second dioptre : $\gamma_2 = \frac{n}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_1}}$

Formule de grandissement avec origine au sommet du système optique complet :

$\gamma = \gamma_1\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$(4).

Les équations (3) et (4) sont les équations d'un dioptre de rayon SC tel que :

$$\frac{n_2-n_1}{\overline{SC}}=\frac{n-n_1}{\overline{SC_1}}+\frac{n_2-n}{\overline{SC_2}} \text{ soit } \overline{SC}=\frac{(n_2-n_1)\overline{SC_1}\,\overline{SC_2}}{(n-n_1)\overline{SC_2}+(n_2-n)\overline{SC_1}}.$$

La formule de conjugaison du système optique complet est donc : $\frac{n_2}{\overline{SA'}}-\frac{n_1}{\overline{SA}}=\frac{n_2-n_1}{\overline{SC}}$ (5).

Si l'objet est positionné à $-\infty$ ($\overline{SA}=-\infty$), l'image sera positionnée au foyer image du système ($\overline{SA'}=\overline{S\Phi'}$), on obtient : $\overline{S\Phi'}=\frac{n_2\overline{SC}}{n_2-n_1}$.

De la même manière, si l'image est positionnée à $+\infty$ ($\overline{SA'}=+\infty$), l'objet sera positionné au foyer objet du système ($\overline{SA}=\overline{S\Phi}$) ; on obtient : $\overline{S\Phi}=-\frac{n_1\overline{SC}}{n_2-n_1}$.

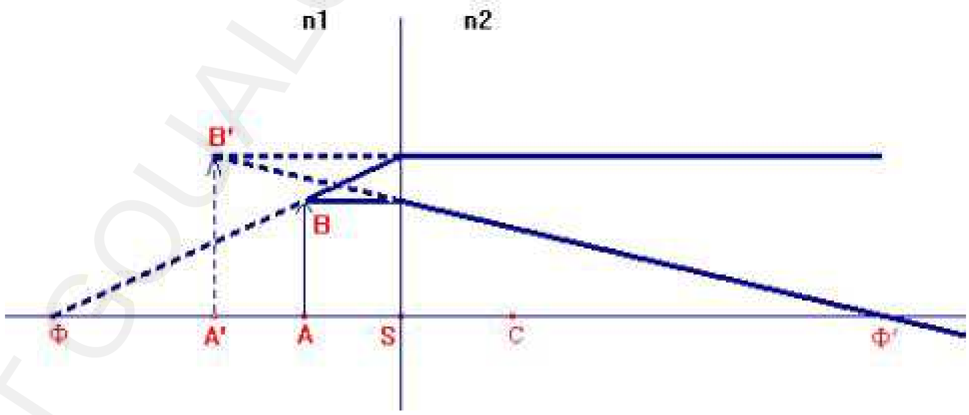
Le rapport des distances focales est donc $\frac{\overline{S\Phi'}}{\overline{S\Phi}}=-\frac{n_2}{n_1}$.

2) Si $\overline{SA}=-\frac{R}{2}$, on trouve $\overline{SC}=\frac{4}{7}R$, $\overline{S\Phi}=-\frac{12}{7}R$ et $\overline{S\Phi'}=\frac{16}{7}R$.

D'après l'équation (5), on a $\overline{SA'}=\frac{n_2\overline{SA}\,\overline{SC}}{(n_2-n_1)\overline{SA}+n_1\overline{SC}}$ d'où $\overline{SA'}=-\frac{16}{17}R$.

$$\gamma=\frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SC}+(n_2-1)\overline{SA}}=\frac{24}{17}\approx 1{,}4$$

3)

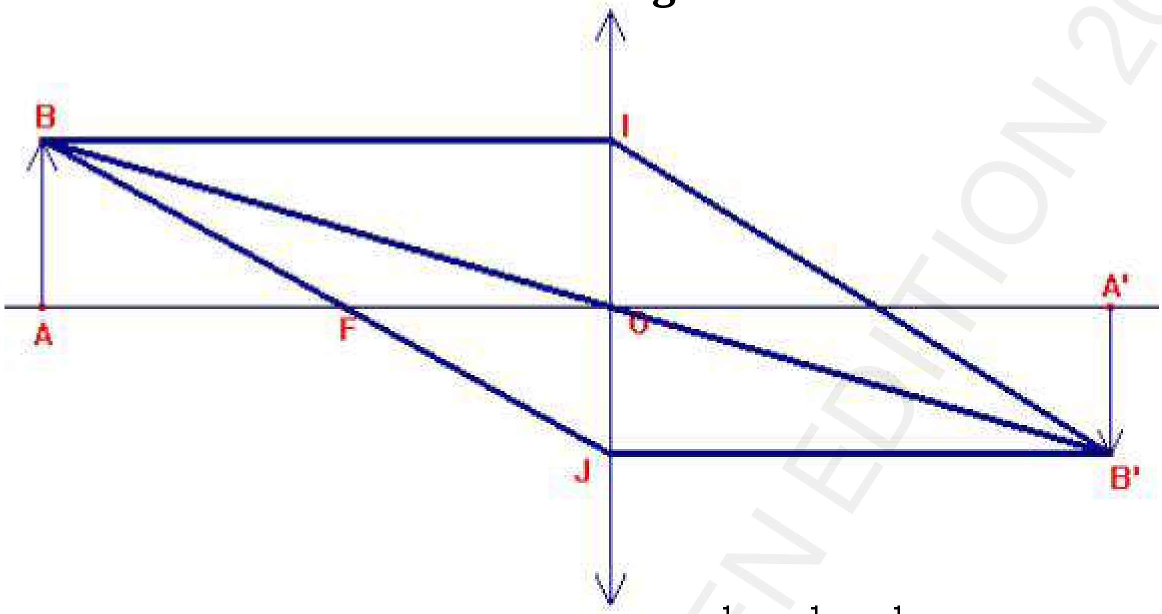


4) On retrouve la « formule » des lentilles minces. L'étudiant vérifiera que $\frac{1}{\overline{S\Phi'}}=(n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC_1}}-\frac{1}{\overline{SC_2}}\right)$ est donné par $\frac{1}{\overline{S\Phi'}}=(n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC_1}}-\frac{1}{\overline{SC_2}}\right)$ alors même qu'il n'y a évidemment plus de dioptre équivalent puisque $n_2=n_1$ et $\overline{SC}=0$

Correction

Lentilles

Exercice 1 :Construction d'images :



Formule de conjugaison avec origine au centre optique: $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$.

Formule de grandissement avec origine au centre optique: $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

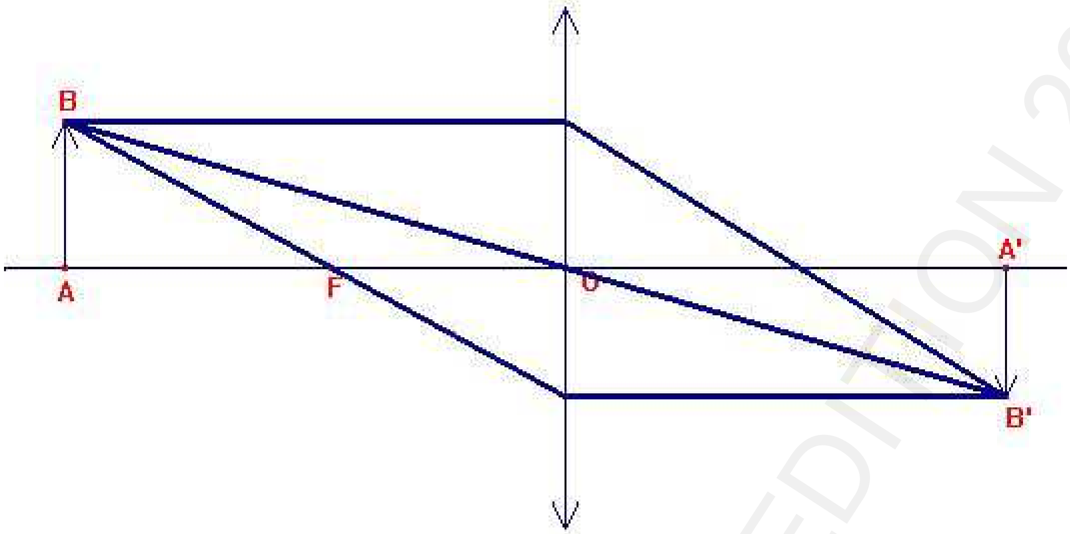
Formules de grandissement avec origine aux foyers:

- $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{AB}}$ en appliquant le théorême de Thales aux triangles FAB et FOJ, on obtient : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$

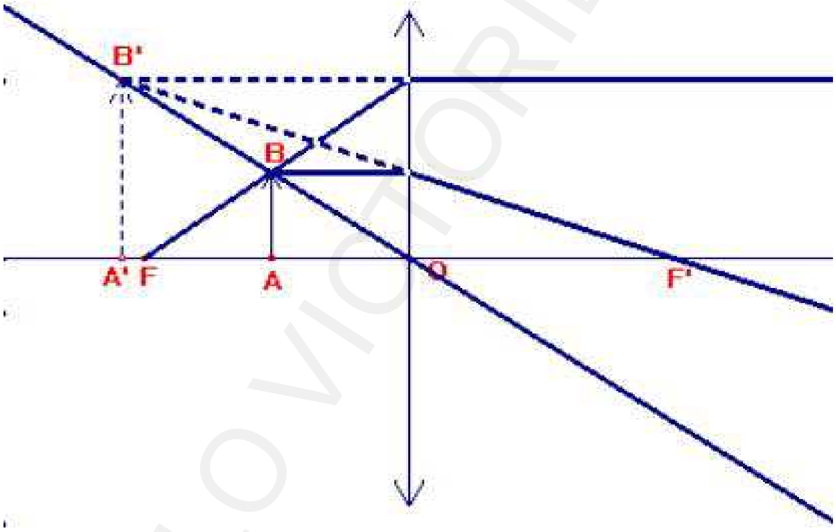
- $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}}$ en appliquant le théorême de Thales aux triangles F'A'B' et F'OI, on obtient : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$

- $\gamma = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \Rightarrow \overline{FA}.\overline{F'A'} = \overline{OF}.\overline{OF'} = -\overline{OF'}^2$ (Formule de Newton)

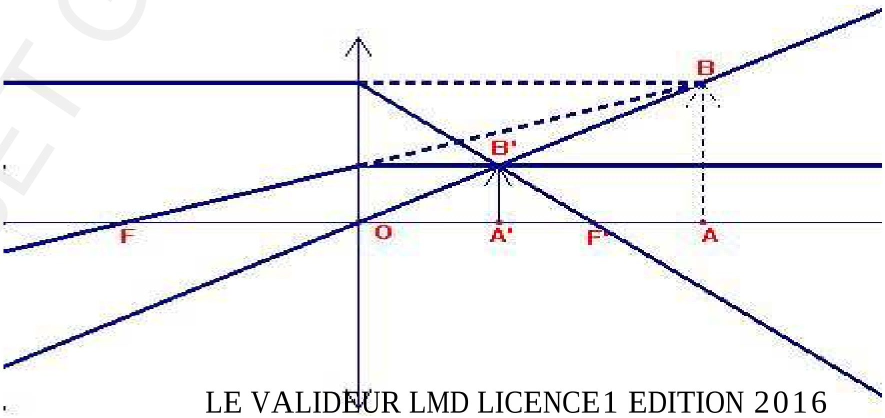
1^{er} Cas : $A \in \left]-\infty, F\right]$, l'objet est réel et l'image est réelle.



2ème cas : $A \in [F, O]$, l'objet est réel, l'image est virtuelle :



3ème cas : $A \in [O, +\infty[$, l'objet est virtuel, l'image est réelle:



UFHB année universitaire 2012-2013

CORRECTION PARTIELLE DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT L1 session 1

Exercice 1 (outil Mathématique) :

1) Resolution de l'équation $\alpha\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}(E)$

On a : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} - \alpha\vec{x}$ (1)

$\vec{a}.(E)$: $\alpha\vec{a}.\vec{x} + \vec{a}.(\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a}.\vec{b}$ par permutatuion circulaire $\vec{a}.(\vec{a} \wedge \vec{x}) = 0$

Ainsi $\alpha\vec{a}.\vec{x} = \vec{a}.\vec{b} \Longrightarrow \vec{a}.\vec{x} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\alpha}$ (2) car α non nul

$\vec{a} \wedge (E)$: $\alpha\vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

On a :$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = (\vec{a}.\vec{x}).\vec{a} - (\vec{a} \wedge \vec{a}).\vec{x}$

alors $\alpha\vec{a} \wedge \vec{x} + (\vec{a}.\vec{x}).\vec{a} - (\vec{a} \wedge \vec{a}).\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ or d'après (1) et (2) $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} - \alpha\vec{x}$ et $\vec{a}.\vec{x} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\alpha}$

$\alpha(\vec{b} - \alpha\vec{x}) + (\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\alpha}).\vec{a} - \vec{a}^2\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

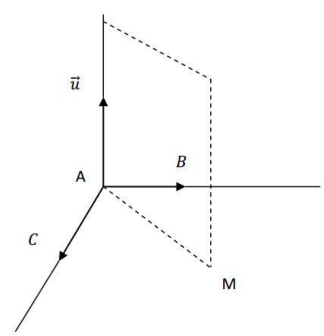
$(-\alpha^2 - \vec{a}^2)\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b} - \alpha\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\alpha}\vec{a}$

$$\boxed{\vec{x} = -\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\alpha^2+\vec{a}^2} + \frac{\alpha\vec{b}}{\alpha^2+\vec{a}^2} + \frac{(\vec{a}.\vec{b}).\vec{a}}{\alpha(\alpha^2+\vec{a}^2)}}$$

2) une équation du plan

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ on a :$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$



$A(-1, 1, 0)$ $B(2, 1, 1)$ $C(3, -1, 1)$

on a :$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ on aura $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$$\Longrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-1 & 0 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1-3 & 0 & 1 \\ y-1 & 0 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} x+1-3 & 1 & \\ y-1 & -2 & \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x+1-3z)+y-1 = 0$$

Donc une équation du plan est $\boxed{2x + y - 6z + 1 = 0}$
Le vecteur $\vec{u} = (2, 3, -6)$ est normal à $\mathcal{P}$.
La distance de $K(1, 2, 1)$ à $\mathcal{P}$ est :
$d(K, \mathcal{P}) = \frac{|2\times(1)+1\times(2)-6\times(1)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \simeq 0,156173$

$\boxed{d(K, \mathcal{P}) = \frac{1}{\sqrt{41}}}$

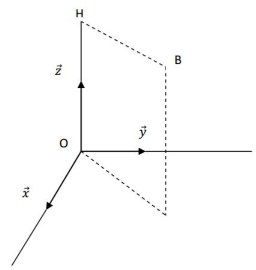
CORRECTION DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT L1 session 2

Exercice 1 :

Note de cours

Les cosinus directeurs d'un vecteur $\vec{a}$.
Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base cartésienne
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction $\vec{a}$ défini par : $\boxed{\vec{u}=\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}}$
Soient θ_x θ_y et θ_z les angles definis par $\theta_x=(\widehat{\vec{u},\vec{i}})$ $\theta_y=(\widehat{\vec{u},\vec{j}})$ et $\theta_z=(\widehat{\vec{u},\vec{k}})$
$\cos\theta_x$ $\cos\theta_y$ et $\cos\theta_z$ sont par définition **les cosinus directeurs de** $\vec{a}$
$\vec{u}.\vec{i}=||\vec{u}||\times||\vec{i}||\times\cos\theta_x=\cos\theta_x$
$\vec{u}.\vec{j}=||\vec{u}||\times||\vec{j}||\times\cos\theta_y=\cos\theta_y$
$\vec{u}.\vec{k}=||\vec{u}||\times||\vec{k}||\times\cos\theta_z=\cos\theta_z$
Debut de l'exercice
1) $\vec{a}.\vec{x}=||\vec{a}||\times||\vec{x}||\times\cos\theta_x$ et $||\vec{a}||=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$
$\cos\theta_x=\frac{\vec{a}.\vec{x}}{||\vec{a}||\times||\vec{x}||}=\frac{a_x}{||\vec{a}||}$
$\cos\theta_y=\frac{\vec{a}.\vec{y}}{||\vec{a}||\times||\vec{x}||}=\frac{a_y}{||\vec{a}||}$
$\cos\theta_z=\frac{\vec{a}.\vec{z}}{||\vec{a}||\times||\vec{x}||}=\frac{a_z}{||\vec{a}||}$
d'où $\boxed{\cos\theta_x=\frac{2}{3}\ \cos\theta_y=-\frac{2}{3}\ \text{et}\ \cos\theta_z=-\frac{2}{3}}$
2)⊙ équation du plan passant par B et perpendiculaire à $\vec{a}$
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{P}$
$\overrightarrow{BM}\perp\vec{a}\Longleftrightarrow\overrightarrow{BM}.\vec{a}=0$
On a : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$ et $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BM}\perp\vec{a}\Longleftrightarrow 2(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0\Longleftrightarrow\boxed{2x+y-2z+2=0}$
⊙ distance de O à ce plan
$|\cos(\widehat{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OH}})|=\frac{OH}{OB}\Longrightarrow OH=OB|\cos(\widehat{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OH}})|$ or $|\cos(\widehat{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OH}})|=\frac{|\overrightarrow{OB}.\vec{a}|}{||\overrightarrow{OB}||.||\vec{a}||}$

FIGURE 1 –



$\Longrightarrow OH = OB \times \frac{|\overrightarrow{OB}.\vec{a}|}{||\overrightarrow{OB}||.||\vec{a}||}$ et $|\overrightarrow{OB}.\vec{a}| = |2+2-6| = |-2| = 2 \Longrightarrow \boxed{OH = \frac{2}{3}}$

Exercice 2 :

1-a) Cartésiennes et cylindrique
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z = \rho(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + z\vec{e}_z$
$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\vec{e}_1 + \rho\sin\varphi\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ car $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$
or $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$
Alors $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$
b) Cartésiennes et sphériques
$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_3 + \sin\theta\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2$
$\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\vec{e}_3 + \sin\theta\vec{e}_\rho) = r\cos\theta\vec{e}_3 + r\sin\theta\vec{e}_\rho = r\cos\theta\vec{e}_3 + r\sin\theta(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2)$
$= r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_1 + r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_2 + r\cos\theta\vec{e}_3$
Alors $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$
2-a) dS en fonction des coordonnées cartésiennes
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Longrightarrow d\vec{OM} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3$
Alors $\boxed{dS = ||d\vec{OM}|| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}$
b)dS en fonction des coordonnées cynlindriques
$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \Longrightarrow d\vec{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho\vec{e}_\rho + dz\vec{z}_z$ or $d\vec{e}_\rho = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\vec{e}_\rho} \times d\varphi = d\varphi\vec{e}_\varphi$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$

Alors $\boxed{dS = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}}$

Bonus : dS en fonction des coordonnées sphériques

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \Longrightarrow d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r$ or $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_3 + \sin\theta\vec{e}_\rho$

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{OM} &= dr\vec{e}_r + r\left[\frac{d\cos\theta}{d\theta} \times d\theta + \frac{d\sin\theta}{d\theta} \times d\theta + \sin\theta\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \times d\varphi\right] \\
&= dr\vec{e}_r + r(-\sin\theta d\theta\vec{e}_3 + \cos\theta d\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta d\varphi\vec{e}_\rho) \\
&= dr\vec{e}_r + rd\theta(-\sin\theta\vec{e}_3 + \cos\theta\vec{e}_\rho) + \sin\theta d\varphi\vec{e}_\rho \\
&= dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Alors $\boxed{dS = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2}}$

Exercice 3 :

$M(\rho, \theta, z)$ $\rho = R, \theta = \omega t$ $z = at; a, \omega$ et R constants.

1) Expression du pas h de l'hélice.

$h = \Delta z = z_f - z_i$

initialement $z_i = 0$ et $z = z_f, t = T$ $z_f = aT$

d'où $h = aT$ or $\theta = \omega t \Longrightarrow t = \frac{\theta}{\omega}$ $t = T, \theta = \Delta\theta = 2\pi$

Ainsi $\boxed{h = \frac{2\pi a a}{\omega}}$

2) Expression de $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ en coordonnées cylindriques

⊙ Expression de $\vec{v}$

On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho + at\vec{e}_z$

d'où $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\vec{e}_\rho + at\vec{e}_z)}{dt} = R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + a\vec{e}_z$ car $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$ or $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \omega\vec{e}_\theta$

Donc $\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta + a\vec{e}_z}$

⊙ Expression de $\vec{\gamma}$

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\omega\vec{e}_\theta + a\vec{e}_z)}{dt} = \frac{d(R\omega\vec{e}_\theta)}{dt} + \frac{d(a\vec{e}_z)}{dt} = R\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

or $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\omega\vec{e}_\rho$

Donc $\boxed{\vec{\gamma} = -R\omega^2\vec{e}_\rho}$

⊙ distance s

On a : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} \Longrightarrow \frac{||d\overrightarrow{OM}||}{dt} = ||\vec{v}||$

Posons $||d\overrightarrow{OM}|| = ds$ et $||\vec{v}|| = v$ d'où $\frac{ds}{dt} = v \Longrightarrow ds = vdt$

or $v = \sqrt{(R\omega)^2 + a^2}$ donc $ds = \sqrt{(R\omega)^2 + a^2}dt$

$s = \int \sqrt{(R\omega)^2 + a^2}dt = \sqrt{(R\omega)^2 + a^2} \int dt \Longrightarrow \boxed{s = \sqrt{(R\omega)^2 + a^2}t + c}$, c une constante

3)dtermination du triède de Fermat $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$

$\odot$ On a : $\overrightarrow{T} = \frac{\vec{v}}{v} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}(R\omega\vec{e}_\theta + a\vec{e}_z)}$

$\odot$ $\overrightarrow{N} = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}}{||\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}||}$

$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{T}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}} \frac{d(R\omega\vec{e}_\theta + a\vec{e}_z)}{d\theta} \times \omega = \frac{\omega}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}(-R\omega\vec{e}_\rho)$

$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{-R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}\vec{e}_\rho$

$||\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}|| = \frac{R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}$

donc : $\boxed{\overrightarrow{N} = -\vec{e}_\rho}$

$\odot$ On a : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N} = \left(\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}(R\omega\vec{e}_\theta + a\vec{e}_z)\right) \wedge (-\vec{e}_\rho)$

donc $\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{R\omega}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}\vec{e}_z - \frac{a}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}}\vec{e}_\theta}$

$\odot$ $\boxed{\vec{v} = \sqrt{(R\omega)^2 + a^2}\overrightarrow{T}}$

$\odot$ $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{(R\omega)^2 + a^2}\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$ or $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{\gamma} = \omega\sqrt{(R\omega)^2 + a^2}\overrightarrow{N}$

4)$\odot$ Rayon de courbure R_c

$\frac{\overrightarrow{N}}{R_c} = \frac{\overrightarrow{T}}{ds} \Longrightarrow \frac{||\overrightarrow{N}||}{R_c} = ||\frac{\overrightarrow{T}}{ds}|| \Longleftrightarrow \frac{1}{R_c} = ||\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}|| \times ||\frac{dt}{ds}||$

$\frac{1}{R_c} = \frac{R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}} \times \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}} \Longrightarrow \boxed{R_c = \frac{(R\omega)^2+a^2}{R\omega^2}}$

$\odot$ Rayon de torsion T_c

$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = -\frac{\overrightarrow{N}}{T_c} \Longrightarrow \frac{||\overrightarrow{N}||}{||\overrightarrow{T}_c||} = ||\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}|| \Longleftrightarrow \frac{1}{T_c} = ||\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}|| \times ||\frac{dt}{ds}||$

$\frac{1}{T_c} = \frac{a\omega}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}} \times \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2+a^2}} \Longrightarrow \boxed{T_c = \frac{(R\omega)^2+a^2}{a\omega}}$

Exercice 4 :

1)a-$\odot$ Vitesse relative de M

$V_r = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R'} = \dfrac{d(r_0(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{x}')}{dt} \Longrightarrow \boxed{V_r = r_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{x}'}$

⊙ Vitesse d'entrainement

$\overrightarrow{V}_e = \overrightarrow{V}(O'|R) + \vec{\omega}(R'|R) \wedge \overrightarrow{OM}, \vec{\omega}(R'|R) = \vec{\omega}_{R'|R} = \dot{\theta}\vec{k}$

$V_e = \vec{\omega}_{R'|R} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r_0\,(\cos\omega t + \sin\omega t)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par rapport à R

$\boxed{V_e = r_0\omega(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{y}\,'}$

b) Module de $\overrightarrow{V}_a$

$\overrightarrow{V}_a = \overrightarrow{V}_r + \overrightarrow{V}_e \Longrightarrow ||\overrightarrow{V}_a|| = V_a = \sqrt{(V_r)^2 + (V_e)^2}$

$V_a = \sqrt{(r_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t))^2 + (r_0\omega(\cos\omega t + \sin\omega t))^2} \Longrightarrow \boxed{V_a = r_0\omega\sqrt{2}}$

Sa direction

On a : $\tan\varphi = \frac{V_e}{V_r} = \frac{r_0\omega(\cos\omega t + \sin\omega t)}{r_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t)} = \frac{\cos\omega t + \sin\omega t}{\cos\omega t - \sin\omega t}$

à $t = 0, \overrightarrow{OM}_0 = r_0\vec{x}' \Longrightarrow \tan\varphi = \frac{\cos 0 + \sin 0}{\cos 0 - \sin 0} = 1 \Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

2)a-⊙ accélération relative $\vec{\gamma}_r$

$\vec{\gamma}_r = \left(\frac{d(\overrightarrow{V}_r)}{dt}\right)_{R'} \Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_r = -r_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{x}\,'}$

⊙ accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$

$= \vec{\gamma}(O'|R) + \vec{\omega}(R|R') \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}(R|R') \wedge (\vec{\omega}(R|R') \wedge \overrightarrow{O'M})$

$\vec{\gamma}(O'|R) = \vec{\gamma}(0|R) = \vec{0}, \vec{\omega}(R|R') = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_e = -r_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{x}\,'}$

⊙ accélération de coriolis $\vec{\gamma}_c$ de M

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}(R|R') \wedge \overrightarrow{V}(M|R') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \left(\overrightarrow{V}(M|R') = \overrightarrow{V}_r\right)$

$\boxed{\vec{\gamma}_c = 2r_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{y}\,'}$

b- accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ de M

On a : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \Longrightarrow ||\vec{\gamma}_a||^2 = \sqrt{(\gamma_r + \gamma_e)^2 + \gamma_c^2}$ car $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_r$ suivent le même axe

$(\gamma_r + \gamma_e)^2 = (r_0\omega^2)\,[2(\cos\omega t + \sin\omega t)]^2 = (r_0\omega)^2 2^2(\cos\omega t + \sin\omega t)^2 = (2r_0\omega)^2(2\cos\omega t\sin\omega t + \cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = (2r_0\omega)^2(2\cos\omega t\sin\omega t + 1)$

$\gamma_c^2 = (2r_0\omega)^2(-2\cos\omega t\sin\omega t + 1)$

Alors $\boxed{\vec{\gamma}_a = 2\sqrt{2}r_0\omega^2}$

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ELEMENTS DE LOGIQUE L1 session 1

Exercice 1

A)-Montrons par disjonction des cas que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}$
pour repondre à cette question nous allons partitionner l'ensemble $\mathbb{N}$ en deux.
$\mathbb{N} = \{2p/p \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{2p+1/p \in \mathbb{Z}^+\}$

pour $n = 2p, ona : \dfrac{2p(2p+1)(2\times 2p+1)}{6} = \dfrac{p(2p+1)(4p+1)}{3}$

pour $n = 2p{+}1, ona : \dfrac{(2p+1)(2p+2)(2\times(2p+1)+1)}{6} = \dfrac{(2p+1)(p+1)(4p+3)}{3}$

il nous reste à montrer que $p(2p+1)(4p+1)$ et $(2p+1)(p+1)(4p+3)$ sont divisibles par 3

$\oplus$ montrons que $p(2p+1)(4p+1)$ est divisible par 3.
Les restes possibles de la division de p par 3 sont 0,1 et 2.
Alors 3 cas se presentent à nous.
$p \equiv 0[3]$
$\Rightarrow 2p \equiv 0[3]$ et $4p \equiv 0[3]$
$\Rightarrow (2p+1) \equiv 1[3]$ et $(4p+1) \equiv 1[3]$
$\Rightarrow p(2p+1)(4p+1) \equiv 0[3]$

$p \equiv 1[3]$
$\Rightarrow 2p \equiv 2[3]$ et $4p \equiv 1[3]$
$\Rightarrow (2p+1) \equiv 0[3]$ et $(4p+1) \equiv 2[3]$
$\Rightarrow p(2p+1)(4p+1) \equiv 0[3]$

$p \equiv 2[3]$
$\Rightarrow 2p \equiv 1[3]$et $4p \equiv 2[3]$
$\Rightarrow (2p+1) \equiv 2[3]$et $(4p+1) \equiv 0[3]$
$\Rightarrow p(2p+1)(4p+1) \equiv 0[3]$

$\oplus$ montrons que $(2p+1)(p+1)(4p+3)$ est divisible par 3.
Les restes possibles de la division de p par 3 sont 0,1 et 2.

Alors 3 cas se presentent à nous.
$p \equiv 0[3]$
$\Rightarrow 2p \equiv 0[3]$ et $4p \equiv 0[3]$
$\Rightarrow (2p+1) \equiv 1[3]$ et $(4p+3) \equiv 0[3]$ et $(p+1) \equiv 1[3]$
$\Rightarrow p(2p+1)(p+1)(4p+3) \equiv 0[3]$

$p \equiv 1[3]$
$\Rightarrow 2p \equiv 2[3]$ et $4p \equiv 1[3]$
$\Rightarrow (2p+1) \equiv 0[3]$ et $(4p+3) \equiv 1[3]$ et $(p+1) \equiv 2[3]$
$\Rightarrow p(2p+1)(p+1)(4p+3) \equiv 0[3]$

$p \equiv 2[3]$
$\Rightarrow 2p \equiv 1[3]$et $4p \equiv 2[3]$
$\Rightarrow (2p+1) \equiv 2[3]$ et $(4p+3) \equiv 2[3]$ et $(p+1) \equiv 0[3]$
$\Rightarrow p(2p+1)(p+1)(4p+3) \equiv 0[3]$

On peut donc conclure que $p(2p+1)(4p+1)$ et $(2p+1)(p+1)(4p+3)$ sont divisibles par 3
Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}$

B)-soit $F = \{1,2,3,4\}$;l'ensemble cartesien est :
$F \times F = F^2 = \{(a,b)/a, b \in F\} \neq E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
En effet le couple $(2,3) \notin E\,(contre - exemple)$
Donc E n'est pas cartésien.
une condition suffisante pour montrer cela est :card$E = 4 \neq$card$F^2 = 4 \times 4 = 16$
attention card(E)=card(F^2) $\nRightarrow$ E est cartesien

Exercice 2

soit $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$.
on considère l'application $f : \mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie comme suite
$f(\varnothing) = 0$ et $f(A) = \sum_{x \in A} x$

a)-$f(\{0\}) = 0$,$f(\{1\}) = 1$,$f(\{0,1,2\}) = 0+1+2 = 3$,
$f(\{4,11,21\}) = 4+11+21 = 36$,
on a $A_n = \{1,2,3,...,n\}$, $f(A_n) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b)-montrons que f est surjective.
Rappel :f est surjective si tout élement de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
Dans notre cas f est surjective car pour tout entier naturel on peut trouver un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ comme antécédent .

c)-Rappel :f est injective si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
Dans notre cas f n'est pas injective car l'élément 0 admet deux antécédents $\varnothing$ et $\{0\}$(contre-exemple).

d)-Rappel :f^{-1} n'est pas la bijection réciproque de f dans notre exercice en effet f n'est pas injective donc n'est pas bijective donc pourquoi parler de bijection réciproque ?
f^{-1} désigne l'image réciproque.
$f^{-1}(\{4\}) = \{\{0,4\},\{0,1,3\},\{4\},\{1,3\}\}$
Ne soyez pas supris de la reponse.je vous ramène en seconde C ;lorsque l'on déterminait les images réciproques,une image avait souvent plusieurs antécédents.
$\text{card}(f^{-1}(\{4\})) = 4$

Exercice 3

Lorsqu'il s'agit de répondre par VRAIX ou FAUX ;donner toujours un contre-exemple pour la fausse reponse
1. FAUX
contre-exemple

2.VRAIE
3.VRAIE
4.FAUX
contre-exemple

Exercice 4

Sur $\mathbb{N}^*$, on définit une rélation binaire $\mathcal{R}$

$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $a\mathcal{R}b$ si ($a = b$ ou $2a$ divise b).

1.Montrons que $\mathcal{R}$ est une rélation d'ordre.
on a : $a = a \times 1$ pour $a \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow a\mathcal{R}a$ d'où **la reflexivité**
Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$. à t-on $a = b$?
$\begin{cases} a\mathcal{R}b \text{ signifie que}(a = b \; ou \; 2a \; divise \; b) \\ b\mathcal{R}a \text{ signifie que}(b = a \; ou \; 2b \; divise \; a) \end{cases}$ Avoir $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$ signifie on a :
Soit $(a = b)$ et $(2b \; divise \; a)$
Soit $(a = b)$ et $(b = a)$
Soit $(b = a)$ et $(2a \; divise \; b)$
Soit $(b = a)$ et $(a = b)$
Dans chacun des cas, on voir bien que $a = b$
Donc $\mathcal{R}$ est **anti-symétrique**

On a : $a, b, c \in \mathbb{N}^*, a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$
$\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases} \Longrightarrow a = c$ ou $\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a \; divise \; b \\ 2b \; divise \; c \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} 2a \times k_1 = b \\ 2b \times k_2 = c \end{cases} \Longrightarrow c = 2k_1k_2 \times 2a \Longrightarrow 2a \; divise \; c$
Donc $\mathcal{R}$ est **transitive**

Par conséquent $\mathcal{R}$ est **rélation d'ordre** elle est totale

2. $A = \{120, 572, 638, 2012\}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$
Soit e ;e est un minorant de A si $\forall a \in A, e\mathcal{R}a \Longrightarrow (e = a$ ou $2e$ divise $a)$
A est minorée car chaque élément de A est multiple de 2
1 **est un minorant de** A

3. Trouvons $\inf(A)$ la borne inférieure de A
$\inf(A)$ est un minorant de A et c'est le plus grand minorant de A . Ici $\inf(A) = 1$

CORRECTION DE L'EXAMEN DE BUREAUTIQUE L1 session 1

Exercice 1 :

Q_1 :
(b) Linux,Unix,Windows,Mac Os
(d) Android,Unix,Windows XP
Q_2 :
(c) La taille
Q_3 :
(b) Barrer un texte
Q_4 :
(b) $= Somme(A_1 : A_2)$
Q_5 :
(b) Trier par colonne B sur valeurs du plus grand au plus petit

CORRECTION DE l'EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL SESSION 1 L1

EXERCICE 1

1-

$$\text{Soit}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

on a : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, $-3A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

alors $\boxed{A^3 - 3A + 3I_3 = 0}$

2-Rappel :une matrice carrée A est inversible ssi il existe une matrice carrée B du même ordre qu'elle telle que $AB = BA = I$ avec I la matrice identitée du même ordre qu'elles.
on a :

$$\begin{aligned} A^3 - 3A + 3I_3 = 0 &\Longleftrightarrow A(A^2 - 3I_3) = -3I_3 \\ &\Longleftrightarrow A(\frac{-A^2}{3} + I_3) = I_3 = (\frac{-A^2}{3} + I_3)A \end{aligned}$$

alors A est inversible d'inverse $\frac{-A^2}{3} + I_3 = B$
après calcul,$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

3-methode de cofacteur
$A^{-1} = \dfrac{com(^tA)}{det(A)} = \dfrac{^tcom(A)}{det(A)}$

on a :$^tA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $com(A) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$;

$^tcom(A) = com(^tA) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

et $det(A) = |A| = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$ en dévéloppant suivant la deuxième colonne de A

alors $B = A^{-1} = \frac{com(^tA)}{det(A)} = \frac{^tcom(A)}{det(A)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

EXERCICE 2 :

Soient a, b, c, m des réels, et $(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz & = a \\ x + my + z & = b \\ x + y + mz & = c \end{cases}$

1. La matrice du système est : $\overline{A} = \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{pmatrix}$

2.Déterminons les solutions de (S_m) suivant les valeurs de m, a, b, c

échelonnons $\overline{A}$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{pmatrix} \approxeq \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 0 & m - m^2 & 0 & a - mb \\ 0 & 0 & m - m^2 & a - mc \end{pmatrix} \approxeq \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 0 & m(1-m) & 0 & a - mb \\ 0 & 0 & m(1-m) & a - mc \end{pmatrix} = \overline{A}'$$

$\overline{A} \approxeq \overline{A}\,'$

Discusion :

$\odot$ Si $m = 0, \overline{A}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \varnothing = \{\}}$

Si $a = 0$ On a :$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = b - z \\ y = c - x \end{cases} \Longrightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{(b - z, c - b + z, z), b, c, z \in \mathbb{R}\}}$

$\odot$ Si $m = 1, \overline{A}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & a - c \end{pmatrix}$

On a :$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

Si $a = b = c \Leftrightarrow x + y + z = a \Longrightarrow x = a - y - z$ et y, z quelconque.

Donc $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{(a - y - z, y, z), a, y, z \in \mathbb{R}\}}$

Si a, b, c ont des valeurs différentes alors $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \varnothing = \{\}}$

$\odot$ Si $m \in \mathbb{R} \backslash \{1, 0\} \Longrightarrow det(A) = m^3(1 - m)^2 \neq 0$ avec $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 0 & m(1-m) & 0 \\ 0 & 0 & m(1-m) \end{pmatrix}$

On obtient **un système de Cramer** qui n'est rien d'autre que celui du depart $(S_m) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} mx + my + mz & = a \\ x + my + z & = b \\ x + y + mz & = c \end{cases}$

Pour arriver à la solution, on a deux méthodes

Première methode :Méthode de résolution d'un système de Cramer par les détermina

$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & m & m \\ a-mb & m(1-m) & 0 \\ a-mc & 0 & m(1-m) \end{vmatrix}$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & a & m \\ 0 & a-mb & 0 \\ 0 & a-mc & m(1-m) \end{vmatrix}$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} m & m & a \\ 0 & m(1-m) & a-mb \\ 0 & 0 & a-mc \end{vmatrix}$

Δ_y, Δ_z sont faciles à determiner .Ainsi $\Delta_y = m^2(1-m)(a-mc), \Delta_z = m^2(a-mb)(1-m)$

Ne veut pas dire que Δ_x est difficile à calculer
Il suffit donc de développer suivant la trosième colonne. On obtient :

$$\Delta_x = m\begin{vmatrix} a-mb & m(1-m) \\ a-mc & 0 \end{vmatrix} + m(1-m)\begin{vmatrix} a & m \\ a-mb & m(1-m) \end{vmatrix} = -a+mc+a-ma-a+mb$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)\}$ avec $det(A) = \Delta$

Deuxième methode :Résolution en cascade

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} mx+my+mz & = a \\ 0x+m(1-m)y+0z & = a-mb \\ 0x+0y+m(1-m)z & = a-mc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & = \frac{a}{m} + m\left(\frac{a-mb}{m(1-m)}\right) + m\left(\frac{a-mc}{m(1-m)}\right) \\ y & = \frac{a-mb}{m(1-m)} \\ z & = \frac{a-mc}{m(1-m)} \end{cases}$$

Donc $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{\left(\frac{m(-a+b+c)-a}{m(1-m)}, \frac{a-mb}{m(1-m)}, \frac{a-mc}{m(1-m)}\right), a, b, c \in \mathbb{R}\}}$

Université FHB- UFRMI, Licence 1 — Année Académique

UE: Probabilités-Statistique — 2012/2013

Statistique - Semestre 2, Durée: 01h20

Examen 2ème session, Corrigé et barèmes

Corrigé

Exercice 1 (12 pts)

Une enquête a été réalisée auprès de 500 employés d'une usine, pour étudier la distribution des salaires journaliers en milliers de francs.

Salaires	[5;6[	[6;7[	[7;?[	[?;9[	[9;10[
Nombre d'employés	?	150	200	60	?
Centre de classe			7,75		
Fréquence cumulée			0,86		

(1) **Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.**

- Population statistique: l'ensemble des 500 employés d'une usine.**(0,25)**
- Caractère: le salaire jounalier **(0,25)**
- Nature du caractère: Quantitatif continu **(0,25)**

(2) **Compléter le tableau, puis tracer l'histogramme des effectifs.**

- Tableau: **(1,5)**

Salaires	[5;6[	[6;7[	[7;8,5[	[8,5;9[	[9;10[
Nombre d'employés	80	150	200	60	10
Centre de classe	5,5	6,5	7,75	8,75	9,5
Fréquence cumulée	0,16	0,46	0,86	0,98	1

- Histogramme des effectifs (voir annexe) **(0,5)**

On trace l'istogramme des effectifs avec les densités.

Salaires	[5;6[	[6;7[	[7;8,5[	[8,5;9[	[9;10[
Nombre d'employés	80	150	200	60	10
Amplitude de classe	1	1	1,5	0,5	1
Densité de proportions	0,16	0,3	$\frac{0,8}{3}$	0,24	0,02
Densité d'effectifs	80	150	$\frac{400}{3}$	120	10

(3) **Déterminer la valeur du mode et celle de la médiane par le calcul, interpréter les résultats.**

- Le mode : $Mo \in [6;7[$, $\quad Mo = x_m + a_m \times \dfrac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_s}$, **(0,25)**

où $x_m = 6,\ a_m = 7 - 6 = 1$

$\Delta_i = 150 - 80 = 70$

$\Delta_s = 150 - \frac{400}{3} = \frac{50}{3}$. Donc, $\quad Mo = 6 + 1 \times \dfrac{70}{70 + 50/3} = 6,807692$ **(0,75)**

Interprétation: plus d'employés de l'usine perçoivent environ 6808 francs par jour chacun. **(0,25)**

- <u>*La médiane*</u> : $Me =?$ (utiliser les fréquences cumulées croissantes)

On a $0,46 < 0,5 < 0,86$, donc $Me \in [7; 8,5[$. Par inerpolation,

$$Me = 7 + 1,5 \times \frac{0,5 - 0,46}{0,40} = 7,15. \text{ (1)}$$

Interprétation : la moitié (50%) des employés de l'usine perçoivent moins de 7150 francs par jour et l'autre moitié (50%) perçoivent plus de 7150 francs par jour. **(0,25)**

(4) **Déterminer l'écart interquartile.**

$IQ = Q_3 - Q_1$

- $Q_1 =?$, on a $0,16 < 0,25 < 0,46$, donc $Q_1 \in [6; 7[$.

Par inerpolation,

$$Q_1 = 6 + 1 \times \frac{0,25 - 0,16}{0,30} = 6,3. \text{ (1)}$$

- $Q_3 =?$, on a $0,46 < 0,75 < 0,86$, donc $Q_3 \in [7; 8,5[$.

Par inerpolation,

$$Q_3 = 7 + 1,5 \times \frac{0,75 - 0,46}{0,40} = 8,0875. \text{ (1)}$$

Donc, $IQ = Q_3 - Q_1 = 8,0875 - 6,3 = 1,7875$

(5) **Quel est le nombre d'employés qui perçoivent un salaire entre 6500 et 8000 francs par jour? (1,5)**

- <u>**1ère méthode**</u> :

On calcule le nombre d'employés qui ont un salaire $\leq$ 6500 francs par jour, c'est à dire l'effectif cumulé $N(6,5)$ et le nombre de ceux qui ont un salaire $\leq$ 8000 francs par jour, soit $N(8)$. Ainsi, le nombre d'employés qui perçoivent un salaire entre 6500 et 8000 francs par jour est $n_{[6,6;8[} = N(8) - N(6,5)$.

Comme $6 < 6,5 < 7$, on a $N(6) < N(6,5) < N(7)$ et par inerpolation,

$$N(6,5) = N(6) + (N(7) - N(6)) \times \frac{6,5 - 6}{7 - 6}.$$

On a :

$N(6) = 80$

$N(7) = 500 \times 0,46 = 230$. Donc, $N(6,5) = 80 + (230 - 80)) \times \dfrac{6,5 - 6}{7 - 6} = 155$.

De même, comme $7 < 8 < 8,5$, on a $N(7) < N(8) < N(8,5)$ et par inerpolation,

$$N(8) = N(7) + (N(8,5) - N(7)) \times \frac{8 - 7}{8,5 - 7}.$$

On a :

$N(7) = 230$

$N(8,5) = 500 \times 0,86 = 430$. Donc, $N(8) = 230 + (430 - 230)) \times \dfrac{8 - 7}{8,5 - 7} = 363,33$.

Finalement, on a $n_{[6,5;8[} = N(8) - N(6,5) = 363,33 - 155 = 208,33$

- **2ème méthode** :

On a $n_{[6,5;8[} = n_{[6,5;7[} + n_{[7;8[}$.

- $n_{[6,5;7[} = x = ?$

on a $\begin{cases} n_{[6;7[} = 150 & \text{et amplitude } a = 1 \\ n_{[6,5;7[} = x & \text{et amplitude } a = 0,5 \end{cases}$

Comme les densités sont identiques dans chaque classe, on a: $\dfrac{x}{0,5} = 150$, d'où $x = 75$.

- $n_{[7;8[} = y = ?$

on a $\begin{cases} n_{[7;8,5[} = 200 & \text{et amplitude } a = 1,5 \\ n_{[7;8[} = y & \text{et amplitude } a = 1 \end{cases}$, alors, on a: $y = \dfrac{200}{1,5} = 133,33$.

Par conséquent, $n_{[6,5;8[} = 75 + 133,33 = 208,33$.

(6) **Evaluer la dispersion relative des salaires de l'usine.**

$CV = \dfrac{\sigma(X)}{\bar{x}}$. **(0,25)**

X	[5;6[	[6;7[	[7;8,5[	[8,5;9[	[9;10[	Total
n_i	80	150	200	60	10	500
c_i	5,5	6,5	7,75	8,75	9,5	
n_ic_i	440	975	1550	525	95	3585
$n_ic_i^2$	2420	6337,5	12012,5	4593.75	902,5	26266,25

D'où

$\bar{x} = \dfrac{3585}{500} = 7,17$, soit 7170 francs **(1)**

$Var(X) = \dfrac{26266,25}{500} - (7,17)^2 = 1,1236$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1,1236} = 1,06$, soit 1060 francs. **(1,25)**

Par suite: $CV = \dfrac{1,06}{7,17} = 0,1478$

(7) **Le syndicat des employés de l'usine a demandé une augmentation des salaires de 16% pour chaque employé. Quel sera le montant du salaire journalier moyen dans le cas de cette augmentation**

On a $r = 0,16$. Soit Y le nouveau salaire. Alors, on a $Y = (1+r)X = 1,16X$.

Donc, le montant du nouveau salaire journalier moyen est :

$\bar{y} = 1,16\bar{x} = 1,16 \times 7,17 = 8,3172$, soit 8317,2 francs. **(0,75)**

Exercice 2 **(08 pts)**

Une enquête sur la rémunération mensuelle (en euros) et l'âge (en années) réalisée, en 2005, auprès des ouvriers d'une entreprise, a donné les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.

	$[500, 800[$	$[800, 1000[$	$[1000, 1200[$	$[1200, 1500[$	$[1500, 2000[$	Total: $n_{i.}$
$[15, 25[$	10	0	0	0	0	10
$[25, 35[$	4	8	0	0	0	12
$[35, 45[$	2	6	2	0	0	10
$[45, 65[$	2	4	6	4	2	18
Total: $n_{.j}$	18	18	8	4	2	50

(1) **Quelle est la population? Quelles sont les variables étudiées, et quel est leur type?**

- Population : les ouvriers de l'entreprise. **(0,25)**
- Variables étudiées : la rémunération mensuelle et l'âge **(0,25)**
- Type des variables : elles sont toutes quantitatives continues **(0,25)**

(2) **En 2005, parmi les ouvriers ayant une rémunération entre 500 et 800 euros, quel était le pourcentage de personnes ayant entre 20 et 40 ans?**

D'après le tableau, les ouvriers qui ont une rémunération entre 500 et 800 euros sont au nombre de $n_{.1} = 18$. On note $n_{[20,40[,1}$ le nombre des ouvriers qui ont entre 20 et 40 ans et une rémunération entre 500 et 800 euros.

On a alors : $n_{[20,40[,1} = n_{[20,25[,1} + n_{[25,35[,1} + n_{[35,40[,1}$

On a : $n_{[25,35[,1} = n_{2,1} = 4$.

- $n_{[20,25[,1} = x = ?$

on a $\begin{cases} n_{[15;25[,1} = 10 & \text{et amplitude } a = 10 \\ n_{[20,25[,1} = x & \text{et amplitude } a = 5 \end{cases}$, donc $\dfrac{x}{5} = \dfrac{10}{10} = 1$, d'où $x = 5$.

- $n_{[35,40[,1} = y = ?$

on a $\begin{cases} n_{[35,45[,1} = 2 & \text{et amplitude } a = 10 \\ n_{[35,40[,1} = y & \text{et amplitude } a = 5 \end{cases}$, alors, $\dfrac{y}{5} = \dfrac{2}{10}$, d'où $y = 1$.

Par conséquent, $n_{[20,40[,1} = 5 + 4 + 1 = 10$.

Donc, $f_{[20,40[,1} = \dfrac{n_{[20,40[,1}}{n_{.1}} = \dfrac{10}{18} = 55,56 \times 10^{-2}$, soit $55,56\%$. **(1,5)**

(3) **En 2005, parmi les ouvriers ayant entre 45 et 65 ans, quel était le pourcentage de personnes ayant une rémunération au moins égal à 1000 euros?**

D'après le tableau, les ouvriers qui ont entre 45 et 65 ans sont au nombre de $n_{4.} = 18$ et ceux qui ont entre 45 et 65 ans et une rémunération au moins égal à 1000 euros sont au nombre de $n_{4,[1000,2000[} = n_{4,3} + n_{4,4} + n_{4,5} = 6 + 4 + 2 = 12$.

Alors, $f_{4,[1000,2000[} = \dfrac{n_{4,[1000,2000[}}{n_{4.}} = \dfrac{12}{18} = 66,67 \times 10^{-2}$, soit $66,67\%$. **(0,75)**

(4) **D'après ce tableau, peut-on dire que la rémunération mensuelle est indépendante de l'âge?**

Non. La rémunération mensuelle dépend de l'âge. Car certaines cases du tableau sont vides, (par exemple, $n_{1,2} = 0 \neq \dfrac{n_{1.} \times n_{.2}}{n} = \dfrac{10 \times 18}{50}$). **(0,5)**

(5) **La rémunération mensuelle est-elle linéairement corrélée à l'âge?**

Il faut calculer le coefficient de corrélation linéaire $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \times Var(Y)}}$, **(0,25)**

où $Cov(X,Y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i,j} n_{ij}x_iy_j - \bar{x}\bar{y}$, $Var(X) = \dfrac{1}{n}\sum_i n_{i.}x_i^2 - \bar{x}^2$

$X \setminus Y$	[500, 800[	[800, 1000[	[1000, 1200[	[1200, 1500[	[1500, 2000[	$n_{i.}$	x_i	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$	$\sum_j n_{ij}x_iy_j$
$[15, 25[$	10	0	0	0	0	10	20	200	400	130000
$[25, 35[$	4	8	0	0	0	12	30	360	10800	294000
$[35, 45[$	2	6	2	0	0	10	40	400	16000	356000
$[45, 65[$	2	4	6	4	2	18	55	990	54450	1122000
$n_{.j}$	18	18	8	4	2	50	Total	1950	85250	**1902000**
y_j	650	900	1100	1350	1750	Total				
$n_{.j}y_j$	11700	16200	8800	5400	3500	45600				
$n_{.j}y_j^2$	7605000	14580000	9680000	7290000	6125000	45280000				
$\sum_i n_{ij}x_iy_j$	331500	630000	451 000	297 000	192500	**1902000**				

D'après ce tableau, on a :

$$\bar{x} = \frac{1950}{50} = 39 \ \mathbf{(0,5)}, \quad \bar{y} = \frac{45600}{50} = 912 \ \mathbf{(0,5)}$$

$$Var(X) = \frac{8525}{50} - 39^2 = 184 \ \mathbf{(0,75)}, \quad Var(Y) = \frac{45280000}{50} - 912^2 = 73856 \ \mathbf{(0,75)}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1902000}{50} - 38 \times 912 = 2472 \ \mathbf{(1,5)}$$

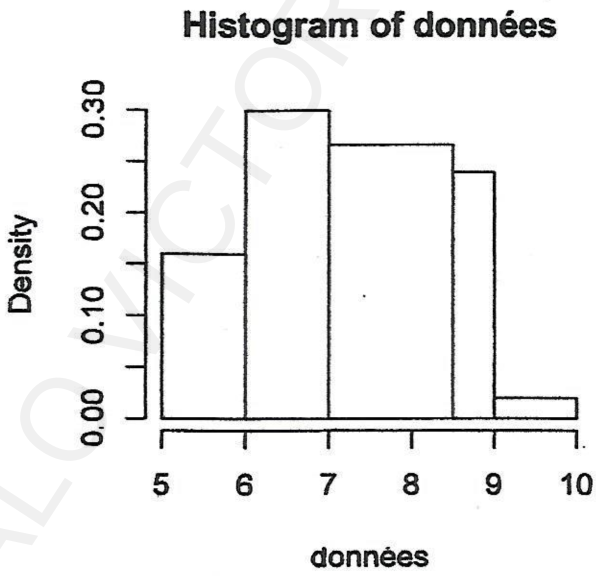
Par suite, $r = \dfrac{2472}{\sqrt{184 \times 73856}} = 0,671$ **(0,25)**

Le coefficient de corrélation linéaire $r = 0,671 < 0,80$. Donc, on peut dire que la rémunération mensuelle n'est pas linéairement corrélée à l'âge. Il y'a une autre forme de liaison.

On n'est pas obligé de faire ce tableau pour calculer la double somme $\sum_{i,j} x_iy_jn_{ij}$. On pouvait faire comme suit :

x_i	20	30	30	40	40	40	55	55	55	55	55	
y_j	650	650	900	650	900	1100	650	900	1100	1350	1750	Total
n_{ij}	10	4	8	2	6	2	2	4	6	4	2	50
$x_iy_jn_{ij}$	130000	78000	216000	52000	216000	88000	71500	198000	363000	297000	192500	**1902000**

On pouvait aussi calculer les différentes quantités $x_iy_jn_{ij}$ dans le tableau de contingence et faire la somme ligne par ligne ou colonne par colonne. Soyez indulgents !



Histogram of données
Density
0.00
0.10
0.20
0.30
5
6
7
8
9
10
données

Université FHB- UFRMI, Licence 1
UE: Probabilités-Statistique

Année Académique
2012/2013

Probabilités - Semestre 2, Durée: 01h40

Examen 2ème session, Corrigé et barèmes

Exercice 1 (8 pts)

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la ex Communauté économique européenne (CEE). Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales.

(1) **Combien y a-t-il de circuits différents ?**

Un circuit étant une suite ordonnée de quatres capitales différentes par l'ordre de visite, il correspond à un arrangement sans répétition. **(1 pts)**

Donc le nombre de circuits différents est le nombre d'arrangemnts :

$$A_{12}^4 = 12 * 11 * 10 * 9 = 11880. \textbf{(0,5 pt)}$$

Dans la suite, on suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

(2) **Calculer la probabilité de l'événement suivant : le circuit contient Paris.**

Soit A cet événement. Comme Paris fait partir du circuit, on choisit sa position sur les 4, on a $C_4^1 = 4$ façons de le faire. Puis, on choisit 3 autres capitales sur les 11 restantes pour les 3 autres positions en tenant compte de l'ordre, on a A_{11}^3 façons de le faire. **(2 pts)**

Alors, le nombre de tels circuits est : $card(A) = 4 * A_{11}^3$.

Donc, puisqu'il y a équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_4^1 * A_{11}^3}{A_{12}^4} = \frac{4 * 11 * 10 * 9}{12 * 11 * 10 * 9} = \frac{1}{3}. \textbf{ (0,5 pts)}$$

(3) **Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit?**

Soit B l'événement le circuit commence à Paris et C l'événement Madrid et Rome font partie du circuit.

La probabilité recherchée est : $\mathbb{P}(C|B) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{card(C \cap B)}{card(B)}$ (il y a équiprobabilité).

- Si le circuit commence par Paris, sa 1ère position est fixée. Pour constinuer de tels circuits, il suffit de choisir 3 autres capitales sur les 11 restantes pour les 3 autres positions en tenant compte de l'ordre, on a A_{11}^3 façons de le faire. **(1,5 pts)**

Alors, le nombrs de tels circuits est : $card(B) = A_{11}^3$.

- Si le circuit commence par Paris et contient Madrid et Rome, il nous faut choisir une quatrième capitale sur les 9 restantes. Puis permuter les 3 dernières pour avoir l'ordre de visite. **(1,5 pts)**

Ainsi le nombres de ces circuits est : $card(C \cap B) = C_9^1 * 3!$.

D'où

$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{C_9^1 * 3!}{A_{11}^3} = \frac{9 * 3 * 2}{11 * 10 * 9} = \frac{3}{55}. \textbf{ (1 pt)}$$

Exercice 2 (12 pts)

On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on suppose que tous les couples de résultats de chiffres paires sont équiprobables, ainsi que ceux de chiffres impaires et ceux de chiffres mixtes (l'un est paire et l'autre impaire). On suppose également que l'on a deux fois plus de chance d'obtenir le couple $(2,2)$ que le couple $(1,1)$ qui est aussi deux fois plus probable que le couple $(1,2)$. On désigne par X le plus grand des chiffres obtenus et par Y leur écart.

(1) **On pose** $\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \alpha$, $\mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \beta$, $\mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \lambda$.

a) Montrer que α, β, λ **vérifient le système : (2 pts)**

$$\begin{cases} 9\beta + 9\alpha + 18\lambda & = 1 \\ \beta - 2\alpha & = 0 \\ \alpha - 2\lambda & = 0. \end{cases}$$

Ici, l'expérience aléatoire consiste à lancer deux fois de suite un dé cubique. Soit Ω l'univers de cette expérience. Alors $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$.
On a donc 36 couples de résulats dont 9 couples paires : $\{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$, 9 couples impaires : $\{1,3,5\} \times \{1,3,5\}$ et 18 couples mixtes: $\{1,3,5\} \times \{2,4,6\} \cup \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$.
Il n'y a pas d'équiprobabilité sur Ω, mais sur chacun de ces trois sous-ensembles.
Puisque, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a :

$$9\mathbb{P}(\{(1,1)\}) + 9\mathbb{P}(\{(2,2)\}) + 18\mathbb{P}(\{(1,2)\}) = 1, \text{ soit } 9\beta + 9\alpha + 18\lambda = 1.$$

D'autre part, on sait que l'on a deux fois plus de chance d'obtenir le couple $(2,2)$ que le couple $(1,1)$ qui est aussi deux fois plus probable que le couple $(1,2)$. Ce qui se traduit par :

$$\mathbb{P}(\{(2,2)\}) = 2\mathbb{P}(\{(1,1)\}), \quad \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = 2\mathbb{P}(\{(1,2)\}),$$

soit

$$\beta = 2\alpha, \quad \alpha = 2\lambda.$$

D'où le système.

b) En déduire les valeurs de β, α **et** λ. **(1 pt)**

En résolvant le système, on obtient:

$$\beta = \frac{1}{18}, \ \alpha = \frac{1}{36}, \ \lambda = \frac{1}{72}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \frac{1}{18}, \ \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}, \ \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \frac{1}{72}.$$

c) Déterminer la probabilité que la somme des chiffres soient égale à 8. (1 pt)

Soit A l'événement la somme des chiffres soient égale à 8.
Alors, $A = \{(2,6),(6,2),(4,4),(3,5),(5,3)\}$. On a 3 couples paires et 2 couples impaires, donc

$$\mathbb{P}(A) = 3\beta + 2\alpha = \frac{3}{18} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}.$$

(2) On désigne par X le plus grand des chiffres obtenus et par Y l'écart de ces deux chiffres.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y) (dans un tableau). (4,5 pts)

On a $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Soit $(i,j) \in \{1,2,3,4,5,6\} \times \{0,1,2,3,4,5\}$, calculons $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

On a :

- si j=0, $\{X = i, Y = 0\} = \{(a,b) \in \Omega | (a,b) = (i,i)\}$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X = i, Y = 0) = \mathbb{P}(\{(i,i)\}) = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{36}, & \text{si } i \text{ est impair} \\ \beta = \frac{1}{18}, & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases} \quad \textbf{(1 pts)}$$

- si j>0, $\{X = i, Y = j\} = \{(a,b) \in \Omega | (a,b) = (i, i-j) \text{ ou } (a,b) = (i-j, i)\}$

$$\Longrightarrow j < i \text{ et } \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 2\mathbb{P}(\{(i, i-j)\}) = \begin{cases} 2\lambda = \frac{1}{36}, & \text{si } j \text{ est impair } \forall i > j \\ 2\beta = \frac{1}{9}, & \text{si } i, j \text{ sont pairs} \\ 2\alpha = \frac{1}{18}, & \text{si } j \text{ est pair et } i \text{ est impair.} \end{cases} \quad \textbf{(1,5 pts)}$$

$$\Longrightarrow \forall\, j > i, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0, \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

(car il est impossible d'avoir dans Ω des couples $(i, i-j)$ ou $(i-j, i)$ tels $j > i$).

On en déduire le tableau suivant :

$X \vert Y$	0	1	2	3	4	5	*Total X*
1	α	0	0	0	0	0	α
2	β	2λ	0	0	0	0	$\beta + 2\lambda$
3	α	2λ	2α	0	0	0	$3\alpha + 2\lambda$
4	β	2λ	2β	2λ	0	0	$3\beta + 4\lambda$
5	α	2λ	2α	2λ	2α	0	$5\alpha + 4\lambda$
6	β	2λ	2β	2λ	2β	2λ	$5\beta + 6\lambda$
Total Y	$3\alpha + 3\beta$	10λ	$4\alpha + 4\beta$	6λ	$2\alpha + 2\beta$	2λ	1

soit

$X \vert Y$	0	1	2	3	4	5	*Total X*
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{2}{9}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{7}{36}$
6	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{13}{36}$
Total Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	1

(1,5 pts)

b) En déduire les lois de X et Y. (2 pts)

Le loi de X et la loi de Y sont données respectivement dans la colone et la ligne marginale du tableau.

c) **Calculer $\mathbb{P}(X = Y+1)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(Y < X)$. (2 pts)**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = Y+1) &= \sum_{i=j+1} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \mathbb{P}(X = j+1, Y = j) \\
&= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{2}{9}. \quad \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{i=j} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X = i, Y = i) \\
&= 0. \quad \textbf{(0,5 pt)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < X) &= \sum_{j<i} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \sum_{i=j+1}^{6} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&= 1. \quad \textbf{(0,5 pt)}
\end{aligned}$$

<u>*Correction Examen d'Electricité – Epreuve du 29 juillet 2013 (1ère session)*</u>

<u>Exercice 1</u> : (*6 points*)

1. La charge électrique de la sphère conductrice portée au potentiel $U_0 = 30000\ Volts$ est :

$$V(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\ \varepsilon_0 R_1} = U_0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 4\pi\ \varepsilon_0 R_1 U_0$$

A.N : $\quad Q_1 = \frac{1}{9.10^9} * 6.10^{-2} * 3..10^4$

$$\boxed{Q_1 = 0{,}2\ \mu C}$$

2.

Répartition des charges

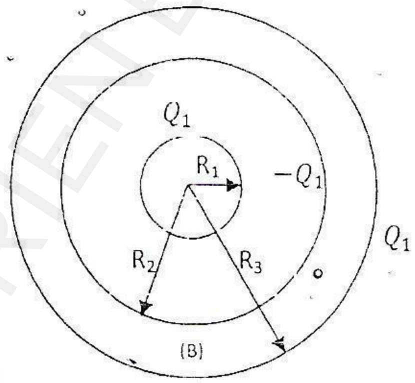
$Q_{S_A} = +Q_1$

A et B_1 sont en influence totale

$Q_{S_{B_1}} + Q_{S_A} = 0 \quad \Rightarrow Q_{S_{B_1}} = -Q_1$

B isolée, conserve sa charge

$Q_{S_{B_1}} + Q_{S_{B_2}} = 0 \quad \Rightarrow Q_{S_{B_2}} = +Q_1$



<u>**Champ et potentiel en tout point M de l'espace**</u>

Considérons une surface de Gauss de rayon x.

Le flux du champ E à travers cette surface est égal, d'après Gauss :

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = ES = E * 4\pi x^2 \\ \phi = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_{int}}{x^2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_{int}}{x^2}}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \ \Rightarrow \ E(x) = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -E(x)dx$$

$$\Rightarrow V = -\int E(x)dx$$

<u>*1er cas*</u> : $x > R_3$

$$\sum Q_{int} = Q_1 - Q_1 + Q_1 = Q_1$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}}$$

$$V = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} + cste$$

A l'infini, $V_\infty = 0 \Rightarrow cste = 0$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

<u>2ème cas</u> : $R_2 \leq x \leq R_3$

$$\sum Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

$$dV = -E(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad V = cste$$

La continuité du potentiel en x = R_3 impose :

$$V = cste = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_3} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

<u>3ème cas</u> : $R_1 \leq x \leq R_2$

$$\sum Q_{int} = Q_1 \quad \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}}$$

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} + cste$$

La continuité du potentiel en x = R_2 impose :

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + cste = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \Rightarrow cste = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

D'où :

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

<u>4ème cas</u> : $x \leq R_1$

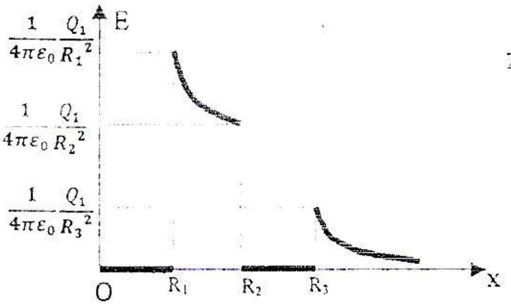
$$\sum Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

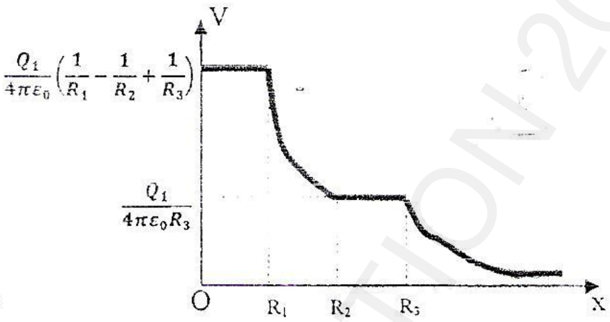
La continuité du potentiel en x = R_1 impose :

$$V = cste = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

- *Représentation graphique*





- *Calcul de l'énergie du système*

$$W = \frac{1}{2}Q_1(V_1 - V_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \\ V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (V_1 - V_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$W = \frac{1}{2} * \frac{Q_1{}^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

A.N : $W = \frac{1}{2}.9\,10^9 * (2\,10^{-7})^2\left(\frac{1}{0,06} - \frac{1}{0,1}\right) = 1,2\,10^{-3}J$

$$W = 1,2\,10^{-3}J$$

Le travail fourni par la formation du système :

$$W' = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = Q_1(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow W' = Q_1(V_1 - V_2) = 2 * W$$

$$\Rightarrow W' = 2,4\,10^{-3}J$$

3. A et B étant en influence totale, le système constitué par ces deux conducteurs est un condensateur à armatures sphériques.

<u>Exercice 2</u> : *(6 points)*

1.
   a. Le nombre de branches dans le circuit est égal à 3, le nombre de nœuds à 2 : il faut donc écrire 3 - (2 - 1) = 2 équations indépendantes de mailles.

- *Maille $N_2G_1N_1$:* $0,5I_1 + (I_1 + I_2) = E_1$
- *Maille $N_2G_2N_1$:* $0,3I_2 + (I_1 + I_2) = E_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1,5I_1 + I_2 = 110 \\ I_1 + 1,3I_2 = 100 \end{cases}$$

On obtient sans difficulté

$$\begin{cases} I_1 = 45{,}25\ A \\ I_2 = 42{,}20\ A \end{cases} \Rightarrow \quad I = 87{,}45\ A$$

b. La méthode est exactement la même mais les deux équations de maille s'écrivent désormais :

- *Maille $N_2G_1N_1$* : $0{,}5I_1 + (I_1 + I_2) = E_1 - E$
- *Maille $N_2G_2N_1$* : $0{,}3I_2 + (I_1 + I_2) = E_2 - E$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}5I_1 + I_2 = 110 - 90 = 20 \\ I_1 + 1{,}3I_2 = 100 - 90 = 10 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} I_1 = 16{,}85\ A \\ I_2 = -5{,}88\ A \end{cases} \Rightarrow \quad I = 11{,}57\ A$$

La batterie G_1 fonctionne en générateur (c'est à dire se décharge) tandis que G_2 fonctionne en récepteur (c'est à dire se charge).

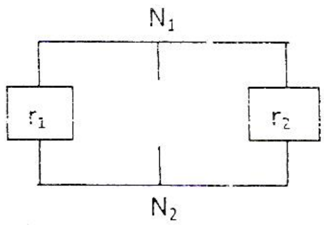
2.

a. Déterminons les éléments du générateur de Thévenin équivalent à G_1 et G_2.

- Résistance R_{TH}

$$R_{TH} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$$R_{TH} = \frac{0{,}5 * 0{,}3}{0{,}5 + 0{,}3} = \mathbf{0{,}187\ \Omega}$$

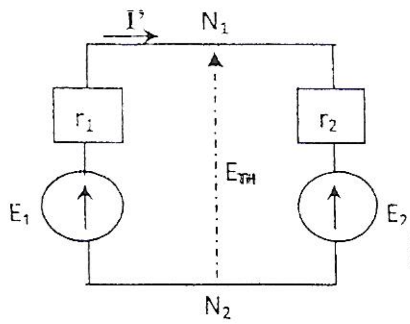


- La f.é.m. E_{TH} : lorsque le moteur est débranché, la maille restante est parcourue par le courant I'

$$E_1 - r_1 I' = E_2 + r_2 I'$$

$$\Rightarrow \quad I' = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$$

$$\Rightarrow I' = \frac{110 - 100}{0{,}5 + 0{,}3} = 12{,}5\ A$$



D'où, en parcourant la batterie G_1 ou G_2

$$E_{TH} = V(N_1) - V(N_2) = E_1 - r_1 I'$$
$$= E_2 + r_2 I'$$
$$\Rightarrow \quad E_{TH} = 100 + 0{,}3 * 12{,}5 = 103{,}75\ A$$

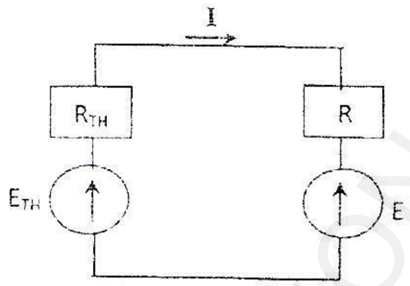
b. On en déduit le courant I à partir de la figure ci-dessous

$$E_{TH} - R_{TH} I = E + RI$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{E_{TH} - E}{R + R_{TH}}$$

$\Longrightarrow I = \frac{103,75-90}{1+0,187} \approx 11,58\,A$

$\Longrightarrow \boxed{I = 11,58\,A}$



Problème : (*8 points*)

1. On travaille en cordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\vec{e}_z$$

La distribution étant invariante par toute translation selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, le champ ne dépend que de la coordonnée x. Le champ électrostatique en M est donc contenu dans l'intersection de tous ces plans, il est porté par l'axe (*Mx*).

$$\vec{E}(M) = E_x(x)\vec{e}_x$$

Le plan chargé est plan de symétrie de la distribution. Au point M'(-x, y, z) symétrique de M(x, y, z) par rapport à (yoz), le champ $\vec{E}(M')$ est le symétrique du champ $\vec{E}(M)$. La fonction E(x) est donc impaire : E(-x) = - E(x).

On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède (ou un cylindre) dont deux faces sont parallèles au plan (yoz) (le champ leur est donc normal), de surface S, l'une placée en M(x) et l'autre en M'(-x), et les quatre autres faces normales au plan (le champ leur est donc tangent).

Le flux à travers cette surface de Gauss est :

$$\phi \overset{\circ}{=} \oiint \vec{E}.\vec{dS} = E(x) * S + E(-x) * (-S) = 2S * E$$

Le théorème de Gauss donne donc : $\phi = 2S * E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$$\Longrightarrow E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ x < 0 \end{cases}$$

A.N: $\|\vec{E}\| = 4{,}010^6\ V.m^{-1}$

2. on obtient dans cette configuration :

$$\vec{E}_A(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ x < 0 \end{cases} \quad et$$

$$\vec{E}_B(M) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ x > e \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ x < e \end{cases}$$

3. D'après le théorème de superposition, le champ crée par la distribution $A \cup B$ est égal à la somme vectorielle des champs crées par les deux distributions séparées :

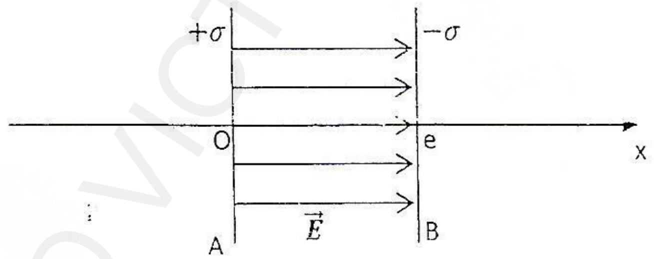
$$\vec{E}_{A\cup B}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$$

On obtient donc :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x, & si\ x < 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x, & si\ 0 < x < e \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x, & si\ x > e \end{cases}$$

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & si\ x < 0\ ou\ x > e \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x & si\ 0 < x < e \end{cases}$$

Le champ est nul en dehors des armatures et uniforme entre les armatures : les lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques.



4. On a la relation locale entre champ et potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$or\ E_y = E_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

En intégrant cette relation entre A(x = 0) et B(x = e), on obtient :

$$V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

A.N. : $V_A\text{-}V_B = 40\ V$

5. La charge portée par la région de surface S isolée par la pensée sur l'armature A est :

$$Q = \sigma S$$

La différence de potentiel entre les deux armatures est liée à la capacité du condensateur par :

$$\left.\begin{aligned} U = V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} \\ Q = CU = C(V_A - V_B) = C\frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \sigma S \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

CORRECTION DE l'EXAMEN DE STRUCTURE ALGEBRIQUE SESSION 2 L1

EXERCICE 1

1-vraie
2-faux.car $(S(A), o)$ est un groupe non commutative
3-faux.car si $(G, *)$ est un groupe il existe au moins un couple (x, y)d'éléments de G,tel que :$x * y = y * x$.en effet tout élément x de G commute avec l'élément neutre e de $*$ $(x * e = e * x)$.
4-vraie
5-vraie
6-vraie

EXERCICE 2

on considère l'anneau quotient A=$\dfrac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}$

1-Les éléments de $\mathcal{U}$(A)sont de la forme $\dot{n}$(classe) tels que $pgcd(21, n)$=1.c'est-à-dire soit premier entre eux.NB :$n < 21$

$\mathcal{U} = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{8}, \dot{10}, \dot{11}, \dot{13}, \dot{16}, \dot{17}, \dot{19}, \dot{20}\}$

2-on card($\mathcal{U}(A)$)=12 alors les cardinaux possibles des sous groupes du groupe $\mathcal{U}(A)$ sont les diviseurs de 12 c'est-à-dire 1,2,3,4,6 et 12.

3-les sous groupes $\{\dot{1}\}$ et $\mathcal{U}(A)$ sont triviaux ; 2 autres sont : $\{\dot{1}, \dot{6}\}$ et $\{\dot{1}, \dot{7}, \dot{4}\}$

EXERCICE 3

on considère l'anneau $\mathbb{F} = \dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$

a.) l'anneau $\mathbb{F}$ est un corps car 7 est premier.
b.)$\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}\}$

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{6}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{6}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{6}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$

c.)Les entiers x tels que $x^2 + 4x - 2$ soit multiple de 7

x^2+4x-2 multiple de 7 signifie que $x^2+4x-2 = 7p, p \in \mathbb{Z} \iff x^2+4x-2 \in 7\mathbb{Z} \iff \dot{x}^2 + \dot{4}\dot{x} - \dot{3} = \dot{0}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$

On a :$\dot{x}^2 + \dot{4}\dot{x} - \dot{3} = \dot{0} \iff \dot{x}^2 + \dot{4}\dot{x} + \dot{4} = \dot{0} \iff \left(\dot{x}^2 + \dot{2}\right)^2 = \dot{0}$

Comme $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ est un corps ,$\left(\dot{x}^2 + \dot{2}\right)^2 = \dot{0} \iff \dot{x}^2 + \dot{2} = \dot{0}$

Dans la table de multiplication de $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ tous les $\dot{x}^2$ se trouvent sur la diagonale et sont : $\dot{0}$ $\dot{1}$ $\dot{2}$ $\dot{4}$

Dans la table d'addition de ,chacun d'eux associé indépendament à $\dot{2}$ ne donne point $\dot{0}$

Donc l'équation n'a pas de solution

d.)déterminons les entiers naturels n tels que 7 divise $4^n + 3^n$

7 divise $4^n + 3^n$ signifie $(4^n + 3^n) \equiv 0[7] \iff 4^n \equiv -3^n[7]$

pour que le signe (-) soit sous l'exposant n il faut que n soit impair

posons que n=2p+1

on aura $4^{(2p+1)} \equiv (-3)^{(2p+1)}[7]$

donc il s'agit des entiers naturels impairs c'est-à-dire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$

Correction de l'Examen de Mécanique 1 (Première Session)

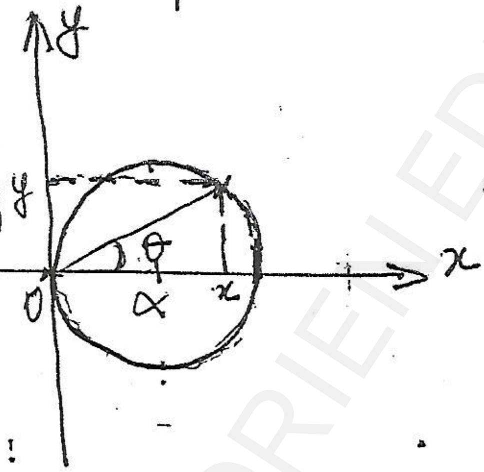
Exercice 1 : 4/4

1) Equations paramétrique de la trajectoire :

équation :

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0}$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + y^2 - \alpha^2 = 0}$$



$$\tan(\theta) = \frac{\beta}{t} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y.t}{\beta}$$

On peut écrire :

$$\left(\frac{y.t}{\beta}\right)^2 + y^2 - 2\alpha \frac{y.t}{\beta} = 0$$

$$y^2\left(\frac{t^2}{\beta^2}\right) + y^2 - 2\alpha \frac{y.t}{\beta} = 0$$

$$y\left(\frac{t^2}{\beta^2} + 1\right) - 2\alpha \frac{t}{\beta} = 0 \quad 1$$

$$\boxed{y(t) = \frac{2\alpha . t}{\beta\left(\frac{t^2}{\beta^2} + 1\right)}} \quad \text{et donc} \quad \boxed{x(t) = \frac{2\alpha . t^2}{\beta^2\left(\frac{t^2}{\beta^2} + 1\right)}} \quad 1$$

2) Calcul de la vitesse du point M :

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y}$$

$$= \frac{2\alpha . t^2}{\beta^2\left(\frac{t^2}{\beta^2}+1\right)}\vec{x} + \frac{2\alpha . t}{\beta\left(\frac{t^2}{\beta^2}+1\right)}\vec{y}$$

$$\vec{V}(M) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{x} + \frac{dy}{dt}\vec{y}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{4\alpha . \beta^2 . t}{(t^2+\beta^2)^2} \\ \dot{y}(t) = \dfrac{2 . \alpha . \beta\,(\beta^2 - t^2)}{(t^2+\beta^2)^2} \end{cases}}$$ (1)

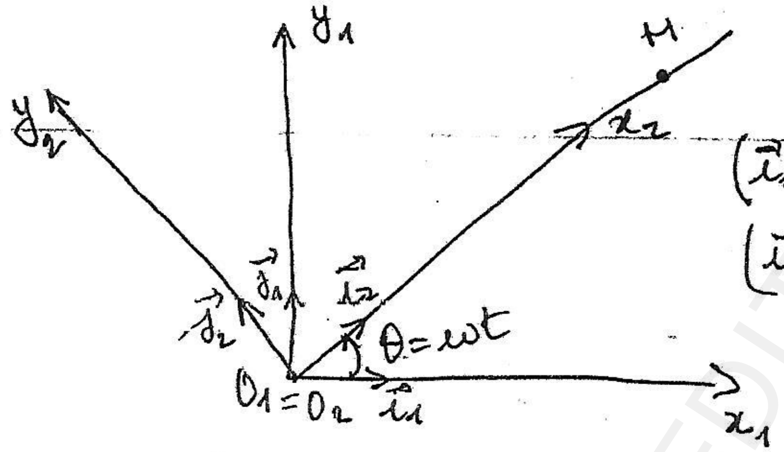
3) L'accélération du point M

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

$$= \frac{d\dot{x}(t)}{dt}\vec{x} + \frac{d\dot{y}(t)}{dt}\vec{y}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(t)\begin{cases} \ddot{x}(t) = \dfrac{4 . \alpha . \beta^2 . (\beta^2 - 3t^2)}{(t^2+\beta^2)^3} \\ \ddot{y}(t) = \dfrac{4\alpha\beta t\,(t^2 - 3\beta^2)}{(t^2+\beta^2)^3} \end{cases}}$$ (1)

Exercice 2 : 4/4



$(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ base de R_1

$(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ base de R_2

$\vec{\Omega}_{12} = \omega \vec{k}_2$; $\vec{OM} = \rho_0 \cosh(\omega t)\, \vec{i}_2$

$$= \rho_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\, \vec{i}_2$$

1) • Calcul de $\vec{V}(M/R_2)$:

$$\boxed{\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right)_{R_2} = \rho_0 \omega \cdot \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\, \vec{i}_2}$$

0,25

2) • Calcul de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$

$$\vec{V}_e = \omega \vec{k}_2 \wedge \vec{OM}$$

$$= \rho_0 \omega \cdot \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right)(\vec{k}_2 \wedge \vec{i}_2)$$

$$\boxed{\vec{V}_e = \rho_0 \omega \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) \vec{j}_2}$$

0,5

• Calcul de la vitesse absolue : $\vec{V}_a$ $\left(\vec{V}(M/R_1)\right)$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}(M/R_2)$$

0,5

$$\boxed{\vec{V}_a = \rho_0\,\omega\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)\vec{i}_2 + \rho_0\,\omega\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)\vec{j}_2}$$

• Calcul du module de $\vec{V}_a$

$$\|\vec{V}_a\| = \rho_0\frac{\omega}{2}\sqrt{(e^{\omega t}-e^{-\omega t})^2+(e^{\omega t}+e^{-\omega t})^2}$$

$$\boxed{\|\vec{V}_a\| = \rho_0\frac{\omega}{2}\left[2\left(e^{2\omega t}+e^{-2\omega t}\right)\right]^{1/2}}$$

0,25

3) Calcul de $\vec{\gamma}(M/R_2)$: $\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right)_{R_2}$

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \frac{d}{dt}\left[\rho_0\frac{\omega}{2}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)\vec{i}_2\right]$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_2) = \rho_0\frac{\omega^2}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)\vec{i}_2}$$

0,5

• Calcul de l'accélération $\vec{\gamma}_e$:

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\Omega}_{12}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}_{12} \wedge (\vec{\Omega}_{12} \wedge \vec{OM})$$

$$= 0 + \omega \vec{k} \wedge \left[\omega \vec{k}_2 \wedge \rho_0 \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) \vec{i}_2\right]$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = -\rho_0 \frac{\omega^2}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \vec{i}_2}$$ 0,5

• calcul de l'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}_{12} \wedge \vec{V}(M/R_2)$$

$$= 2\omega \vec{k}_2 \wedge \rho_0 \frac{\omega}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \vec{i}_2$$

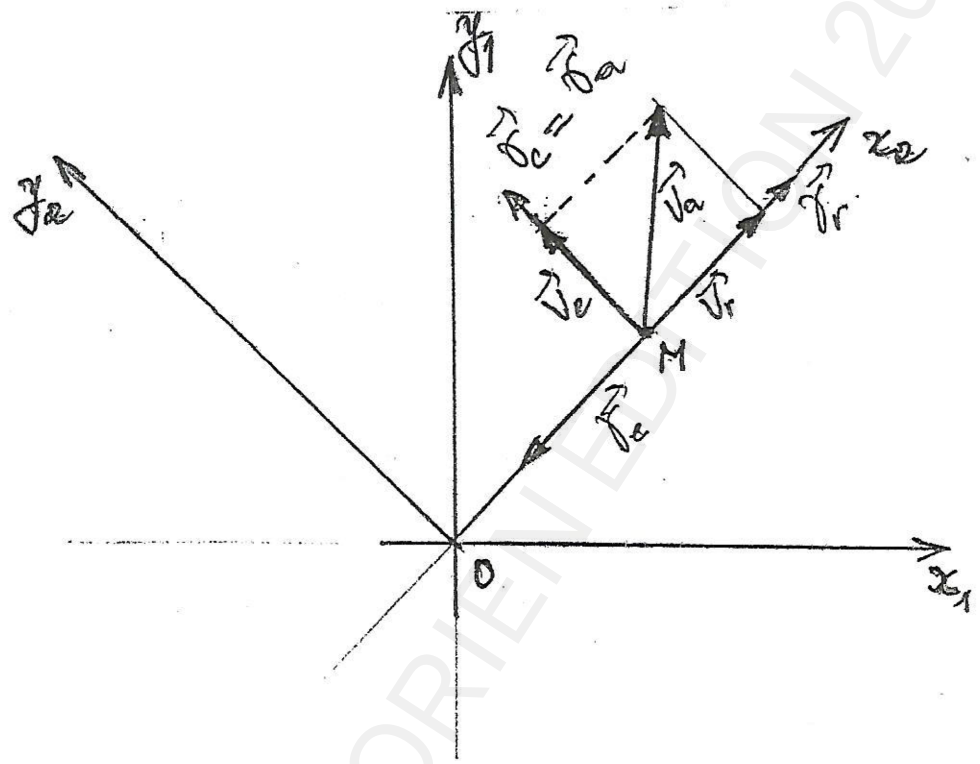
$$\boxed{\vec{\gamma}_c = \rho_0 \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \vec{j}_2}$$ 0,5

• Calcul de l'accélération absolue : $\vec{\gamma}_a$:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = \vec{\gamma}(M/R_2) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = \rho_0 \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \vec{j}_2}$$ 0,5

Représentation graphique : 0,5



Exercice 3 : 12/12

I - Tir dans le vide : 4/4

1) Bilan des forces extérieures agissant sur M :

→ le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{z}$. 0,5

Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_{(M)}$$

$$-mg\vec{z} = m\vec{\gamma}_{(M)} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m\gamma_x \\ -mg = m\gamma_z \end{cases}$$

On a donc $\boxed{\vec{\gamma}_{(M)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}$ 0,5

2) • Calcul de la vitesse $\vec{V}(t)$:

$$\vec{V}(t) = \int_0^t \vec{\gamma}(t)\,dt + \vec{V_0}$$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 + V_0\cos\theta \\ -gt + V_0\sin\theta \end{pmatrix}}$$ 0,5

• Calcul de la position du point M ($\vec{OM}$) :

$$\vec{OM}(t) = \int_0^t \vec{V}(t)\,dt + \vec{OM_0}$$

$$\vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} V_0\cos(\theta)t + x_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin(\theta)t + z_0 \end{pmatrix}$$

à $t=0$, $\vec{OM}(0)=\vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} V_0 \cos(\theta).t \\ -\frac{1}{2}g t^2 + V_0 \sin(\theta).t \end{pmatrix}}$$ 0,5

• Calcul de la distance OA:

On a : $\vec{OM}(t) = \vec{OA}$; $\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ z_A = 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_0 \cos\theta . t = x_A & (1) \\ -\frac{1}{2}g t^2 + V_0 \sin\theta . t = 0 & (2) \end{cases}$$; on déduit t de (2)

$$\boxed{t = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}}$$ 0,25

x_A vaut alors : $x_A = V_0 \cos\theta . \frac{V_0 \sin\theta}{g}$

$$x_A = \frac{2V_0^2 \cos\theta . \sin\theta}{g}$$

soit $$\boxed{x_A = \frac{V_0^2 \sin(2\theta)}{g}}$$ 0,25

3) Détermination de z_{max} :

Nous avons z_{max} lorsque $V_z = 0$, c'est-à-dire

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_0 \cos\theta \\ -gt + V_0 \sin\theta = 0 \end{pmatrix}.$$

nous avons donc z_{max} à $t = \dfrac{V_0 \sin\theta}{g}$.

On obtient donc z_{max} en introduisant t dans l'expression de $z(t)$; ce qui conduit à :

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\theta \cdot t$$

$$\Rightarrow z_{max} = -\frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + V_0 \sin\theta \cdot \frac{V_0 \sin\theta}{g}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{g} + \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{g}$$

$$\boxed{z_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

0,5

4) Calcul de z_{max} en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

La seule force appliquée au point M dérive d'un potentiel. On peut donc écrire :

$E_M = Cste = E_p + E_c$ (E_M : énergie Mécanique
E_p : énergie potentielle
E_c : énergie cinétique)

le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m \left(V^2_{(t_{z_{max}})} - V_0^2 \right) = -mgz$$

à $t=0$ $\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} V_0 \cos\theta \\ V_0 \sin\theta \end{pmatrix}$; à $z = z_{max}$ $\vec{V}(t_{z_{max}}) = \begin{pmatrix} V_0 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \left[(V_0^2 \cos^2\theta + V_0^2 \sin^2\theta) - V_0^2 \cos^2\theta \right] = mg z_{max}$$

$$\frac{1}{2} m V_0^2 \sin^2\theta = mg z_{max}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}} \quad (1)$$

II - $\boxed{\text{Tir dans l'air}}$ (6/6)

1) Bilan des forces extérieures appliquées à M :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{z}$

- le frottement visqueux :

$$\vec{f}_f = -k\vec{v}$$

Le principe fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\boxed{m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{\gamma}}$$ (1)

2) Retrouvons l'expression : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$:

On a : $m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}}$$ (*) (1)

3) Trouvons ~~une~~ solution particulière de $\circledast$

Si $\vec{V} = \frac{m}{k}\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = 0$

0,5

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{V} = 0 + \frac{k}{m}\cdot\frac{m}{k}\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{m}{k}\vec{g}}$$

qui est une solution particulière de l'équation $\circledast$.

4) Solution complète de l'équation $\circledast$

- L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{V} = \vec{0} \text{ ; la solution est } \boxed{\vec{V} = \vec{A}\cdot e^{-\frac{k}{m}t}}$$

0,5

- La solution complète :

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{A}\cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\vec{g}}$$ Déterminons $\vec{A}$ 0,5

à $t=0$ $\vec{V_0} = \vec{A} + \frac{m}{k}\vec{g} \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{V_0} - \frac{m}{k}\vec{g}$

On a finalement :

$$\boxed{\vec{V}(t) = \left(\vec{V_0} - \frac{m}{k}\vec{g}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\vec{g}}$$ 0,5

5) Détermination de $\vec{OM}$ et de OM_{max}.

$\vec{OM}(t)$: on intègre $\vec{V}(t)$ pour obtenir $\vec{OM}(t)$

Ce qui conduit à :

$$\boxed{\vec{OM}(t) = \frac{m}{k}\left(\vec{V_0} - \frac{m}{k}\vec{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \frac{m}{k}\vec{g}\cdot t}$$

Soit :

$$\vec{OM}(t) = \begin{cases} x = \frac{m}{k} V_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ \\ y = \frac{m}{k}\left(V_0 \sin\theta + \frac{m}{k} g\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{m}{k} g \cdot t \end{cases} \quad 1$$

• Distance $OM_{(max)} = x_{max}$

$$\boxed{x_{max} = \frac{m}{k} V_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \quad 1$$

UFHB année universitaire 2013-2014

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ELEMENTS DE LOGIQUE L1 session 1

EXERCICE 1

1.Rappel :Saviez vous que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$?
(0,0,2,3) et (5,7,6,8) sont deux éléments de $\mathbb{R}^4$
((0,0),(2,3)) et ((5,7),(6,8)) sont deux éléments de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
(0,(0,2),3)et (5,(7,6),8) sont deux éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$
(0,(0,2,3))et (5,(7,6,8)) sont deux éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

2.Rappel :deux ensembles E et F sont **équipotents** s'il existe une bijection entre ces ensembles.
trouvons donc une application bijective entre ces deux ensembles .

soit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \zeta : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z, t) \mapsto ((x, y), (z, t)) \end{aligned}$$

En effet pour deux éléments de
$\mathbb{R}^4$ c'est-à-dire pour un élément $((x, y, z, t), (x', y', z', t')) \in (\mathbb{R}^4)^2 \neq \mathbb{R}^8$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, z, t) = \zeta(x', y', z', t') &\Rightarrow ((x, y), (z, t)) = ((x', y'), (z', t')) \\ &\Rightarrow ((x, y) = (x', y') et (z, t) = (z', t')) \\ &\Rightarrow (x = x', y = y', z = z' \text{ et } t = t') \\ \zeta(x, y, z, t) = \zeta(x', y', z', t') &\Rightarrow (x, y, z, t) = (x', y', z', t') \end{aligned}$$

d'ou l'injectivité.

Pour la surjectivité est evidente.En effet $\forall ((x, y), (z, t))$, on peut toujours avoir un $4 - uplets$ formé de x, y, z, t(**l'injectivité**).
Mais dans notre application à cause de l'ordre de (x, y, z, t) ,on ne peut trouver q'un et un seul élément.(**la bijectivité**)

Exercice 2 :

on a :$f : E \mapsto E$
(1)
1.on a :$fof : E \mapsto E$ car $E \subseteq E$ donc $fof = f^2$ est bien définie.

2.Montrons que si f^2 est injective alors f est injective.

f^2 injective signifie $\forall x, y \in E, fof(x) = fof(y) \Rightarrow x = y$
soient $x, y \in E$ vérifiant $f(x) = f(y)$ alors $fof(x) = fof(y)$
comme fof est injective,$f(x) = f(y)$ **entraine** $x = y$
donc f est injective.

3.Montrons que si f^2 est surjective alors f est surjective.

f^2 surjective signifie $\forall y \in E, \exists x \in E | fof(x) = y$

si l'on considère fof surjective et qu'on pose $l = f(x) \in E$, on a :
$fof(x) = f(f(x)) = f(l) = y$
donc $\forall y \in E, \exists x \in E | fof(x) = y$ **entraine** $\forall y \in E, \exists l \in E | f(l) = y$
d'ou f est surjective.

CORRECTION PARTIELLE D'ELEMENTS DE LOGIQUE L1 ESATIC session 1

Exercice 2 :

a)Soient A, E, F des ensembles
1-Si $E \cup A = F \cup A$ alors $E = F$ (**fausse**)
Prenons $A = \{2, 1, 3\}$, $E = \{2\}$ et $F = \{1, 3\}$
on a : $E \cup A = F \cup A = \{2, 1, 3\}$ mais $E \neq F$
2-Si $E \backslash A = F \backslash A$ alors $E = F$ (**fausse**)
Prenons $A = \{2\}, E = \{1\}$ et $F = \{1, 2\}$,
on a :$E \backslash A = F \backslash A = \{1\}$ mais $E \neq F$
3- Si $A \subset E \cup F$ alors $A \subset E$ ou $A \subset F$ (**fausse**)
Prenons $E = \{a, b; c\}, F = \{d, e\}$ et $F = \{c, e\}$,
on a bien :$A \subset E \cup F$ mais $A \not\subset E$ et $A \not\subset F$
4-Si $A \not\subset E \cup F$ alors $A \not\subset E$ ou $A \not\subset F$ (**vraie**)
b)Les contraposées des implications ci-dessus
1-Si $E \neq F$ alors $E \cup A \neq F \cup A$
2-Si $E \neq F$ alors $E \backslash A \neq F \backslash A$
3-Si $A \not\subset E$ et $A \not\subset F$ alors $A \not\subset E \cup F$
4-Si $A \subset E$ et $A \subset F$ alors $A \subset E \cup F$

Exercice 3 :

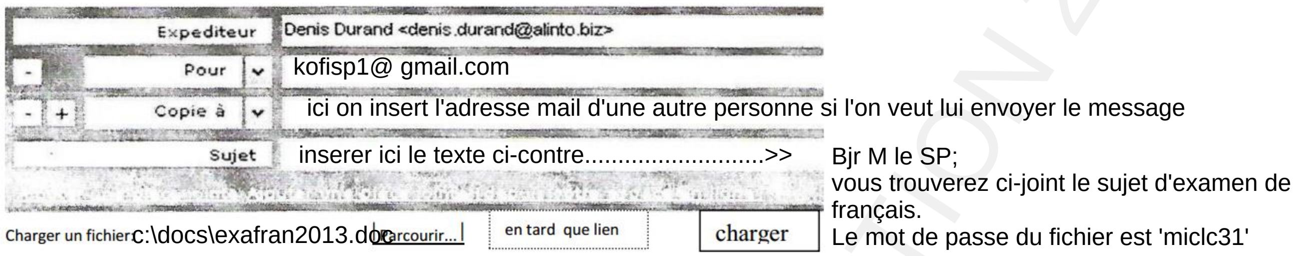
Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Sur $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.
$\mathcal{R}$ est définie par :$X\mathcal{R}Y$ si $E \subset X \cup \overline{Y}$
1.$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
2.Reflexivité
Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ on a :$X \cup \overline{X} = E \Longrightarrow E \subset X \cup \overline{X} \Longleftrightarrow X\mathcal{R}X$. d'où la reflexivité
Transitivité
Soient $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}^3(E)$,on a :$X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}Z$
$X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow E \subset X \cup \overline{Y}$ et $Y\mathcal{R}Z \Longleftrightarrow E \subset Y\mathcal{R}\overline{Z}$
$E \subset X \cup \overline{Y}$ signifie que tout élément x de E est dans $X \cup \overline{Y}$ c'est-à-dire $x \in X$ ou $x \in \overline{Y}$
$E \subset X \cup \overline{Z}$ signifie que tout élément x de E est dans $X \cup \overline{Y}$ c'est-à-dire $x \in X$ ou $x \in \overline{Z}$
on voit bien que $x \in X$ ou $x \in \bar{Z}$ c'est-à-dire $x \in X \cup \bar{Z} \Longrightarrow E \cup X\mathcal{R}\bar{Z}$ alors $X\mathcal{R}Z$. d'où la transitivité.
3. $\mathcal{R}$ est-elle symetrique ?
$\mathcal{R}$ n'est pas symetrique car dans $\mathcal{P}(E)$,$\{1, 2\}\mathcal{R}\{1\}$ mais $\{1\} \not\mathcal{R}\{1, 2\}$
4.Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
$\mathcal{R}$ est reflexive et transitive d'après la question 2.verifions si elle est anti-symetrique.
$\mathcal{R}$ est anti-symétrique si $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}^2(E), X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}X \Longrightarrow X = Y$
Les seules éléments de $\mathcal{P}^2(E)$ qui verifient $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}X$ sont :
$(\{1\}, \{1\}), (\{2\}, \{2\}), (\{3\}, \{3\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\}), (\{1, 3\}, \{1, 3\}), (\{2, 3\}, \{2, 3\}), (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}), (\varnothing, \varnothing$
On voit bien que chaque couple est constitué d'un même élément donc on a finalement $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}X \Longrightarrow X = Y$ d'où $\mathcal{R}$ est anti-symétrique.
Alors $\mathcal{R}$ est une rélation d'ordre

CORRECTION DE L'EXAMEN DE BUREAUTIQUE L1 session 2

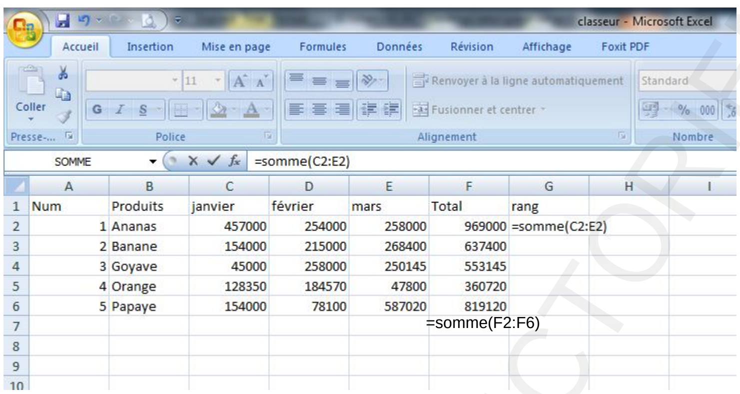
Exercice 1 :

Q_1 :
(c) UCC, UAL, E/S, ROM, RAM, BUS
Q_2 :
(a) L'internet
Q_3 :
(c) INTEL, AMD, MOTOROLA
Q_4 :
(c) CATHODIQUE,LCD, LED
Q_5 :
Q_6 :
(c) UCC, UAL, E/S, ROM, RAM, BUS
Q_7 :
(d) DES LOGICIELS D'APPLICATION
Q_8 :
(d) UN PARFEU
Q_9 :
(c) CATHODIQUE,LCD, LED
Q_{10} :
(c) @
Q_{11} :
(c) ITALIQUE SOULIGNE
Q_{12} :
(d) LE PAYS D'HEBERGEMENTDU NOM

EX0 1



EX0 2



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Num	Produits	janvier	février	mars	Total	rang		
2	1	Ananas	457000	254000	258000	969000	=somme(C2:E2)		
3	2	Banane	154000	215000	268400	637400			
4	3	Goyave	45000	258000	250145	553145			
5	4	Orange	128350	184570	47800	360720			
6	5	Papaye	154000	78100	587020	819120			
7						=somme(F2:F6)			
8									
9									
10									

Les totaux de ventes se calculent avec la formule $= somme(C_i : E_i)$
Le chiffre d'affaire trimestriel se calcule avec la formule $= somme(F2 : F6)$

Proposé de correction

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

1ère Session

2013-2014

Exercice

1. $\forall m \in \mathbb{R}$, $({}^tA_m) = A_m$,(**1 point**)

ainsi A_m est une matrice symétrique.(**1 point**)

2. $f(m) = \det A_m$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Alors $f(m) = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = (4-m)(1-m)^2$.(**3 points**)

b) On a bien $f(1) = 3 \times 0^2 = 0$,(**1 point**) aussi :

$\forall m \in \mathbb{R}$, A_m est inversible$\Longleftrightarrow \det A_m \neq 0$, $\forall m \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$B = \mathbb{R} \backslash \{4, 1\}$.(**1, 5 points**)

3. $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,(**1 point**) $A_0^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (**2 points**)

et $A_0^3 = \begin{bmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{bmatrix}$ (**1, 5 points**).

a) On a bien : $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0$.(**1 point**)

b) $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0 \Longleftrightarrow$

$A_0 \times \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3) = \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3) \times A_0 = I_3$ (**1, 5 points**)

$\Longleftrightarrow A_0$ est inversible d'inverse $A_0^{-1} = \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3)$.(**2 points**)

Après calcul $A_0^{-1} = \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.(**1, 5 points**)

4. $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right) \right\}$ est la solution du système (S).(**2 points**)

CORRECTION DE l'EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL SESSION 2 L1

Exercice 1

Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$\mathcal{S}_a \;:\; \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & & & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & az & = & 3 \\ & & (a+1)y & - & 2z & = & a-3. \end{array}\right.$$

1. Donner la matrice augmentée du système $\mathcal{S}_a$, notée M_a.
2. En réduisant la matrice M_a sous forme échelonnée, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système $\mathcal{S}_a$:
   i. n'admet aucune solution ;
   ii. admet une infinité de solutions ;
   iii. admet exactement une solution.
3. Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ dans les cas (ii) et (iii). On identifiera les variables libres et les variables directrices.

Solution

1. La matrice augmentée du système est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & a & 3 \\ 0 & a+1 & -2 & a-3 \end{pmatrix}.$$

2. On réduit d'abord la matrice augmentée M_a du système $\mathcal{S}_a$ sous sa forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & a & 3 \\ 0 & a+1 & -2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & a & 3 \\ 0 & a+1 & -2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & -2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + (a+1)L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & 2(a-1) \end{pmatrix}.$$

La suite de la réduction dépend de la valeur du paramètre a.

Puisque $a^2+a-2 = (a-1)(a+2)$, la dernière ligne de la matrice échelonnée correspond à l'équation :

$$(a-1)(a+2)z = 2(a-1).$$

– Si $a = -2$, cette équation devient $0 = -6$: elle n'admet aucune solution et le système est incompatible.

– Si $a = 1$, l'équation devient $0 = 0$. Alors, le système est réduit à deux équations, qui sont :

$$\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_1 \to L_1 - L_2$ sur la matrice augmentée de ce système, on obtient le système équivalent suivant :

$$\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

On voit donc que la variable z est libre, et le système admet une infinité de solutions.

– Si $a \neq -2$ et $a \neq 1$, on peut poursuivre la réduction de la matrice M_a sous forme échelonnée réduite, c'est-à-dire diviser la troisième ligne par $a^2+a-2=(a-1)(a+2)$. Cela donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & 2(a-1) \end{pmatrix} \overset{L_3 \to \frac{1}{(a-1)(a+2)}L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \to -L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+2} \end{pmatrix} \overset{L_2 \to L_2 + aL_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \to L_1 + L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+2} \end{pmatrix}$$

On obtient donc une matrice dont chaque ligne contient un “1” directeur, i.e. toutes les variables du système sont directrices. Le système $\mathcal{S}_a$ admet donc une unique solution dans cette situation.

En résumé, on a les 3 situations suivantes :

i. si $a=-2$, le système $\mathcal{S}_a$ n'admet aucune solution ;

ii. si $a=1$, le système $\mathcal{S}_a$ admet une infinité de solutions ;

iii. si $a \neq -2$ et $a \neq 1$, le système $\mathcal{S}_a$ admet exactement une solution.

3. D'après ce qui précède et en utilisant la réduction sous forme échelonnée réduite de la matrice M_a effectuée dans la question 2 pour les cas *ii* et *iii*, les solutions du système $\mathcal{S}_a$ sont les suivantes.

Cas ii. Si $a=1$, en posant $z=s$ qui est une variable libre, le système $\mathcal{S}_a$ admet une infinité de solutions données par :

$$\mathcal{S} = \{(x=s; y=s-1; z=s),\ s \in \mathbb{R}\}.$$

Cas iii. Si $a \neq -2$ et $a \neq 1$, le système $\mathcal{S}_a$ admet exactement une solution :

$$\mathcal{S} = \{(x=\frac{2a}{a+2}; y=\frac{a-2}{a+2}; z=\frac{2}{a+2})\}.$$

Exercice 2

On considère la matrice $D = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

Calcul du determinant de D

attention on ne peut pas utiliser **la methode de SARRUS** car valable uniquement pour les matrices d'ordre 3

Utilisons donc les opérations élémentaires .

$$\det(D) = |D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{vmatrix} = (-4)\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(D) = (-4) \times (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-4) \times (-3) \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

Donc $\boxed{\det(D) = 36}$

2.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -9 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ; D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ; D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -6 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

La matrice D_1 est obtenue à partir de D en remplacant la deuxième ligne de celle ci par $-L_2 - L_3$.

La matrice D_2 est obtenue à partir de D en remplacant la troisième ligne de celle ci par le vecteur nul.

La matrice D_3 est obtenue à partir de D en remplacant la quatrième ligne de celle ci par $-2L_4$

Donc on déduit que :
$\det(D_1) = -36$
....
car : $\det(D_1) = \det(L_1, L_2, L_3, L_4) = \det(L_1, -L_2 - L_3, L_3, L_4) = \det(L_1, -L_2, L_3, L_4) + \det(L_1, L_3, L_3, L_4)$
or $\det(L_1, L_3, L_3, L_4) = 0$ et $\det(L_1, -L_2, L_3, L_4) = -\det(L_1, L_2, L_3, L_4)$
alors $\det(D_1) = -\det(L_1, L_2, L_3, L_4) = -36$
....

$\det(D_2) = 0$
....
car : $\det(D_2) = \det(L_1, L_2, L_3, L_4) = \det(L_1, L_2, 0, L_4) = \det(L_1, L_2, L_3 - L_3, L_4) = \det(L_1, L_2, L_3, L_4) + \det(L_1, L_2, -L_3, L_4)$
or $\det(L_1, L_2, L_3, L_4) = 36$ et $\det(L_1, L_2, -L_3, L_4) = -\det(L_1, L_2, L_3, L_4) = -36$
alors $\det(D_1) = 36 - 36 = 0$
....

$\det(D_1) = -72$
....
car : $\det(D_3) = \det(L_1, L_2, L_3, L_4) = \det(L_1, L_2, L_3, -2L_4) = -2\det(L_1, L_2, L_3, L_4) = (-2) \times 36$
....
La justification semble être floue,n'est ce pas ? révoir dans le cours de matrice et d'espace vectoriel :les propriètés du déterminant.

Univ. FHB
UFR - MI.

Année 2013 - 2014. Semestre 2

ECUE : Espaces vectoriels

Examen du 11/08/2014

Exercice 1

E espace vectoriel de dimension trois sur $\mathbb{R}$.

$$(1-1). \quad M = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

De la relation (1-1), on déduit que :

$$(1-2) \begin{cases} f(e_1) = e_1 + 0e_2 + 2e_3 \\ f(e_2) = 0 \cdot e_1 + 2e_2 - e_3 \\ f(e_3) = 3e_1 + e_2 + 2e_3 . \end{cases}$$

(a). $\mathcal{B}_1 = (e_3, e_2, e_1)$. $M_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$. Il résulte des relations (1-2) que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathcal{B}_2 = (e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

La famille $\mathcal{B}_2$ est constituée de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension trois.

2

1

2 Pour montrer qu'elle est une base, il suffit de démontrer qu'elle est une famille libre.
D'ailleurs pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$x(e_1+e_3)+ye_3+z(e_2-e_3)=0 \Leftrightarrow$$
$$xe_1+ze_2+(x+y-z)e_3=0 \Leftrightarrow$$
$$x=y=z=0$$ car $B=(e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre. Par suite la famille B_2 est une base de E.

(c) Matrice de f dans la base B_2 : $M_{B_2}(f)$

Nous allons utiliser la définition pour le calcul de $f(e_1+e_3)$, $f(e_3)$, $f(e_2-e_3)$ et leurs expressions comme combinaison linéaires de e_1+e_3, e_3 et e_2-e_3.
D'ailleurs, en utilisant (1-2), on a :

$$(1\text{-}3)\begin{cases} f(e_1+e_3)=f(e_1)+f(e_2)=4e_1+e_2+4e_3 \\ \qquad\qquad =4(e_1+e_3)+1.e_3+1.(e_2-e_3). \\ f(e_3)=3e_1+e_2+2e_3=3(e_1+e_3)+(e_2-e_3) \\ f(e_2-e_3)=f(e_2)-f(e_3)=-3e_1+e_2-3e_3 \\ \qquad\qquad =-3(e_1+e_3)+1.e_3+1.(e_2-e_3) \end{cases}$$

On déduit de (1-3) la matrice cherchée

$$M_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

Exercice 2

1. E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ signifie que E vérifie les conditions suivantes

(i) : E est muni d'une loi notée + (l'addition) qui en fait un groupe commutatif.

(ii) Il existe une loi (application) que je note ·, de $\mathbb{C} \times E \longrightarrow E$, $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ qui est telle que :

1

⊛ $\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E$,

$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; $(\lambda + \alpha)x = \lambda x + \alpha x$

$1 \cdot x = x$.

où 1 est l'élément unité de $\mathbb{C}$.

2. (a) F est un sous-espace vectoriel.

• $F \neq \emptyset$ car la suite dont tous les termes sont nuls est dans F.

Soient $u = (u_n)$, $v = (v_n) \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Alors $\forall n$, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$,

$v_{n+2} = a v_{n+1} + b v_n$

1,5

de telle sorte que, $\forall n$:

$\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} = a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n)$

$= a w_{n+1} + b w_n$ où

4

$w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.

Ainsi $\alpha(u_n) + \beta(v_n) = \alpha u + \beta v \in F$.

(b) Soit $r \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Alors $(v_n) = (r^n)$, $v_n = r^n$.

$\in F \iff$

$r^{n+2} = a r^{n+1} + b r^n$.

En simplifiant par $r^n \neq 0$, on obtient

$r^2 = ar + b$.

2 Réciproquement si $r^2 = ar + b$, en multipliant les 2 membres par r^n, on obtient

$r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$.

3. On prend $a = 2$ et $b = -5$

(c) Trouvons deux nombres α et β dans $\mathbb{C}$ tels que (α^n) et (β^n) soient dans F.

D'après (b), α et β sont solutions de l'équation

2 $r^2 - 2r + 5 = 0$.

Soit $\alpha = 1 + 2i$ et $\beta = 1 + 2i$.

(d) : On procède par récurrence sur n

1 Si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors

$u_2 = au_1 + bu_0 = av_1 + bv_0 = v_2$

(5)

Supposons $v_k = u_k \ \forall\, 0 \leq k \leq n$. Alors

$u_{k+1} = a u_k + b u_{k-1} = a v_k + b v_{k-1} = v_{k+1}$

D'où $v_n = u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(e) : (u_n) étant de F, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$.

Si de tels λ et μ existent, ils vérifient

$u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda \alpha + \beta \mu$.

De tels λ et μ existent si le système suivant aux inconnues λ et μ admet des solutions ;

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda \alpha + \mu \beta = u_1 \end{cases}$$

2 Ce système est de Cramer car son déterminant $\cancel{=} 4i \neq 0$. Il existe donc un couple unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$.

(f) : Il ~~en~~ résulte de (e) que la dimension de F est égale à 2 ; $\mathcal{B} = ((\alpha^n), (\beta^n))$ étant une base de F.

1

(g) Calcul du terme général de (u_n). (6)

Il revient à déterminer les valeurs de λ et μ tels que

$$u^n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n \quad \forall n.$$

D'après ce qui précède, λ et μ sont solutions du système de Cramer :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = i \end{cases}$$

On a : $\lambda = \frac{1}{4}(3+i)$,

$\mu = \frac{1}{4}(1-i)$.

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{4}(3+i)(1+2i)^n + \frac{1}{4}(1-i)(1-2i)^n.$$

CORRECTION PARTIELLE D'ELECTRICITE L1 session 2

Exercice 2 :

1.le courant I en utilisant **les lois des courants fictifs**

$$\begin{pmatrix} +12 & -10 \\ -10 & +15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -20 \\ -10 & 70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{840 - 200}{180 - 100}$$

$f_2 = I = \frac{640}{80} = 8A$

2. Les caractéristique du générateur de Thevenin

$\odot$ Calcul de E_{th}

On a :$I = \frac{E_{th}}{R_{th}+R}$ et $E_{th} = E_2 - R_2 I = E_2 - R_2 \left(\frac{E_1}{R_1+R_2}\right)$

A.N :$E_{th} = 70 - 10 \times \left(\frac{20}{12}\right) \Longrightarrow \boxed{E_{th} = \frac{160}{3} V}$

$\odot$ Calcul de R_{th}

$I = \frac{E_{th}}{R_{th}+R} \Longrightarrow R_{th} = \frac{E_{th}}{I} - R = \frac{160}{8\times 3} - 5 \Longrightarrow \boxed{R_{th} = \frac{5}{3}\Omega}$

3.Expression du courant éléctrique I

$\boxed{I = \frac{E_{th}}{R_{th}+R}}$ A.N : $I = \frac{160}{3} \times \frac{1}{\frac{5}{3}+5} = 8A$

4.Expression de la puissance P en fonction de E_{th} , R_{th} et R

$\boxed{P = RI^2 = \frac{RE_{th}^2}{(R_{th}+R)^2}}$

Université Félix Houphouët-Boigny (Abidjan-Cocody) | UFR Mathématique-Informatique(MI)

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2013-2014

UE OPTIQUE

Proposée de correction

Exercice I : vecteur de poynting-intensité lumineuse

1)-a vecteur de poyting $\vec{R}$ en fonction de $E_0, \mu_0, c, \omega, t, \vec{k}, \vec{r}\ et\ \vec{u}$

$$\vec{R} = \vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0}\wedge\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}\right) = \frac{1}{\omega\mu_0}[(\vec{E}.\vec{E})\vec{k} - (\vec{E}.\vec{k})\vec{E}]\ or\ \vec{E}.\vec{k} = \vec{0}\ car\ \vec{E}\perp\vec{k}$$

d' où $\vec{R} = \frac{E^2}{\omega\mu_0}\vec{k}$ or $\vec{k} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} = \frac{\omega}{v}\vec{u}$ ainsi $\vec{R} = \frac{E^2}{\omega\mu_0}.\frac{\omega}{v}\vec{u} = \frac{E^2}{\mu_0 v}\vec{u}$

On a une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale monochromatique qui se propage dans le vide (O.E.P.P.S.M.)

alors $\vec{E} = \vec{E}_0.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)$

Dans le vide , $v = c$; $E = \|\vec{E}\| = E_0|\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})|$

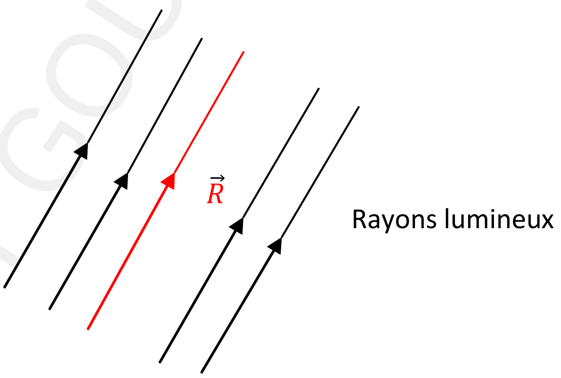
On peut ajouter φ comme le supprimer ; on pose $\varphi = 0$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{E^2}{\mu_0 v}\vec{u} = \frac{{E_0}^2}{\mu_0 c}cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}).\vec{u}}$$

b- intérêt du vecteur de poynting dans l'étude des ondes lumineuses ?

L'énergie lumineuse est transportée dans la direction du vecteur de poyting. Donc les rayons lumineuses (qui transportent l'énergie lumineuse) sont au vecteur de poyting

Illustration

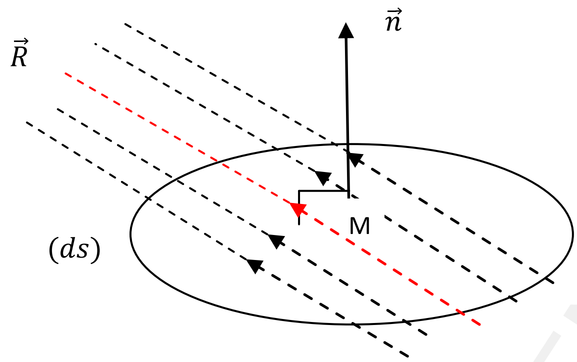


2) O.E.P.P.S.M assimilée à une onde lumineuse

a- calcul de l'intensité lumineuse I.

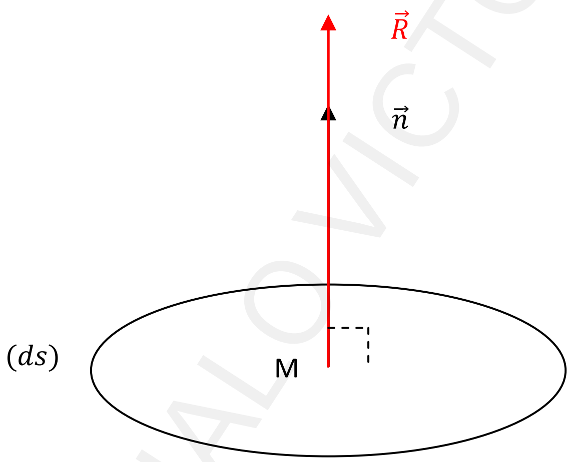
Lorsqu'une surface est traversée par le vecteur de poyting alors cette surface est traversée par des rayons lumineux.

Soit dS une surface élémentaire reperée par sa normale $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\| = 1$)



Le flux de $\vec{R}$ à travers dS est $d\phi = \vec{R}.\vec{n}.dS = Rn\, cos\theta\, dS$ $(d\phi\ est\ une\ puissance\ énergetique\ dP)$
$d\phi = dP \rightarrow unité: J.s^{-1}(W)$

Lorsque $\vec{R}$ est perpendiculaire à dS on obtient :



$$\theta = 0^o \Longrightarrow \cos\theta = 1$$

$$d\phi = RdS$$

La densité de flux $d\varphi = \frac{d\phi}{ds} = R = \|\vec{R}\| = \frac{E_0{}^2}{\mu_0 c} cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$

$d\varphi$ est fonction du temps t. La moyenne temporelle de $d\varphi$, appelé intensité lumineuse est :

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T d\varphi.dt = \frac{1}{T}\int_0^T Rdt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0{}^2}{\mu_0 c} cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)dt$$

$$I = \frac{E_0{}^2}{\mu_0 c\, T}\int_0^T cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})dt \qquad Posons\ \ \vec{k}.\vec{r} = \chi$$

$$I = \frac{{E_0}^2}{\mu_0 c\, T}\int_0^T cos^2(\omega t - \chi\,)dt \quad ou\ \ \chi = \vec{k}.\vec{r} = k_x.x + k_y.y + k_z.z = cste\ \ par\ rapport\ à\ t$$

Calculons d'un coté $\int_0^T cos^2(\omega t - \chi)dt$

On a : cos $2x = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2\,sin^2x \quad ainsi \quad cos^2x = \frac{\cos 2x+1}{2}$

$$\int_0^T cos^2(\omega t - \chi)dt = \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t - \chi) + 1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[t + \frac{1}{2\omega}sin(2\omega t - 2\chi)\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[T + \frac{1}{2\omega}sin(2\omega T - 2\chi) - \frac{1}{2\omega}\sin(-2\chi)\right]\ or\ \ T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[\frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega}sin\left(2\omega.\frac{2\pi}{\omega} - 2\chi\right) - \frac{1}{2\omega}\sin(-2\chi)\right]$$

$$\int_0^T cos^2(\omega t - \chi)dt = \frac{1}{2}\ \left[T + \frac{1}{2\omega}sin(-2\chi) - \frac{1}{2\omega}\sin(-2\chi)\right] = \frac{T}{2}$$

$$car\quad \mathbf{sin(2\omega T - 2\chi) = sin\,(2\omega T)cos\,(2\chi) - cos\,(2\chi)sin\,(2\omega T)}$$

$$\boxed{I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 C}}$$ *Première expression*

$$On\ sait\ que\ \ \varepsilon_0\mu_0c^2 = \frac{1}{36\pi.10^9} \times 4\pi.10^{-7}(3.10^8)^2 = 1$$

On a : $\varepsilon_0\mu_0c^2 = \varepsilon_0\mu_0c.c = 1 \Longrightarrow \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c}$

On obtient la deuxième expression de I

$$\boxed{I = \frac{E_0^2}{2}\varepsilon_0\mu_0}$$ *Deuxième expression*

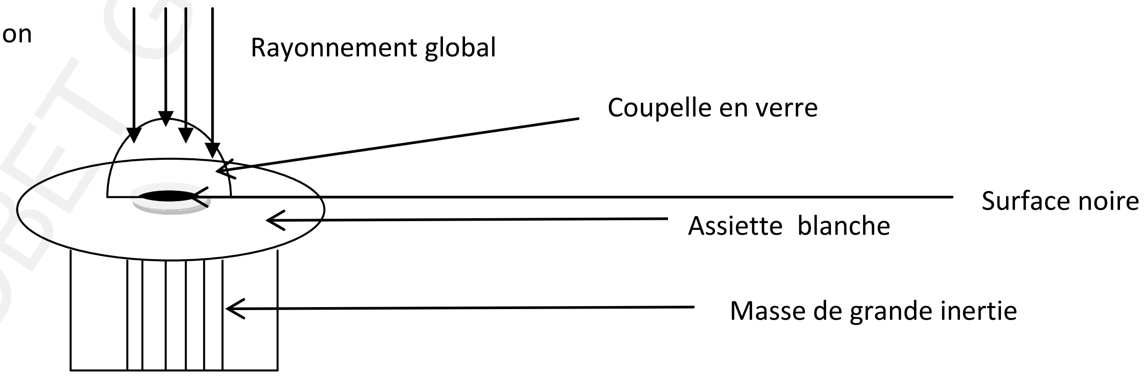
b-Unité de I et noms des deux appareils de mesure

I est une densité de flux énergétique. Donc I est en $J.s^{-1}.m^{-2}$ $(W.m^{-2})$

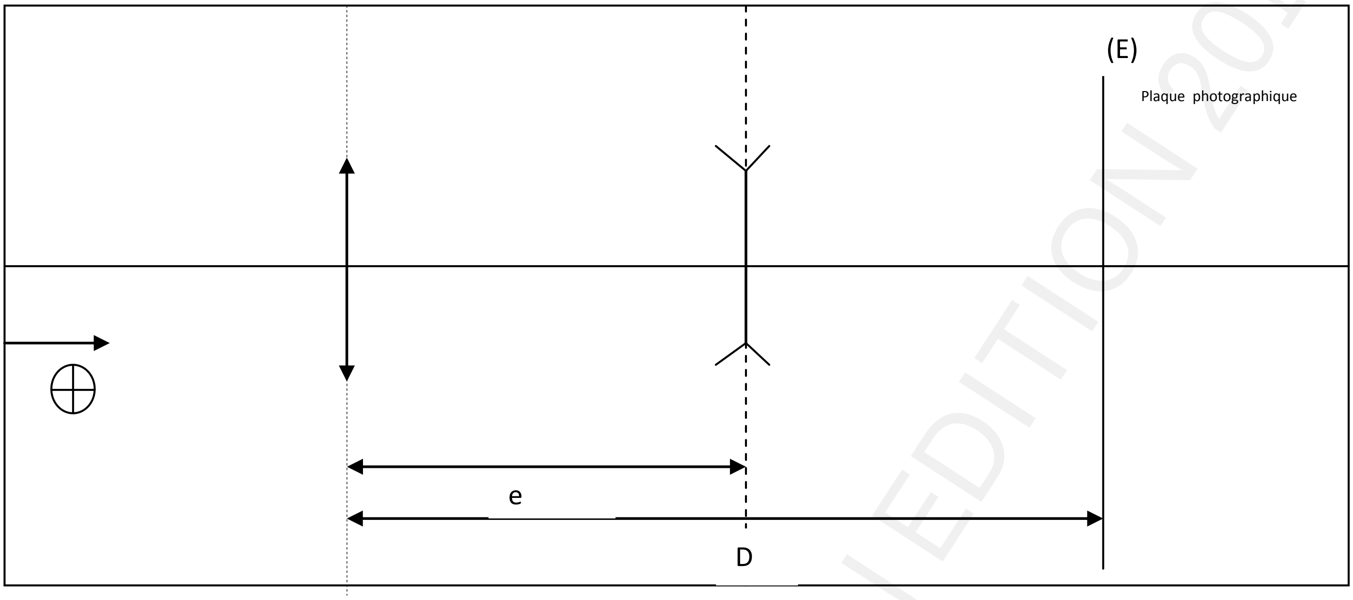
Appareil 1 : ***le pyranomètre***

Rayonnement solaire incident (Rayonnement global) se mesure avec un pyranomètre.

Illustration



Exercice 2 : Téléobjectif (13 points)



1) Calcul de $e = O_1O_2$ On a :

$$\infty \longrightarrow F'_1 \longrightarrow F'$$

F' étant l'image de F'_1 à travers ; la formule de conjugaison de Descartes permet d'écrire :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_1'} \quad (E_1) \qquad \overline{O_2F'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'} = -e + D = D - e$$

$$\overline{O_2F_1'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'} = -e + f_1' = f_1' - e$$

$$(E_1) \Rightarrow \frac{1}{D-e} - \frac{1}{f_1' - e} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{f_1' - e - D + e}{(D-e)(f_1' - e)} = \frac{1}{f_2'}$$

$$(D-e)(f_1'-e) = f_2'(f_1' - D) \Leftrightarrow Df_1' - De - ef_1' + e^2 = f_1'f_2' - Df_2'$$

$$\boxed{e^2 - (D + f_1')e + [(f_1' + f_2')D - f_1'f_2'] = 0}$$

Soit numériquement : $e^2 - 29e + 154 = 0$

On a : $\Delta = (-29)^2 - 4(154) = 225 \Rightarrow e = \frac{29+\sqrt{225}}{2} = 22\ cm \quad ou \quad e = \frac{29-\sqrt{225}}{2} = 7\ cm$

$22\ cm > D\ (impossible)$ alors $\boxed{e = 7\ cm}$ $(1pts)$

Le téléobjectif étudié est donc équivalent au doublet de symbole : $\boxed{(10,7,-4)}$ $(1pts)$

2/ Positions par rapport à L_1 du foyer objet F et du foyer image F' de ce téléobjectif

On a : $F \xrightarrow{(L_1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$

F_2 étant l'image de F à travers (L_1), la formule de Newton permet d'écrire : $\overline{F_1F}.\overline{F_1'F_2} = (f_1')^2 \quad (E_2)$

$$\overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + e - f_2' = e - f_1' - f_2'$$

$$(E_2) \Longrightarrow \overline{F_1F} = \frac{(f_1')^2}{-\overline{F_1'F_2}} = \frac{(f_1')^2}{f_1' + f_2' - e} = \frac{10^2}{10 - 4 - 7} = -100\ cm$$

$\overline{O_1F} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1F} = -f_1' + \overline{F_1F} = -10cm - 100cm \Longrightarrow$ $\boxed{\overline{O_1F} = -110cm}$ $(1pts)$

$\boxed{\overline{O_1F'} = D = 19cm}$

2) a) calcul de la distance focale f' de ce téléobjectif

$V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - e\frac{1}{f_1'f_2'} = \frac{f_2'+f_1'-e}{f_1'f_2'}$ $\boxed{f' = \dfrac{f_1'f_2'}{f_2' + f_1' - e}}$

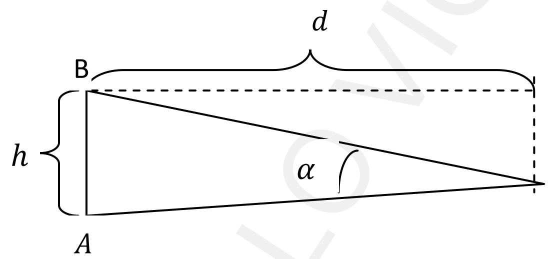
A.N : $f' = \frac{10\times(-4)}{10-4-7} \Longrightarrow$ $\boxed{f' = 40\ cm}$ $(1\ pts)$

Ce téléobjectif est donc environ deux fois moins encombrant (19 cm au lieu de 40 cm) qu'un appareil photographique à objectif simple de même focale f' . $(1pts)$

b) Positions des points principaux H et H' de ce doublet, par rapport à F et F' respectivement

$\boxed{\overline{H'F'} = f' = 40\ cm}$ $\boxed{\overline{HF} = f = -f' = -40\ cm}$

4/a) calcul du diamètre apparent α

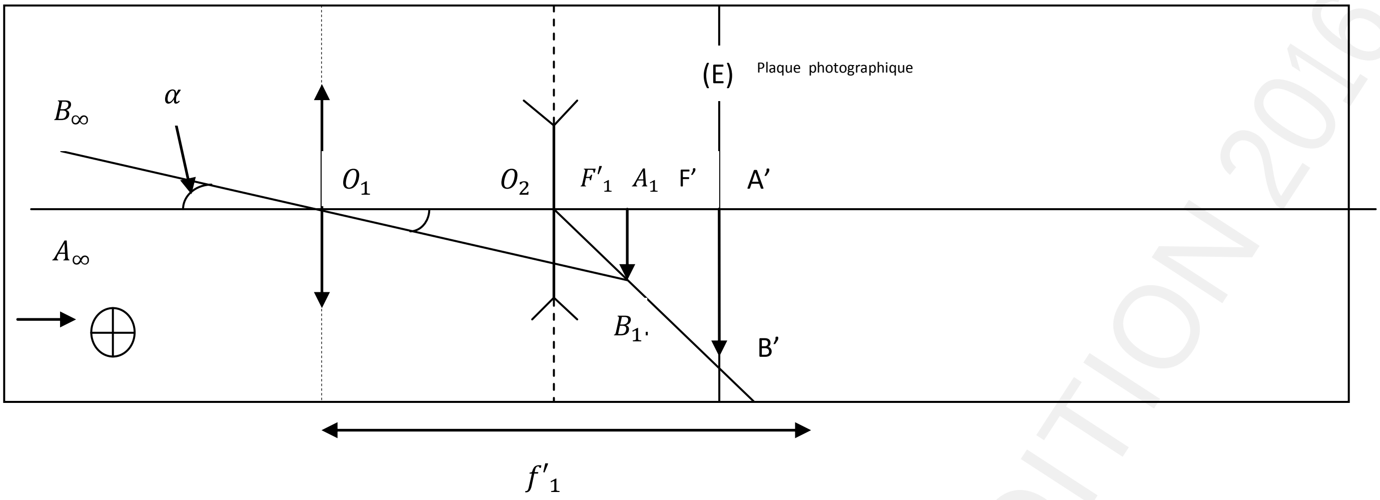


La base A et le sommet B de la tour étant situés sur le cercle de centre O et de rayon R=OA=OB, on a :

$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{R} \simeq \frac{h}{d}$ car $h \ll d$ $\qquad \alpha = \frac{30}{1000} \Longrightarrow$ $\boxed{\alpha = 0{,}03\ rad}$

L'image A_1B_1 de la tour AB éloignée fournie par L_1 est dans le plan focal image de L_1.

Cette image A_1B_1 est agrandie par L_2 qui en donne une image définitive A'B'.



$tg\ \alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_1} \Longrightarrow A_1B_1 = f'_1.tg\alpha \simeq f'_1.\alpha$

Le grandissement transversal de L_2 est :

$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{O_2F'}}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{D-e}{f'_1-e}$

Donc $\overline{A'B'} = \left(\frac{D-e}{f'_1-e}\right)\overline{A_1B_1} \Longrightarrow A'B' = \left|\frac{D-e}{f'_1-e}\right|.\left|\overline{A_1B_1}\right| = \left(\frac{D-e}{f'_1-e}\right).A_1B_1$

Par conséquent $\boxed{A'B' = \left(\frac{D-e}{f'_1-e}\right)f'_1.\alpha}$ $(1pts)$ $A'B' = \left(\frac{19-7}{10-7}\right)10 \times 0{,}03 \Longrightarrow \boxed{A'B' = 12\ cm}$ $(0.5pts)$

b) calcul de la distance focal f'' de la lentille mince

$$A'B' = f''.\alpha \Longrightarrow \boxed{f'' = \frac{A'B'}{\alpha} = \left(\frac{D-e}{f'_1-e}\right)f_1'}$$

A.N. : $f'' = \frac{12}{0{,}03}$ $\boxed{f'' = 40cm = 400mm}$ $(0.5\ pts)$

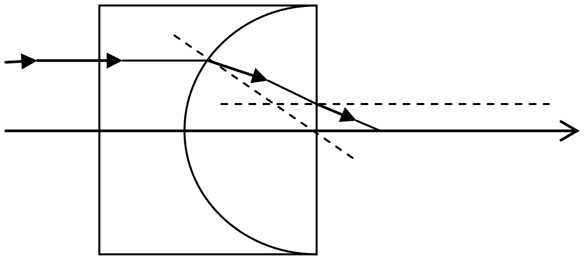
Ce résultat est en accord avec celui obtenu en 3)a)

Exercice 1 : Association de dioptres

$n_3 > n_2 > n_1$

1)

a.

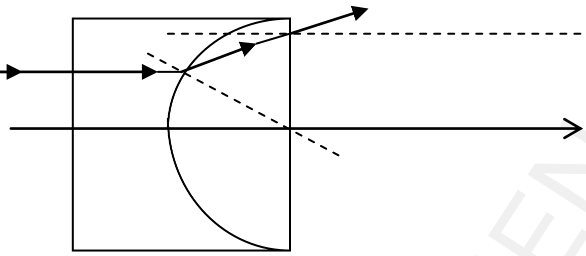


tracé /1pt

Justification /0.5pt

$n_2 > n_3 > n_1$

b.



tracé

Justification

/1pt

2) $n_1 \xrightarrow{D_1} n_2 \xrightarrow{D_2} n_3 \xrightarrow{D_3} n_1$

$$A \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A'$$

$D_1 : \overline{S_1A_1} = \frac{n_2}{n_1}\overline{S_1A}$ (0.5pt) ; $D_2 = \frac{n_3}{\overline{S_2A_2}} - \frac{n_2}{\overline{S_2A_1}} = \frac{n_3-n_2}{\overline{S_2C_2}} = \frac{n_3-n_2}{R}$ (0.5 pt)

$$D_3 = \overline{S_3A'} = \frac{n_1}{n_3}\overline{S_3A_2}\ (0.5\ pts)$$

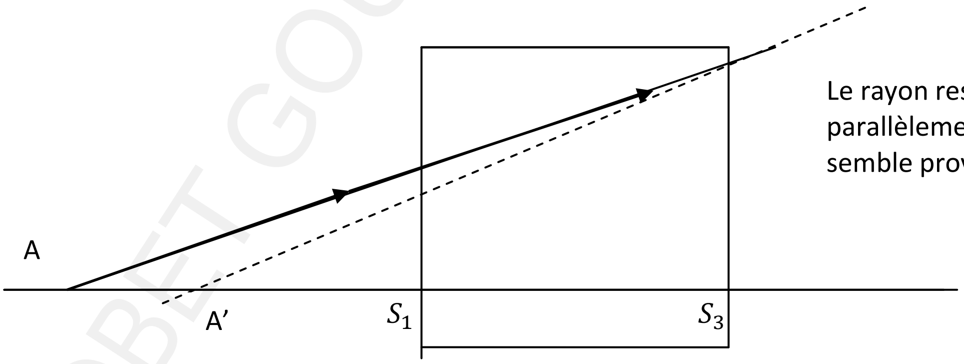
3) $\overline{S_3A'} = \frac{n_1}{n_3}[\overline{S_3S_2} + \overline{S_2A_2}] = \frac{n_1}{n_3}\overline{S_3S_2} + n_1\left[\frac{n_2-n_3}{\overline{S_3S_2}} + \frac{n_1n_2}{n_1\overline{S_2S_1}+n_3\overline{S_1A}}\right]$ $(1\ pts)$

4) $n_3 = n_2 = n$, $n_1 =$ $\overline{S_1S_3} = e \Longrightarrow \overline{S_3A'} = \overline{S_1A} - \frac{n}{e}$ $(0.5\ pts)$

5) $\overline{AA'} = \overline{AS_1} + \overline{S_1S_3} + \overline{S_3A'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ $(1\ pts)$

6) $n = \frac{4}{3}$ $e = 4\ cm$ $\Longrightarrow \overline{AA'} = 1\ cm$ $(0.5\ pts)$

Le dioptre sphérique n'existe plus car $n_2 = n_3$ $\Longrightarrow$ lame à faces parallèles.



Le rayon ressort parallèlement et semble provenir de A'

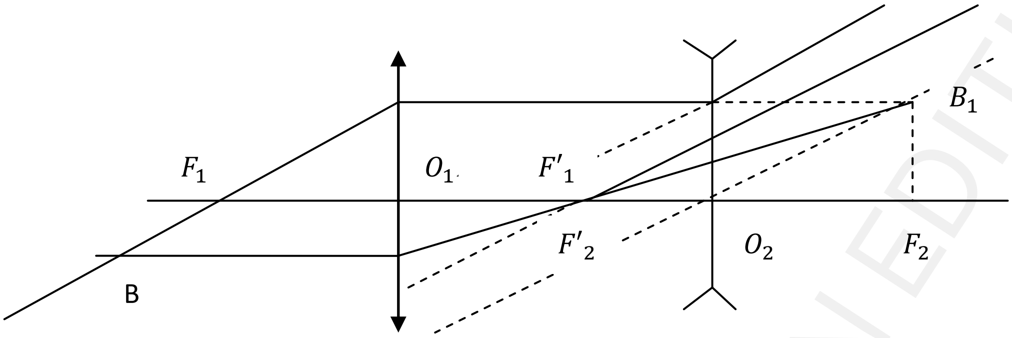
Exercice 2 : Doublet de Lentille

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

1 a- $A'B'$ converge vers l'infini (0.5 pts)

$\Longrightarrow A_1B_1$ dans le plan focal objet de $L_2 \Longrightarrow A_2 \equiv F_2$ (0.5 pts)

1 b-



Foyers (1 pts)

Construction (1pts)

Explications (1 pts)

1 c-

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A' \qquad A \xrightarrow{L_1} F_1 \xrightarrow{L_2} \infty$$

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} \ (1\ pts) \qquad \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A}} - \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{9+6} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{15}$$

$$\Longrightarrow \overline{O_1A} = -3{,}7\ cm\ (0.5\ pts)$$

2 a-

$\boxed{\alpha = AB/D_{NM}}$ (0.5 pts)

2 b- $\boxed{\alpha = A_1B_1/O_2F_2}$ (0.5 pts)

2 c- $|G| = \frac{\alpha\prime}{\alpha} = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{D_{NM}}{f_2} = \gamma_1 . \frac{D_{NM}}{f_2}$ (0.5 pts)

$$|\gamma_1| = \frac{O_1F_2}{O_1A} = 15 \times \frac{4}{15} = 4 \quad (0.5\ pts)$$

$$G = 4 \times \frac{20}{6} = 13{,}3 \quad (0.5\ pts)$$

CORRECTION DE L'EXAMEN DE SUITES ET FONCTIONS DERIVABLE L1 session 1

Exercice 1 ($6points$)

1.
⊙ (u_n) est bornée s'il existe $m, n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$ **(0,5 pts)**
⊙ (u_n) est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\ (0.5pts)$
2.Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. On pose $A_n = \{u_p | p > n\}$
$a)$
⊙ La suite est bornée.En effet :
$-1 \leq (-1)^n \leq 1\ et\ 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ de sorte que $-1 \leq u_n \leq 2$**(0,5 pts)**
⊙ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas car somme de deux suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **(0,5 pts)** dont l'une est convergence $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et l'autre divergente $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
$b)$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ etant bornée, l'ensemble (A_n) est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$**(1 pts)**
Donc $s_n = \sup A_n\ et\ i_n = \inf A_n$ existent
c)Monotonie de des deux suites.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$A_n = \{u_p | p > n\}$ et $A_{n+1} = \{u_p | p > n+1\}$
on a :$A_{n+1} \subset A_n$ de sorte que $s_{n+1} = \sup A_{n+1} \leq s_n = \sup A_n$ et $i_{n+1} = \inf A_{n+1} \geq i_n = \inf A_n$**(1 pts)**
Par conséquent (s_n) est décroissante et (i_n) est croissante
d)Puisque $-1 \leq u_n \leq 2\ \forall n$ alors on a : $-1 \leq i_n \leq s_n \leq 2\ \forall n$
d'où (s_n) est décroissante et minorée donc converge. **(0,5 pts)**
(i_n) est croissante et majorée donc converge. **(0,5 pts)**
Notons pour $p > n$,$u_p = (-1)^p + \frac{1}{p}$ or $(-1)^p = -1$ si est p impair et $(-1)^p = 1$ si est p pair
Donc $s_n = \sup\{u_{2p} | 2p > n\}$ or $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ est une suite décroissante qui tend vers vers 1
d'où $s_n = 1 + \frac{1}{2[n]}$
$1 + \frac{1}{2n} \leq s_n \leq 1 + \frac{1}{n}$**(0,5 pts)** Par conséquent $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1}$
$i_n = \inf\{u_{2p+1} | 2p+1 > n\}$ or $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1} \to -1$ donc $i_n = -1$ **(0,5 pts)** et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} i_n = -1}$

Exercice 2 ($6points$)

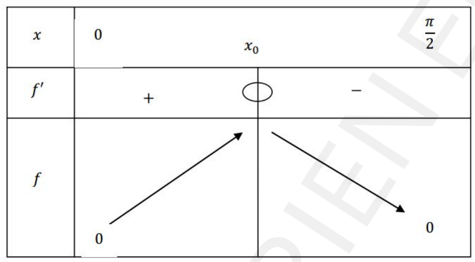
1.**Théorème de Rolle** :Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$ **(1 pts)**

2.$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
a) En quant que $\cos x - \frac{2}{\pi} = f'(x)$ et f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $f(0) = 0$ et $f(-\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$
Le Théorème de Rolle permet de conclure qu'il existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$ i.e $\boxed{\cos c = \frac{2}{\pi}}$

(1,5 pts)

b) $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$
f' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = -\sin x$ or $\sin x > 0 \, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $f''(x) < 0 \Longrightarrow f'$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(1,5 pts)**
c) f' etant strictement croissante,l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
(2 pts) pour le tableau de variation (voir figure 1 ci-dessous)
Donc $f(x) \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Figure 1 – **Tableau de variation**



Exercice 3 ($4points$)

On considère la formation f definie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = \frac{x^4}{1+x^2+x^4}$
1. La fonction f en une fonction rationnelle qui ne s'annulle pas donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après le Théorème de Taylor elle admet un developpement limité d'ordre 10 en 0 **(1 pts)** et on a :
Division suivant les puissances croissantes on a :
(2 pts) pour la division

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & 1 + x^2 + x^4 \\
-x^4 + x^6 + x^8 & ---------------- \\
----- & \boxed{\mathrm{x}^4 - x^6 + x^{10}} \\
-x^6 - x^8 & \\
x^6 + x^8 + x^{10} & \\
----- & \\
x^{10} & \\
-x^{10} - x^{12} - x^{14} & \\
----- & \\
-x^{12} - x^{14} &
\end{array}$$

Donc $\boxed{f(x) = x^4 - x^6 + x^{10} + x^{10}(-x^2 - x^4)}$
On pose $\varepsilon(x) = -x^2 - x^4$ et $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$

2.D'après le théorème de Taylor le coefficient de x^{10} est $\frac{f^{(10)}(0)}{10!}$ Donc $\boxed{f^{(10)}(0) = 10!}$ **(1 pts)**
Exercice 4 ($4points$)

1.Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$
$DL_4(0)$ de $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$
De sorte que $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + x^4\varepsilon(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ **(1,5 pts)**
D'où $\frac{1}{\sin^2 x} \sim \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x^4} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2}\right) \sim_0 \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)$
Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ **(1 pts)**
2.Calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1$ **(0,5 pts)**
$DL_6(+\infty)$ de $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x(1-\frac{1}{x})} = 1 + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)}$ **(1 pts)**

UFHB
Année académique $2014-2015$
UFR-MI
Licence 1

Corrigé de l'Examen de Structures Algébriques
(*Première session*)

<u>Exercice 1</u> : (12-points) Soient $(G,*)$ et $(F,\bullet)$ deux groupes, d'éléments neutres respectifs e et s, et

$$f : G \longrightarrow F \text{ un homomorphisme de groupes.}$$

1. f est un homomorphisme de groupes signifie que $\forall (x,y)\in G^2$, on a $f(x*y) = f(x)\bullet f(y)$.
2. Dans le groupe F l'équation

$$z\cdot z = z \Longleftrightarrow z^{-1}\cdot(z\cdot z) = z^{-1}\cdot z \Longleftrightarrow (z^{-1}\cdot)z\cdot z = s \Longleftrightarrow z = s$$

ainsi s est l'unique solution de (I).
3. Montrons que $f(e)$ vérifie l'équation (I). On a $f(e)\cdot f(e) = f(e*e) = f(e)$. $f(e)$ vérifie bien le (I), donc $f(e) = s$.
4. Dans le groupe G deux éléments x et y sont **symétriques** l'un de l'autre signifie que

$$x\cdot y = e = y\cdot x$$

En appliquant à chaque terme de ces égalités l'homomorphisme f, on obtient

$$f(x)\cdot f(y) = f(e) = f(y)\cdot f(x)$$

ces nouvelles égalités montrent précisement que

$f(x)$ et $f(x)$ sont **symétriques** l'un de l'autre, c'est à dire

$$f(x)^{-1} = f(y)$$

5. On rappelle que

$$Ker(f) = \{x\in G : f(x) = s\} \textbf{ et } Im(f) = \{f(x), x\in G\}$$

$Ker(f)$ est un sous-groupe de G.
– On a $f(e) = s$, donc $e\in Ker(f)$
– Soient x et y deux l'éléments de $Ker(f)$. On a $f(x*y) = f(x)\cdot f(y) = s\cdot s = s$, donc $x*y\in Ker(f)$
– Soit $z\in Ker(f)$. On a $f(z^{-1})\cdot f(z) = f(z^{-1}*z) = f(e) = s$. Il suit que

$$f(z^{-1})\cdot s = s \textbf{ et } f(z^{-1}) = s$$

donc $z^{-1}\in Ker(f)$.

$Im(f)$ est un sous-groupe de F.
- On a $s = f(e)$, donc $s \in Im(f)$
- Soient $f(x)$ et $f(y)$ deux l'éléments de $Im(f)$. On a par l'homomorphisme : $f(x) \cdot f(y) = f(x * y) \in Im(f)$,
- Soit $f(z) \in Im(f)$. On a par la question 4) : $f(z)^{-1} = f(z^{-1})$. Il suit que donc $f(z)^{-1} \in Im(f)$.

6. Montrer que l'homomorphisme

$$f \text{ est } \textbf{injectif} \text{ si et seulement si } Ker(f) = \{e\}.$$

- Supposons f injectif.
  Soit $x \in Ker(f)$. On a $f(x) = s = f(e)$, donc $f(x) = f(e)$. Il suit que $x = e$ car f est injective. On voit donc que $Ker(f) = \{e\}$.
- Supposons que $Ker(f) = \{e\}$. Soient $(x, y) \in G^2$ tel que $f(x) = f(y)$. $f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x)^{-1} \cdot f(x) = f(x)^{-1} \cdot f(y) \Longleftrightarrow s = f(x^{-1} * y)$.
  Il apparaît clairement que $x^{-1} * y \in Ker(f)$. Mais $Ker(f) = \{e\}$, donc $x^{-1} * y = e$, et $x = y$.

Exercice 2 : (8-points)

1. les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ sont :

(I)-

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

(II)-

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2. Soit $K = \mathcal{U}(\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})$ le groupe multiplicatif de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$.
   - On a $K = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}\}$
   - Le cardinal de K est 6.
   - Les sous-groupes de K
     - $\{\dot{1}\}$ est le sous-groupe à 1 élément.
     - $\{\dot{1}, \dot{6}\}$ est l'unique sous-groupe à 2 éléments.
     - $\{\dot{1}, \dot{2}, \dot{4}\}$ est l'unique sous-grope à 3 éléments.
     - et K lui-même.
3. Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^4 + 4x^2 - 3 \in 7\mathbb{Z}$ est équivalente à

$$\dot{x}^4 + \dot{4}\dot{x}^2 - \dot{3} = \dot{0} \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}.$$

On a $\dot{x}^4 + \dot{4}\dot{x}^2 - \dot{3} = \dot{0} \Longleftrightarrow \dot{x}^4 + \dot{4}\dot{x}^2 + \dot{4} = \dot{0} \Longleftrightarrow (\dot{x}^2 + \dot{2})^2 = \dot{0}$.

Comme $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ est un corps, $(\dot{x}^2 + \dot{2})^2 = \dot{0} \Longleftrightarrow \dot{x}^2 + \dot{2} = \dot{0}$

D'après la table de multiplication de $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$, la dernière équation n'a pas de solution.

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ELEMENTS DE LOGIQUE L1 session 1

Exercice 1 :

1.**Faux** car tout élément de A est élément de E revient à dire qu'il peut exister un élément de E qui n'est pas dans A autrement dit un élément de E n'admet pas nécessairement la propriété $\mathcal{P}$
2.l'assertion est **Vraie**
En effet si $x \in E$,alors l'élément du singleton $\{x\}$ a la propriété $\mathcal{Q}$ car $\{x\}$ sous ensemble fini de E signifie que x possède la propriété $\mathcal{Q}$
3.l'assertion est **Vraie** En particulier $\{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ n'est pas un ensemble car $0 \in \mathbb{R}, 0 \in \mathbb{Z}$

Exercice 2 :

on pose $\forall n \in \mathbb{N}, J_n =]n, +\infty[$

$\oplus$on a :$\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} J_n =]0, +\infty[\cup]1, +\infty[\cup \cdots \cup]n, +\infty[$ or $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} J_n \subset]0, +\infty[$
alors $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} J_n =]0, +\infty[$
$\oplus$ on a :$\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} J_n =]0, +\infty[\cap]1, +\infty[\cap \cdots \cap]n, +\infty[$ or $]n+1, +\infty[\subset]n, +\infty[$
alors $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} J_n = \varnothing$ car il n'y pas il n'y pas de nombre réel supérieur à tous les entiers naturels.

Exercice 3 :

$D = \{\clubsuit, \bigcirc, \square, \triangle, 11\}$
2.Etude de $\mathcal{R}$
$*$**Réflexivité**
Tous les éléments de D sont en rélation avec eux même ;donc $\mathcal{R}$ est réflexive
$*$**symétrie**
on a :$\triangle \mathcal{R} 11$ mais $11 \not\mathcal{R} \triangle$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique
$*$**antisymétrie**
$\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $(\forall x, y \in D,$ si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$ est vérifiée
La première condition n'étant pas vérifié pour $x \neq y$ alors on conclut que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
$*$**transitivité**
$\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $(\forall x, y, z \in D,$ si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$ est vérifiée
La première condition n'étant pas vérifié pour x, y, z éléments distincts de D alors on conclut que $\mathcal{R}$ est transitive.
En conclusion $\mathcal{R}$ est **une rélation d'ordre**

3.
Un élément maximal u de D est tel qu'aucun élément de D ne soit au dessus de lui.
$(\forall x \in D, u\mathcal{R}x \Longrightarrow x \notin D)$
Un élément maximal de D est :11
Un élément minimal v de D est tel qu'aucun élément de D ne soit en dessous de lui.
$(\forall y \in D, y\mathcal{R}v \Longrightarrow y \notin D)$
Un élément minimal de D est :$\triangle$

Exercice 4 :

On considère $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$
le nombre d'application est $card(B)^{card(A)} = 2^4 = 16$
Déterminons le nombre de toutes les applications surjectives de A dans B
Notons $S(n, p)$ le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments
$S(n, 0) = 0, S(n, 1) = 1, S(p, p) = p!$ et $S(n, p) = 0$ si $n < p$

Calculons $S(n, 2)$ pour $n > 2$
Pour une application surjective $f : A \to B$, posons :

$$A_0 = f^{-1}(\{0\}) \text{ et } A_1 = f^{-1}(\{1\}).$$

A_0 et A_1 forment **une partition** de A en deux sous-ensemble **non vides**
Nous notons qu'inversement à une telle partition correspond une application surjective et **une seule** de A dans B.
On a donc :

$$S(n, 2) = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n}$$

et

$$S(4, 2) = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 = 4 + 6 + 4 = 14$$

Exercice à faire pour votre entraînement :
Justifier la formule de récurrence $S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$

CORRECTION DE l'EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL SESSION 1 L1

EXERCICE 1 (10 points)

1)Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\odot$ Pour M_1 utilisons les opérations sur les lignes sur la matrice augmentée $(M_1|I_2)$

$$(M_1|I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 4 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{-2}L_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_2|M_1^{-1})$$

Donc l'inverse de M_1 est $M_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\odot$ Pour M_1 utilisons la méthodes des cofacteurs
$M_1^{-1} = \frac{1}{\det(M_1)} {}^t com(M_1) = \frac{1}{\det(M_1)} com({}^t M_1)$
$com(M) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ${}^t com(M) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{M_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

$\odot$ Pour M_2 utilisons la méthodes des cofacteurs

On a : $\det(M_2) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -2 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \det(M_2) &= (2 \times 3 \times (-3) + 5 \times 4 \times 5 + 7 \times 6 \times (-2)) - (5 \times 3 \times 7 + (-2) \times 4 \times 2 + (-3) \times 6 \times 5) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$M_2^{-1} = \frac{1}{\det(M_2)} {}^t com(M_2) = \frac{1}{\det(M_2)} com({}^t M_2)$$

$com(M_2) = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$ ${}^t com(M) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}}$

2)Demontrons que $(I-M)$ est inversible d'inverse $(I-M)^{-1} = I + M + M^2 + \cdots + M^{r-1}$

$$\text{On a : } (I-M)(I-M)^{-1} = (I-M)(I + M + M^2 + \cdots + M^{r-1})$$
$$= I + M + M^2 + \cdots + M^{r-1} - (M + M^2 + \cdots + M^{r-1} + M^r) = I$$
$$\text{et } (I-M)^{-1}(I-M) = (I + M + M^2 + \cdots + M^{r-1})(I-M)$$
$$= I + M + M^2 + \cdots + M^{r-1} - (I + M + M^2 + \cdots + M^{r-1})M = I$$

Alors $(I-M)(I-M)^{-1} = (I-M)^{-1}(I-M)$ d'où la demonstration

3)Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ calcul de A^n

$A = 3I + M$ avec $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On a :$M^3 = 0$

$A^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} (3I)^{m-k} M^k$ formule du binôme de Newton

$A^m = C_m^0(3I)^{m-0}M^0 + C_m^1(3I)^{m-1}M^1 + C_m^1(3I)^{m-2}M^2 + \underbrace{C_m^3(3I)^{m-3}M^3 + C_m^4(3I)^{m-4}M^4 + \cdots + C_m^m(3I)^{m}}_{0}$

Alors $\boxed{A^m = 27I + 27M + 9M^2}$

EXERCICE 2 (10 points)

Soient a, b, c, m des réels, et $(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz & = a \\ x + my + z & = b \\ x + y + mz & = c \end{cases}$

1. La matrice du système est : $\overline{A} = \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{pmatrix}$

2.Déterminons les solutions de (S_m) suivant les valeurs de m, a, b, c

échelonnons $\overline{A}$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{pmatrix} \approxeq \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 0 & m - m^2 & 0 & a - mb \\ 0 & 0 & m - m^2 & a - mc \end{pmatrix} \approxeq \begin{pmatrix} m & m & m & a \\ 0 & m(1-m) & 0 & a - mb \\ 0 & 0 & m(1-m) & a - mc \end{pmatrix} = \overline{A}$$

$\overline{A} \approxeq \overline{A}\,'$

Discusion :

$\odot$ Si $m = 0, \overline{A}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \varnothing = \{\}}$

Si $a = 0$ On a :$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = b - z \\ y = c - x \end{cases} \Longrightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{(b - z, c - b + z, z), b, c, z \in \mathbb{R}\}}$

$\odot$ Si $m = 1, \overline{A}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & a - c \end{pmatrix}$

On a :$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

Si $a = b = c \Leftrightarrow x + y + z = a \Longrightarrow x = a - y - z$ et y, z quelconque.

Donc $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{(a - y - z, y, z), a, y, z \in \mathbb{R}\}}$

Si a, b, c ont des valeurs différentes alors $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \varnothing = \{\}}$

$\odot$ Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{1, 0\} \Longrightarrow det(A) = m^3(1 - m)^2 \neq 0$ avec $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 0 & m(1 - m) & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - m) \end{pmatrix}$

On obtient **un système de Cramer** qui n'est rien d'autre que celui du depart $(S_m) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} mx + my + mz & = a \\ x + my + z & = b \\ x + y + mz & = c \end{cases}$

Donc $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{\left(\frac{m(-a+b+c)-a}{m(1-m)}, \frac{a-mb}{m(1-m)}, \frac{a-mc}{m(1-m)}\right), a, b, c \in \mathbb{R}\}}$

Eléments de correction

EXAMEN ALGORITHMIQUE et PROGRAMMATION PASCAL

Questions de cours

Un **algorithme** est une description d'une succession d'actions à exécuter en vue de résoudre **un problème donné.** Cette description est faite en utilisant un langage appelé **algorithmique**.
Dans le cas où on veut confier à un ordinateur la résolution effective du problème, on lui fournit non pas **l'algorithme** mais celui-ci traduit (programmé) utilisant **un langage (de programmation)** qu'il comprend. On lui fournit **un code** correspondant à l'algorithme. **Faire de la programmation** c'est donc choisir un langage et traduire un algorithme avec ce langage pour obtenir **un code**.

Un langage est tout ce qui permet de s'exprimer, de communiquer. L'homme communique avec un ordinateur à l'aide de langages de programmation.

Exemples de langages de programmation : Pascal – C – C++ – Python – Fortran – Java etc..

ALGOS | **TRADUCTION EN PASCAL**

Exercice 1 : Calcul de n !

```
Algo 1
Variable : i, fact, n : ENTIER
DEBUT
        AFFICHER(" Donner n≥0")
        LIRE (n)
        TANTQUE ( n<0 ) FAIRE
          AFFICHER(" Redonner n≥0")
          LIRE (n)
        FINTQUE
        fact ← 1
        POUR i ← 2 A n
          fact ← fact*i
        FINPOUR
        AFFICHER (n, " !=", fact )
FIN.
```

```
program exo1 ;
var i, fact, n : integer ;
begin
writeln(' Donner n≥0') ;
readln(n) ;
while ( n<0 ) do
        begin
                writeln('Redonner n≥0') ;
                readln(n) ;
        end ;
fact :=1 ;
for i :=2 to n do fact :=fact*i ;
writeln(n, '!=', fact ) ;
end.
```

Exercice 2

```
Algo 2
Variable : i, n : ENTIER
          ps : REEL
          U, V : TABLEAU[1 :100] DE REEL
DEBUT
        AFFICHER(" Donner 0<n≤100")
        LIRE (n)
        TANTQUE ( n≤0 OU n>100 ) FAIRE
          AFFICHER(" Redonner 0<n≤100")
          LIRE (n)
        FINTQUE
        ps ← 0
        POUR i ← 1 A n
          AFFICHER ("Donner U(",i,") :")
          LIRE U[i]
          AFFICHER ("Donner V(",i,") :")
          LIRE V[i]
          ps ← ps+U[i]*V[i]
        FINPOUR
        AFFICHER ("produit scalaire=", ps )
FIN.
```

```
program exo2 ;
var i, n :integer ;
ps :real ;
u,v :array[1 ..100] of real ;
begin
  writeln('Donner n, 0<n<=100') ;
  readln(n) ;
  while (n<=0) or (n>100) do begin
    writeln('redonner n, 0<n<=100') ;
    readln(n) ;
  end ;
  ps :=0 ;
  for i :=1 to n do begin
    writeln('donner U(',i,') :') ;
    readln(u[i]) ;
    writeln('donner V(',i,') :') ;
    readln(v[i]) ;
    ps :=ps+u[i]*v[i]
  end ;
  writeln('produit scalaire=',ps) ;
end.
```

Exercice 3

```
Algo 3
CONSTANTE N=100
Variable : i, nsup: ENTIER
     s, m : REEL
     note : TABLEAU[1 :N] DE REEL
DEBUT
    s ← 0
    POUR i ← 1 A N
      AFFICHER(" Donner note[",i,"]")
      LIRE (note[i])
      s ← s+note[i]
    FINPOUR
    m ← s/N
    nsup ← 0
    POUR i← 1  A N FAIRE
      SI (note[i] > m ) ALORS nsup ← nsup+1
      FSI
    FINPOUR
    AFFICHER (" la moyenne est :", m)
    AFFICHER("Et il y en a ",nsup,
    "qui sont au-dessus de la moyenne ")
FIN.
```

```
program exo3 ;
  const N=100 ;
  var i,nsup :integer ;
      s,m :real ;
  note :array[1..N] of real ;
begin
  s :=0 ;
  for i :=1 to N do begin
    writeln('donner note(',i,') :') ;
    readln(note[i]) ;
    s :=s+note[i] ;
  end ;
  m :=s/N ;
  nsup :=0 ;
  for i :=1 to N do if (note[i]>m) then
nsup :=nsup+1 ;
  writeln('la moyenne est :',m) ;
  writeln('et il y en a ',nsup,' au-dessus de la
moyenne ') ;
end.
```

Exercice 4

```
Algo 4
Variable : mat1, mat2, mat3, moy : REEL
DEBUT
    AFFICHER ("Donner la note de mat1")
    LIRE(mat1)
    AFFICHER ("Donner la note de mat2")
    LIRE(mat2)
    AFFICHER ("Donner la note de mat3")
    LIRE(mat3)
    SI( mat1≥9 ET mat2≥9 ET mat3≥9 ) ALORS  AFFICHER(" Admis")
        SINON
            DEBUT
            moy ← (mat1+mat2+mat3)/3
            SI (moy ≥ 10) ET ( mat1≥8 ET mat2≥8 ET mat3≥8 ) ALORS
                                    AFFICHER("Admis")
                                    SINON
                                    AFFICHER (" RECALE")
            FSI
    FSI
FIN.
```

En Pascal

```
program exo4 ;
var mat1, mat2, mat3, moy : real ;
begin
writeln('donner la note 1') ; readln(mat1) ;
writeln('donner la note 2') ; readln(mat2) ;
writeln('donner la note 3') ; readln(mat3) ;
if((mat1>=9) and (mat2>=9) and (mat3>=9) then writeln('ADMIS')
      else
        begin
         moy :=(mat1+mat2+mat3)/3 ;
         If ((moy>=10) and (mat1>=8) and (mat2>=8) and (mat3>=8)) then writeln('ADMIS')
                    else writeln('REFUSE') ;
        end ;
end.
```

Correction examen Electrostatique 1ère session

1ère partie : QUESTIONS DE COURS (6 points)

I. Symétries

0,5

1. **Principe de Curie** : « *Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits* ».
Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, ces propriétés de symétries seront applicables au champ électrostatique qui résulte de ces charges.

1

2. **Symétries de la répartition de charges** : Tout plan passant par le point O centre de la sphère est un plan de symétrie de charge et tout axe passant par O est un axe de révolution.

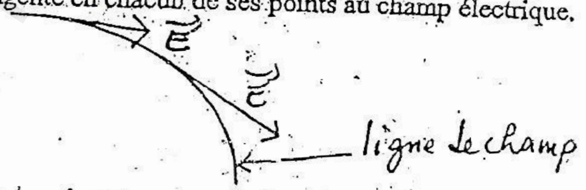
II. Champ et Potentiel

0,5

1. **Enoncé du théorème de Gauss** : Le flux du champ électrostatique $\overline{E}$ à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges intérieures à cette surface divisé par la permittivité électrique ε.
Soit $\oiint_{(S)} \overline{E}.d\overline{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ dans le vide et $\oiint_{(S)} \overline{E}.d\overline{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$ dans un milieu différent du vide.
Attention : Q_{int} est la somme des charges se trouvant à l'intérieure de la surface fermée (S) mais $\overline{E}$ est le champ total créé aussi bien par les charges intérieures à (S) que par les charges extérieures à (S).

2. La ligne de champ est la ligne tangente en chacun de ses points au champ électrique.

0,5



La ligne de champ est orientée dans le même sens que le champ électrique.
Le vecteur champ est colinéaire au vecteur déplacement élémentaire sur la ligne de champ :

1

$$\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{dl} = 0$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Équation différentielle

III. Conducteurs en équilibre

1. **Un conducteur est en équilibre électrostatique** si la vitesse d'ensemble des charges libres par rapport au réseau y est nulle en tout point. Ainsi aucune force n'agit sur ses charges libres et donc notamment pas de champ appliqué dans le conducteur.

0,5

Lorsqu'un conducteur est en équilibre électrostatique :
Son volume est un volume équipotentiel $\quad \vec{E_i} = \vec{0} \quad V_i = c^{te}$
Sa surface est équipotentielle
Sa charge est uniformément repartie sur sa surface avec une densité surfacique σ.

0,5

2. Capacité d'un conducteur : la charge portée par un conducteur isolé est proportionnelle à son potentiel. Le coefficient de proportionnalité est appelé capacité. Il dépend principalement de la géométrie du conducteur. Il s'exprime en Farads.

$$Q = CV \qquad \text{ou encore} \qquad C = \frac{Q}{V}$$

La méthode générale consiste à :

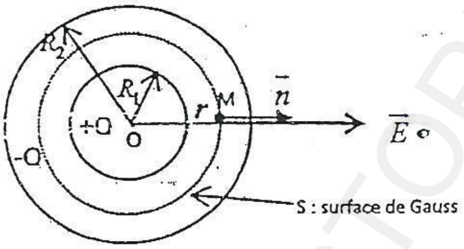
a) Calculer le champ $\overline{E}$ entre les armatures par le théorème de Gauss

b) Calculer le ddp $V_A - V_B = \int_A^B \overline{E}.\overline{dl}$

c) Poser $C = \dfrac{Q}{V_A - V_B}$

1,5

Condensateur sphérique



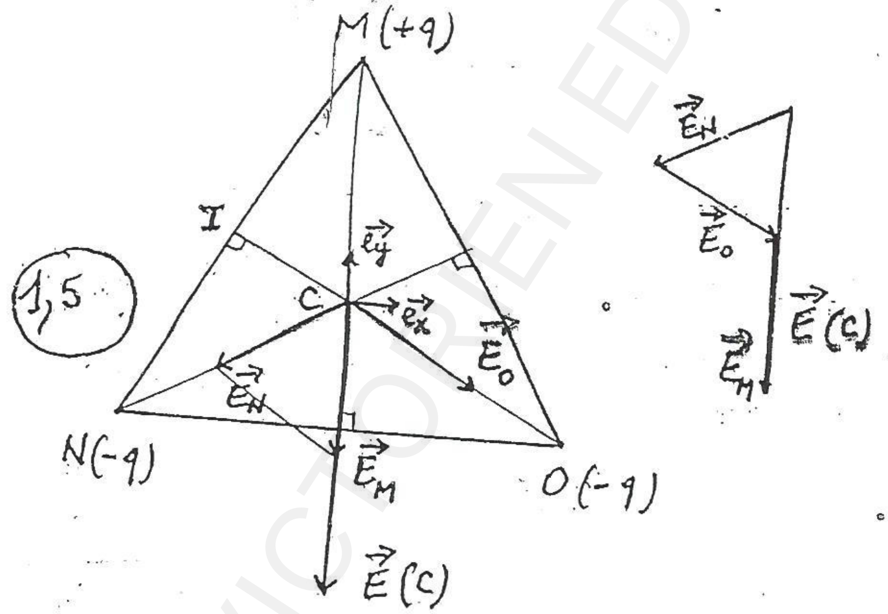
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \qquad C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

2ème partie : EXERCICES

Exercice 1 : (7,5 points)

1- Représentation



$\vec{E}(C) = \vec{E_N} + \vec{E_O} + \vec{E_M}$ (le champ électrostatique obéit au principe de superposition)

avec

$\vec{E}(C)$: le champ (résultant) au point C

$\vec{E_N}$: le champ créé par la charge (−q) placée en N.

$\vec{E_O}$: le champ créé par la charge (−q) placée en O.

$\vec{E_M}$: le champ créé par la charge (+q) placée en M.

2. Distance $r = OC$

Soit I milieu de [MN].

OI est une hauteur et une médiatrice dans le triangle MNO équilatéral

Exercice 1 (suite)

On a : $OC = MC = NC = \frac{2}{3} OI$

Soit $OC = r = \frac{2}{3}\sqrt{OM^2 - IM^2}$

$OM = a$ et $IM = \frac{a}{2}$

1 Finalement $r = OC = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}_{OI} =$

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

3- Expression et caractéristiques du champ $\vec{E}(C)$

$\vec{E}(C) = \vec{E_N} + \vec{E_O} + \vec{E_M}$ (Voir question 1).

$$\vec{E_N} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{CN^2}\cdot\frac{\vec{NC}}{NC} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{NC}$$

$$\vec{E_M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q)}{MC^2}\cdot\frac{\vec{MC}}{MC} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{MC}$$

$$\vec{E_O} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{OC^2}\cdot\frac{\vec{OC}}{OC} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{OC}$$

On a :

$$\vec{E}(C) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\vec{NC} + \vec{MC} - \vec{OC}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{X}$$

Calculons $\vec{X}$

$\vec{X} = \vec{MO} + \vec{CN}$

4

Dans le repère $(C, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ on a :

$M(0; r)$; $N\left(-\frac{a}{2}; -\frac{OI}{3}\right)$ soit $N\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$

$O\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$

Ainsi, $\vec{MO} + \vec{CN}$ $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} - 0 + \left(-\frac{a}{2}\right) - 0 \\ -\frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{6} - 0 \end{pmatrix}$

soit $\vec{X}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2a\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

$$\vec{E}(C) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)\vec{e_y}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3}\left(-\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)\vec{e_y}$$

1,5

$$= \frac{3\sqrt{3}\,q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(-\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)\vec{e_y}$$

soit $\vec{E}(C) = -\frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e_y}$

ou

$$\vec{E}(C) = -\frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e_y}.$$

Caractéristiques de $\vec{E}$

- point d'application en C
- direction : médiatrice de [NO] (passant par M)

1

- sens $-\vec{e_y}$

Exercice 1 (suite et fin)

- module : $\|\vec{E}(C)\| = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ $(V.m^{-1})$.

4. Expression du potentiel V

$$V = V_{-q} + V_q + V_{-q}$$

soit $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{-q}{r} + \dfrac{q}{r} - \dfrac{q}{r}\right]$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{r}\right)$$

1,5

donc $\boxed{V = -\dfrac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a}}$ (Volts)

Calcul de E et V (Applications numériques)

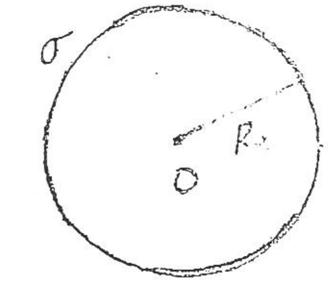
- $\|\vec{E}(C)\| = \dfrac{6(10^{-1}.10^{-9})}{(10^{-1})^2} . 9.10^9 = 54.10^{-10}.10^2.10^9$

0,5 $\|\vec{E}(C)\| = 540\ V.m^{-1}$

- $V = -\dfrac{10^{-10}\sqrt{3}}{10^{-1}} . 9.10^9 = -9\sqrt{3}$

0,5 $V = -15,59$ Volts $(\simeq -15,6$ Volts$)$

Exercice 2 (5,5 points)

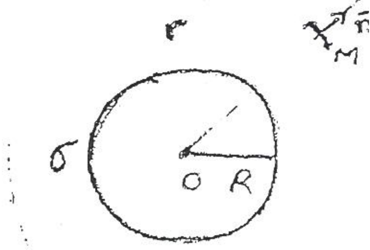


Calcul du champ $\vec{E}$

Par raison de symétrie (Cf. 1ère partie I.2) le champ $\vec{E}$ est radial ($\vec{E}(r)$)

Appliquons le théorème de Gauss comme énoncé (Cf. 1ère partie II.1).

La surface de Gauss considérée est ~~sur~~ la sphère de centre O et de rayon $r = OM$



0,5

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

soit $d\phi = E\, dS$

$$\Rightarrow \phi = ES$$

$$\phi = ES = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{avec } S = 4\pi r^2$$

donc $$E(r) = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sum Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

- Cas où $r > R$

$$\sum Q_{int} = \sigma (4\pi R^2)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma(4\pi R^2)}{\dots} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Exercice 2 (suite)

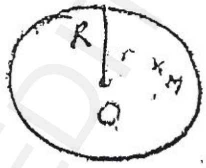
1 $$\boxed{E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

• Cas où $r < R$

$\sum Q_{int} = 0$

1 (La charge est surfacique)

$\Rightarrow E(r) = 0$



Calcul du potentiel V

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \implies E(r) = -\dfrac{dV}{dr}$

$\implies dV = -E(r)\,dr$

$\implies V = -\int E(r)\,dr$

• Cas où $r > R$

1 $$V(r) = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + cte$$

$V(\infty) = 0 = 0 + cte \implies cte = 0$

donc $$\boxed{V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}}$$

Exercice 2 (suite et fin)

- Cas où $r < R$

$$E(r) = 0 \Rightarrow V(r) = cte$$

Continuité du potentiel.

$$\lim_{\substack{r \to R \\ <}} V(r) = \lim_{\substack{r \to R \\ >}} V(r)$$

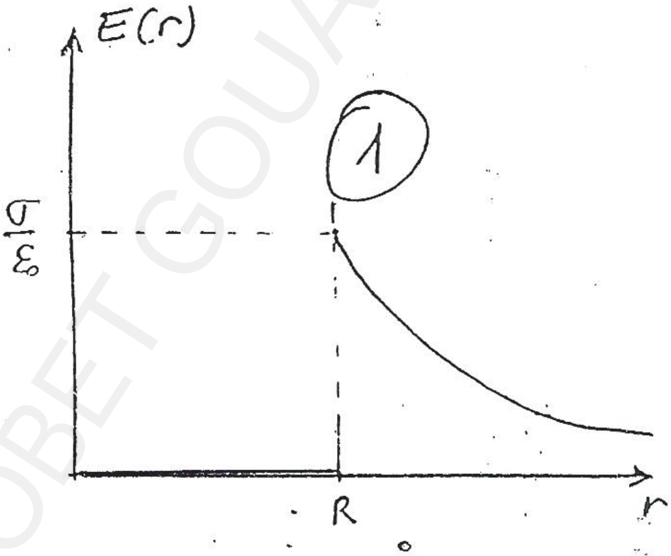
1

$$cte = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{R}$$

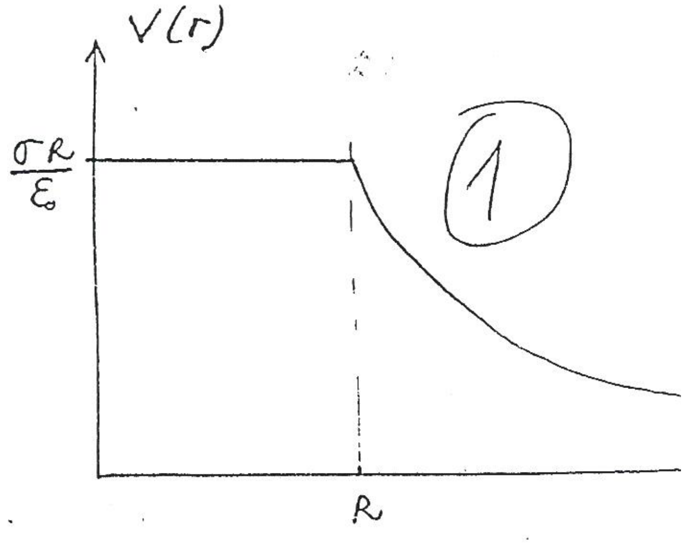
soit $cte = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

donc $\boxed{V(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}}$

Courbes $E(r)$ et $V(r)$ (allures)



Discontinuité du champ à $r = R$



Continuité du potentiel à $r = R$

Correction examen IPEI-EL Manar

A/ $\sigma > 0$

1) * $\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r)$

* $\Pi_1 = (M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$

$\Pi_2 = (M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial :

$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

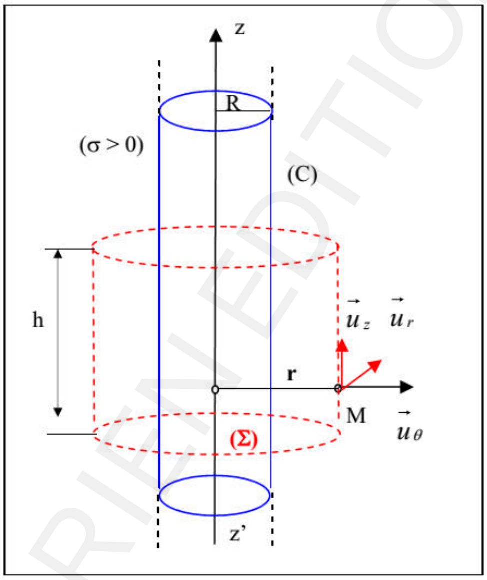


Figure 4

2) a)

* Σ cylindre de hauteur h et d'axe z'z et passant par M.

* (S) présente une symétrie cylindrique et $\vec{E}$ est radial.

b) $d\Phi = E(r)\vec{u}_r.rd\theta\, dz\,\vec{u}_r = E(r)r\,d\theta\, dz$

d'où,

$\Phi = 2\pi rhE(r)$

* $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$ car $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$

* $\vec{E}(r > R) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ car $Q_{\text{int}}(r > R) = 2\pi Rh\sigma$

3) a)

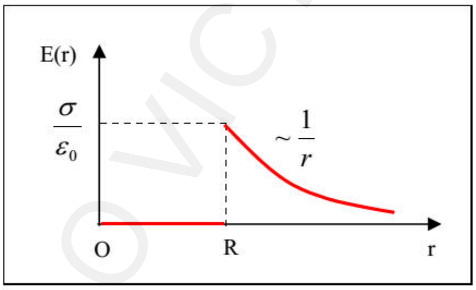


Figure 5

b) E est discontinu en r = R et la valeur de la discontinuité vaut $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

4) $V(r=0) = V_0$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$ car $\vec{E}$ est radial

$V = -\int E(r)dr$

* $V(r \le R) = cste = V_0$

$V(r \ge R) = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \dfrac{dr}{r} = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} Logr + B$

B est déterminé par continuité du potentiel en r = R :

$V_0 = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} LogR + B$

Ainsi,

$$B = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log R$$

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log \frac{R}{r} + V_0$$

5) a)

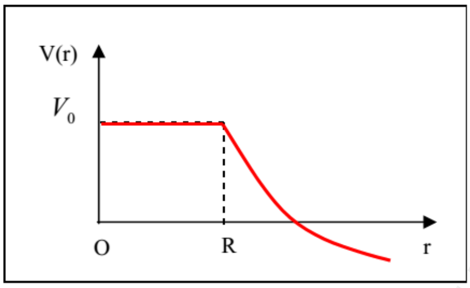


Figure 6

b) $V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = V_0$

B/ ρ > 0

6) $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

$\Phi = 2\pi r h E(r)$

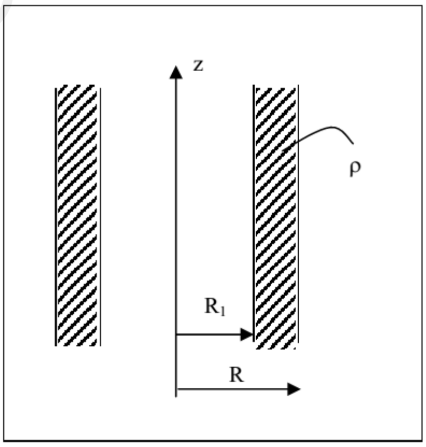


Figure 7

* $\vec{E}(r \leq R_1) = \vec{0}$ car $Q_{int}(r < R) = 0$

* $R_1 \leq r \leq R$

$$Q_{int} = \rho\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^r r dr = 2\pi h\rho \int_{R_1}^r r dr$$

$$= 2\pi h \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^r = \pi h \rho \left[r^2 - R_1^2\right]$$

$$\vec{E}(R_1 \leq r \leq R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[r^2 - R_1^2\right]\vec{u}_r$$

* $r \geq R$

$$Q_{int} = \pi h \rho \left[R^2 - R_1^2\right]$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[R^2 - R_1^2\right]\vec{u}_r$$

b) * $E(r = R_1^-) = 0$; $E(r = R_1^+) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R_1}\left[R_1^2 - R_1^2\right] = 0$

ainsi, E est continu en $r = R_1$

* $E(r = R^-) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R}\left[R^2 - R_1^2\right] = E(r = R^+)$

ainsi, E est continu en $r = R$

8) $R_1 \to R$

a) En considérant un cylindre de hauteur h, la conservation de la charge s'écrit :

$$Q = \rho\left[R^2 - R_1^2\right]\pi h = \sigma 2\pi R h$$

D'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{2R}\left[R^2 - R_1^2\right]$$

b)

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[R^2 - R_1^2\right]\vec{u}_r = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

On retrouve le résultat de 2-b).

9) $R_1 = 0$ et $R << l$

$$Q = \rho R^2\ \pi h = \lambda h$$

$$\lambda = \rho\,\pi R^2$$

b) $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

c) $\Phi = 2\pi r h E(r) = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

On retrouve 9 b)

d) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$ car $\vec{E}$ est radial

$$V = -\int E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Logr + K$$

C/ $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{u}_x$

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ avec r >> a (approximation dipolaire)

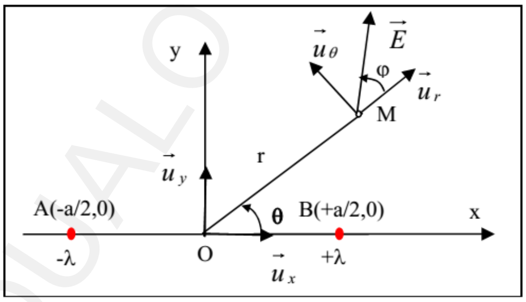


Figure 8

* Le fil passant par B de densité + λ crée le potentiel :

$$V_{+\lambda}(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log\left\|\overrightarrow{BM}\right\| + K$$

* Le fil passant par A de densité - λ crée le potentiel :

$$V_{-\lambda}(M) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log\left\|\overrightarrow{AM}\right\| + K$$

11) $V(O) = 0$

Le principe de superposition s'écrit :

$$V(M) = V_{-\lambda}(M) + V_{+\lambda}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left[\left\|\overrightarrow{AM}\right\| - \left\|\overrightarrow{BM}\right\|\right] + cste$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log \frac{AM}{BM} + cste$$

Or, en M = O, $\frac{AM}{BM} = 1$; $V(O) = cste = 0$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log \frac{AM}{BM}$$

* $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{AO}^2 + 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$

où, $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r$; $\left\|\overrightarrow{AO}\right\| = \frac{a}{2}$ et $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r\cos(\theta) = \frac{ar}{2}\cos\theta$

on a :

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = r^2 + ar\cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$$

Puisque $a/r << 1$, on a : $a^2/(4r^2) << a/r$,

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 \cong r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta)$$

D'où,

$$AM \cong r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}$$

* $\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 = r^2 + ar\cos(\pi - \theta) + \frac{a^2}{4} = r^2(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$

$$BM \cong r^2(1 - \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}$$

13) a) $V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log \frac{(1 + \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}}{(1 - \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}}$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{Log(1 + \frac{a}{r}\cos\theta) - Log(1 - \frac{a}{r}\cos\theta)\right\}$$

$$\cong \frac{\lambda 2a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

b) $\vec{p} = Q_\lambda \overrightarrow{AB} = (\lambda l)a\vec{u}_x$

$p = (\lambda l)a$

14) * $\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\lambda a\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$

* $E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

* $tg\varphi = tg\theta$

Correction examen IPEI-EL Manar 2007

I/

1) $V(M) = V(x, \cancel{y}, \cancel{z}) = V(x)$

2) * Les surfaces équipotentielles vérifient : $V(x) = cste$

Ainsi, $x = cste$ (plans parallèle à yOz)

* Le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles ; ainsi, $\vec{E}$ est porté par $\vec{u}_x$

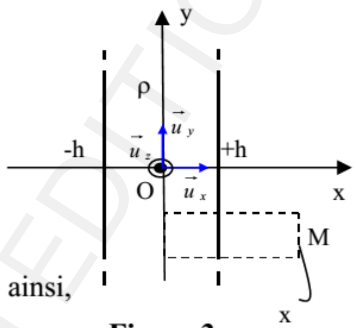


Figure 3

Les lignes de champ sont des droites parallèles à Ox.

3) * $\vec{E}(M) = \vec{E}(x)$

$\vec{E}$ est tangent aux lignes de champ ; ainsi $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$

* Puisque $\Pi = (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ psp, $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$ avec M' est le symétrique de M par rapport à Π. Ce qui implique que : $E(x) = -E(-x)$

Rq : $E(x = 0) = 0$

4) $\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Σ : cylindre de génératrices parallèle à Ox et limité par le plan $\Pi = (yOz)$ et le plan passant par M.

$\Phi = E(x) S_B$

* Si M à l'intérieur : $|x| \geq h$

- Pour $x \geq h$; $Q_{\text{int}} = \rho h S_B$

$$\vec{E}(x \geq h) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

- Pour $x \leq -h \leq 0$

$$\vec{E}(x \leq -h \leq 0) = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

* Si M à l'extérieur : $|x| \leq h$

- Pour $0 \leq x \leq h$; $Q_{\text{int}} = \rho x S_B$

$$\vec{E}(x \leq h) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

- Pour $-h \leq x \leq 0$

$$\vec{E}(-h \leq x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

Ainsi,

$$\vec{E}(|x| \geq h) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\vec{u}_x$$

$\vec{E}(|x| \leq h) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$

5) *

$dV(x) = -\vec{E}.d\vec{r} = -E(x)dx$

En échangeant x par –x, on obtient :

$dV(-x) = +E(-x)dx = -E(x)dx = dV(x)$

Ainsi, $V(x) = V(-x)$

Autrement, on observe la même configuration de charge en M et M' où M' est le symétrique de M par rapport à Π. Ce qui implique que : $V(M) = V(M')$

* Pour $x \leq h$

$$V(x) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int x\,dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} = V(-x)$$

D'où,

$$V(|x| \leq h) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$$

* Pour $x \geq h \geq 0$ (à l'extérieur)

$$V(x) = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}\int dx = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}x + cste$$

Puisque V est continu en x = h, on a :

$$-\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho h^2}{\varepsilon_0} + cste\ ;\ cste = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}$$

D'où :

$$V(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}(-x + \frac{h}{2})$$

* Pour $x \leq -h$ (en échange x en –x)

$$V(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}(x + \frac{h}{2})$$

Ainsi : $V(|x| \leq h) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$

6) *

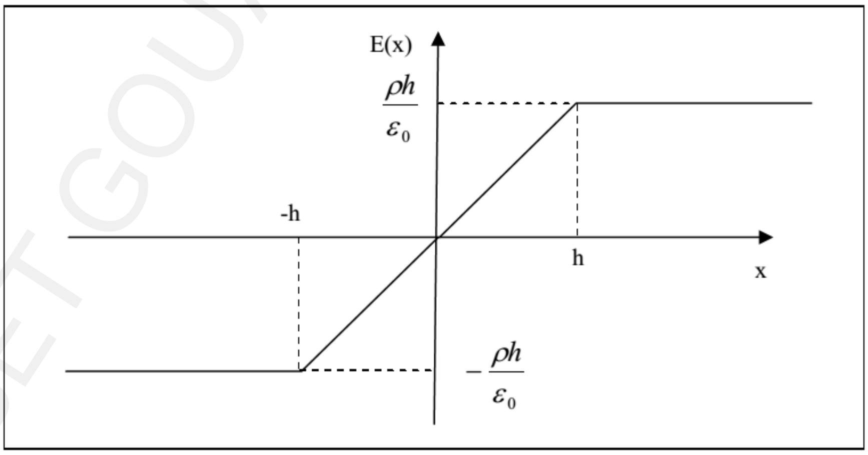


Figure 4

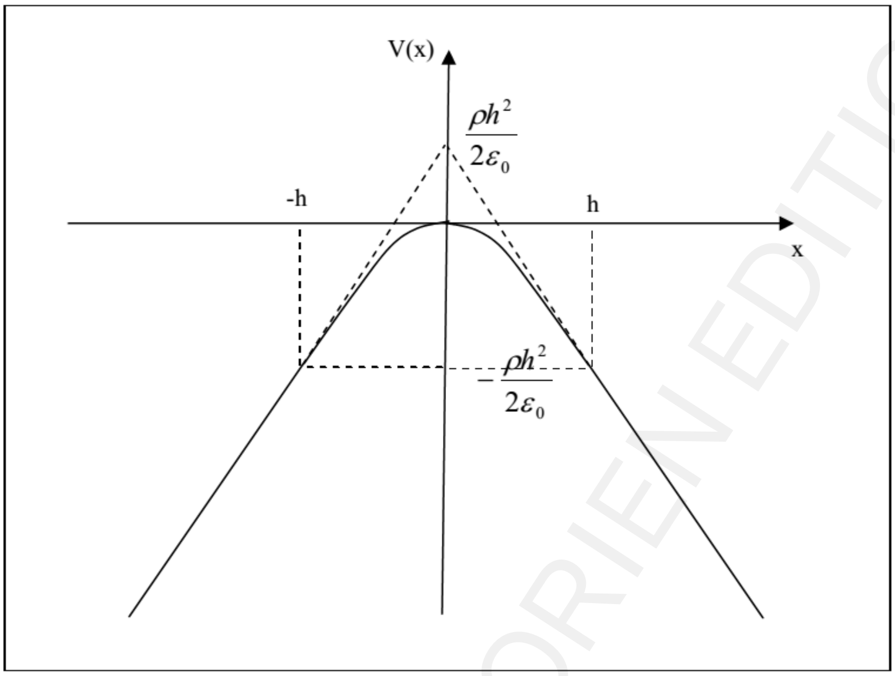


Figure 5

7) Plan chargé en surface avec une densité σ.

a) Q se conserve : $\sigma S = \rho S 2h$

$$\sigma = \rho 2h \text{ et } \rho = \frac{\sigma}{2h}$$

b)

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\vec{u}_x$$

$$V_p = V_{ext} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

c)

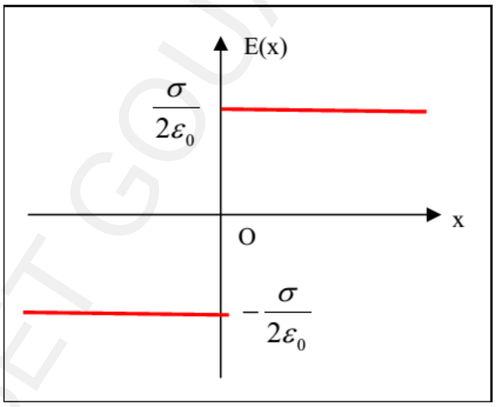


Figure 6

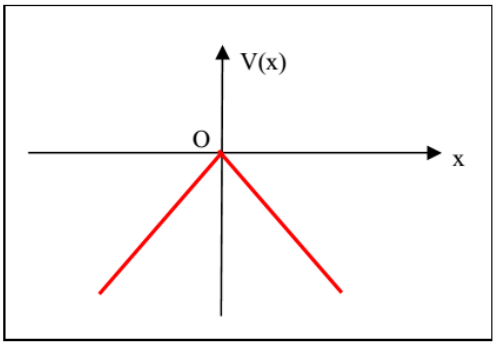


Figure 7

II/

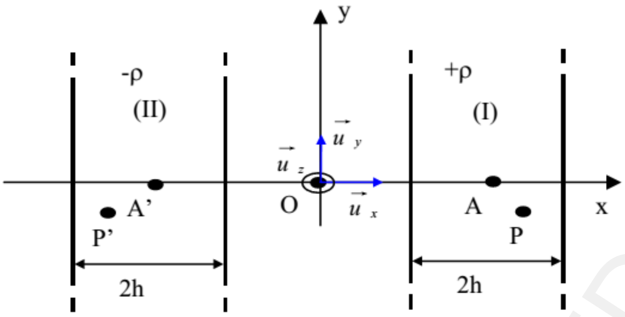


Figure 8

a) Soient P et P' deux points symétriques par rapport au plan (yOz).
$\rho(P) = -\rho(P')$

Ainsi, $\Pi' = (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ps **impair**, $\vec{E}_r(M) = \vec{E}_r(M')$ avec M' est le symétrique de M par rapport à Π'. Ce qui implique que : $E(x) = E(-x)$

2) a) et b)

cas	$\vec{E}_I(x) = \vec{E}(x-a)$	$\vec{E}_{II}(x) = -\vec{E}(x+a)$	$\vec{E}_r(x)$
$x \geq a+h$	$\dfrac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$-\dfrac{\rho h}{\varepsilon_0}$	0
$a-h \leq x \leq a+h$	$\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(x-a)$	$-\dfrac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(x-a-h)$
$0 \leq x \leq a-h$	$-\dfrac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$-\dfrac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$-\dfrac{2\rho h}{\varepsilon_0}$

c)
$E_r(x) = E_r(-x)$

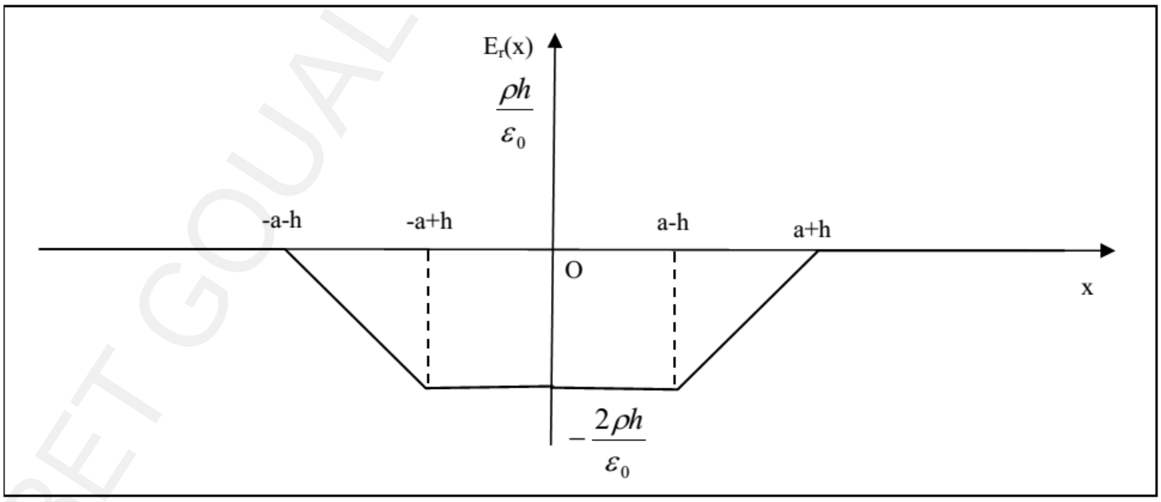


Figure 9

3) $dV_r(x) = -E_r(x)dx = -E_r(-x)dx$ ainsi ; $dV_r(-x) = E_r(x)dx = -dV_r(x)$

Solution des exercices

1 Les basiques

Exercice 24.1 *On a*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

on a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ *défininе par* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *on sait que* u_n *converge alors vers*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 24.2 *Un changement d'indice donne*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \underset{j=k-n}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{j}{n}}$$

qui est une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x) = \frac{1}{2+x}$ *sur* $[0,1]$, *ainsi*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{2+x} = \ln \frac{3}{2}$$

Remarque : $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{j}{n}}$ *est aussi une somme de Riemann de la fonction* $g(x) = \frac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $[2,3]$ *car de la forme* $\frac{3-2}{n} \sum_{j=0}^{j-1} \frac{1}{2+\frac{k(3-2)}{n}}$. *On a bien*

$$\int_2^3 \frac{dt}{t} = \ln \frac{3}{2}$$

Exercice 24.3 *On a* $u_n > 0$ *et*

$$\begin{aligned}
\ln u_n &= -2\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(n^2+k^2\right) = -2\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) \\
&= -2\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2\ln n + \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = -2\ln n + 2\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

est une somme de Riemann à pour la fonction continue $f(x) = \ln(1+x^2)$ *entre* 0 *et* 1. *Ainsi*

$$\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$$

On intègre par parties (on dérive $\ln(1+x^2)$*) pour obtenir,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2(x^2+1-1)}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\pi + \ln 2 - 2\end{aligned}$$

d'où

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$$

Exercice 24.4 *On a* $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \ln u_n = \frac{1}{n}(\ln(2n)! - \ln n! - n\ln n)$. *Or*

$$\begin{aligned}\ln(2n!) &= \sum_{k=1}^{2n} \ln k \text{ et } \ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \\ n\ln n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \ln n\end{aligned}$$

d'où

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n} \underset{j=k-n}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{n+j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(1+\frac{j}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$$

d'où

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{e}$$

Exercice 24.5 *On a* $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}$

2 Les techniques

Exercice 24.6 *On a* $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, *il ne s'agit pas d'une somme de Riemann ! En revanche, si on considère la somme*

$$\begin{aligned}v_p &= \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} \frac{\frac{2k}{p}}{1+\left(\frac{2k}{p}\right)^2} = \frac{b-a}{p}\sum_{k=0}^{p} f\left(\frac{k(b-a)}{p}\right) \text{ où} \\ b &= 2,\ a=0,\ f(t) = \frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

Alors

$$v_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln 5$$

Donc

$$u_n = v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln 5$$

Exercice 24.7 1. *On a* $x^2-2x\cos t+1 = (x-\cos t)^2+1-\cos^2 t = (x-\cos t)^2+\sin^2 t \geq 0$. *De plus* $x^2-2x\cos t+1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ \sin^2 t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ t = 0 \ \ (\pi) \end{cases}$ *ce qui est exclus par hypothèse.*
On en déduit que la fonction $\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)$ *est définie et continue sur* $[0,2\pi]$. *Ainsi* $Df = \mathbb{R}\diagdown\{-1,1\}$.

2. *On a* $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$

3. *Calculer* $f(x)$ *à l'aide de ses sommes de Riemann.*
La somme de Riemann à gauche de f *est*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right) = \left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ *d'où*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Mais $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = x^n-1$ *et* $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \overline{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)} = \overline{x^n-1} = x^n-1$ *d'où*

$$S_n = \frac{2\pi}{n}\ln\left(x^n-1\right)^2 = \frac{4\pi}{n}\ln|x^n-1|$$

Si $|x|>1$, *on a*

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\pi}{n}\ln|x^n| = 4\pi\ln|x|$$

Si $|x|<1$ *alors* $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt &= 4\pi\ln|x| \ \ \textit{pour} \ \ |x|>1 \\ \int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt &= 0 \ \textit{pour} \ \ |x|<1 \end{aligned}$$

Exercice 24.8 *On s'inspire de l'indication et on considère* $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ *qui est une somme de Riemann à droite pour la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x}$, *continue sur* $[0,1]$. *On en déduit que*

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$

Reste à montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite. Pour cela, on considère

$$w_n = v_n - u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}} \\
&= \frac{\sqrt{(k+1+n)} - \sqrt{(k+n)}}{\sqrt{(k+n)}\sqrt{(k+n)}\sqrt{(k+1+n)}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{(k+1+n)}\right)^2 - \left(\sqrt{(k+n)}\right)^2}{(n+k)\sqrt{(k+1+n)}\left(\sqrt{(k+1+n)} + \sqrt{(k+n)}\right)} \\
&= \frac{1}{(k+n)\sqrt{k+1+n}\left(\sqrt{k+1+n} + \sqrt{k+n}\right)} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+n}\left(\sqrt{1+n} + \sqrt{1+n}\right)} = \frac{1}{2(n+1)^2} \quad \text{car } k \geq 1
\end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq w_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour conclure

$$u_n = v_n - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Exercice 24.9

1. *On a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$. Ainsi*

   $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$

2. *On a $U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}$ et $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}$. Puisque l'on indique qu'il faut comparer les deux termes, on peut regarder S_1 et U_2, S_2 et U_4 par exemple. On a donc*

   $$\begin{aligned}
   S_1 &= \frac{1}{2},\ U_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
   S_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},\ U_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}
   \end{aligned}$$

   Il semble donc que $S_n = U_{2n}$, il reste à le prouver!!!!
   On peut procéder par récurrence, en effet

   $$\begin{aligned}
   S_{n+1} &= +\frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
   &= S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}
   \end{aligned}$$

   et

   $$U_{2n+2} = U_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

ce qui prouve bien l'hérédité.
Autre preuve :

$$\begin{aligned}
U_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n} = 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}-2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
S_n &= U_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2\\
U_{2n+1} &= S_n+\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2
\end{aligned}$$

les suites de rang pair et impair convergent vers la même limite, donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* $\ln 2$.
On peut aussi écrire que

$$S_{E\left(\frac{n}{2}\right)} \leq U_n \leq S_{E\left(\frac{n}{2}\right)}+\frac{1}{n}$$

et appliquer le théorème des gendarmes.

Exercice 24.10 *Posons* $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ *qui est définie sur* $[0,1]$, *alors*

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\,F\left(\frac{j}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}F\left(\frac{j}{n}\right)
\end{aligned}$$

est une somme de Riemann associée à F.*(qui est continue). Ainsi* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 F(t)\,dt$. *Puisque* F *est* $\mathcal{C}^1$, *on peut intégrer par parties (en dérivant* F*) pour obtenir (car* $F(0)=0$*)*

$$\int_0^1 F(t)\,dt = [(t-1)\,F(t)]_0^1-\int_0^1 (t-1)\,f(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt$$

$$\begin{array}{ll}
u(t)=F(t) & u'(t)=F'(t)=f(t)\\
v'(t)=1 & v(t)=t-1
\end{array}$$

Remarque : *Le résultat n'est pas surprenant. En effet, si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *alors la formule de Taylor donne*

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{k+1}{n}\right) &= F\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)+\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\tfrac{k+1}{n}-t\right)F''(t)\,dt\\
\text{soit } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx &= \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)+\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\tfrac{k+1}{n}-t\right)f'(t)\,dt
\end{aligned}$$

ainsi

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\tfrac{k+1}{n}-t\right)f'(t)\,d$$

Or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1(1-t)\,f(t)\,dt$ *car c'est une somme de Riemann de la fonction continue* $x\mapsto(1-x)\,f(x)$. *Et*

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\tfrac{k+1}{n}-t\right)f'(t)\,dt\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\tfrac{k+1}{n}-t\right)\sup|f'|\,dt\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{\sup|f'|}{2n^2}dt=\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

mais $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1(1-t)\,dt$ *donc* $\dfrac{1}{2n}\times\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

Exercice 24.11

1. *On peut faire une étude de fonction, mais la formule de taylor à l'ordre* 3, *avec reste intégral pour la fonction* sin *entre* 0 *et* x *s'écrit*

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^3}{3!}\sin t\,dt$$

Si $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, *alors* $\forall t\in[0,x]$, *on a* $\sin t\geq 0$ *donc* $\dfrac{(x-t)^3}{3!}\sin t\geq 0$, *ainsi* $\int_0^x\dfrac{(x-t)^3}{3!}\sin t\,dt\geq 0$ *et* $\sin x\geq x-\dfrac{x^3}{6}$. *L'autre inégalité provient de la convexité.*

2. *On a alors, puisque* $\sin\dfrac{k}{n}\geq 0$ *lorsque* $k\in\{1,\cdots,n\}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)\leq u_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

La somme de droite

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

est une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x)=x\sin x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$, *on a donc*

$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 x\sin x\,dx$$

On cherche une primitive de xe^{ix} *sous la forme* $(ax+b)\,e^{ix}$, *on dérive pour avoir*

$$ae^{ix}+i\,(ax+b)\,e^{ix}=xe^{ix}\Longrightarrow ai=1 \text{ et } a+ib=0\Longrightarrow a=-i \text{ et } b=1$$

$$\int xe^{ix}dx=(-ix+1)\,e^{ix}+K\Longrightarrow\int x\sin x\,dx=\sin x-x\cos x+C$$

d'où

$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 x\sin x\,dx=\sin 1-\cos 1$$

Pour la somme de gauche, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)=Sn-\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

Or
$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \sum_{k=1}^{n} n^3 = n^4$$
d'où
$$0 \leq \left|\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1$$
conclusion
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1$$

Exercice 24.12 *On a*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$
Car on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction continue, $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$. Ainsi $a_n \sim \dfrac{2n}{\pi}$. Reste à déterminer un équivalent de $\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$. Une intégration par parties donne (on intègre x^{2n})
$$\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{\pi}{2(2n+1)}\int_0^1 x^{2n+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
Or
$$\left|\int_0^1 x^{2n+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right| \leq \int_0^1 x^{2n+1}dx = \frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Ainsi
$$2n\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \iff \int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \sim \frac{1}{2n}$$
et
$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}$$

Exercice 24.13

1. *Simple vérification, attention à bien préciser que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.*
2. *On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2-1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = f(P)$.*

   Supposons alors que $f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$ à $n \geq 1$ fixé. On a ainsi
$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$
   Si on considère la somme $\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$, on peut la couper en deux sommes. Celle où l'indice j est pair, et celle où j est impair. Si l'on pose $j = 2k$, on a alors $j = 2k \leq 2^{n+1}-1 \implies 2k \leq 2^{n+1}-2 \implies k \leq 2^{n+1}-1$. La

somme des indices pairs est donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)$.

Si l'on pose $j=2k+1$*, on a alors* $2k+1 \leq 2^{n+1}-1 \Longrightarrow k \leq 2^{n+1}-1$*, la somme des indices impairs est donc* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)$.

Conclusion $\displaystyle\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$ *et ceci prouve l'hérédité.*

3. *On a donc*

$$\varphi\left(f^n(P)\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) \underset{j=k+1}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} P\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

Qui est la somme de Riemann de P *sur* $[0,1]$ *pour une subdivision à* 2^n *éléments. On a donc*

$$\varphi\left(f^n(P)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 P(t)\,dt.$$

3 Les exotiques

Exercice 24.14 *On a*

$$\begin{aligned}
\ln u_n &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n+\frac{1}{n^2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k
\end{aligned}$$

On va commencer par évaluer le comportement de la somme, elle évoque une somme de Riemann pour $f(x)=x\ln x$ *prolongée en* 0 *par* $f(0)=0$ *(car* $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *ainsi* f *est continue sur* $[0,1]$*). On a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\ln k-\ln n\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k-\frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k-\frac{\ln n}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n
\end{aligned}$$

or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$*. Il reste donc à calculer cette intégrale, soit* $g(x)=x^2\ln x$ *prolongée par* $g(0)=0$*, alors* g *est continue sur* $[0,1]$ *et* $g'(x)=2x\ln x+x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc par le théorème du prolongement* $\mathcal{C}^1$*, on a* g $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$. *On a* $g'(x)=2f(x)+x$ *ainsi*

$$\int_0^1 g'(x)\,dx=g(1)-g(0)=0=2\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 x dx$$

ainsi

$$\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{1}{4}$$

et

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{4}}$$

Exercice 24.15

1. *Non, car* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1-\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}}$

2. *On a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{2009}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)} &= \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\left(1-\frac{2009}{n^2+kn+2009}\right) = \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{n^2+kn}{n^2+kn+2009}\\ &= \frac{n^2}{n^2+kn+2009}\end{aligned}$$

3. *Donc*

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2009\,(n-k)}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} - \frac{2009}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1-t}{1+t}dt = 2\ln 2 - 1$$

$$\begin{aligned}\textit{Pour } 1 &\leq k \leq n,\ 0 \leq \frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)} \leq 1\\ \textit{d'où } 0 &\leq \frac{2009}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)} \leq \frac{2009}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

SUITES ET FONCTIONS DERIVABLES

10.1 TD suites et fonctions

10.1.1 Propriété du corps des réelles

EXERCICE 1

Par l'absurde ;supposons que X admet une borne superieur $M \in \mathbb{Q}$
alors $\forall x \in$X,on a $x < M$ or $x \in X \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
$M \neq \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc il n'y a que 2 possibilitées $\left(\sqrt{2} < MouM < \sqrt{2}\right)$
si $\sqrt{2} < M$ alors il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} < a < M$,d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et on aura $\forall x \in X, x < \sqrt{2} < a \Rightarrow a$ est un majorant dans $\mathbb{Q}$ plus petit que M.ce que est contraire à la propriété de la borne supérieur.
Si $M < \sqrt{2}$ d'après la même densité il existe r tel que :
$M < r < \sqrt{2} \Rightarrow r^2 < 2 \Rightarrow r \in \mathbb{Q}$
cela contredit le fait que M est un majorant de X
conclusion :X n'admet pas de borne superieur dans $\mathbb{Q}$

EXERCICE 2

$\oplus \max(a, b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|a-b|}{2}$
$\max(a, b)$ est soit a,soit b.
si $\max(a, b) = a$ alors on a : $b \leq a \Rightarrow a - b \geq 0$

Par conséquent
$|a-b| = a-b$ et $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+a-b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \Rightarrow \max(a,b) = a$

si $\max(a,b) = b$ alors on a : $a \leq b \Rightarrow a-b \leq 0$
Par conséquent
$|a-b| = b-a$ et $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+b-a}{2} = \dfrac{2b}{2} = b \Rightarrow \max(a,b) = b$

$\oplus \min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$

$\min(a,b)$ est soit a,soit b.
si $\min(a,b) = a$ alors on a : $b \geq a \Rightarrow a-b \leq 0$
Par conséquent
$|a-b| = b-a$ et $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+a-b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \Rightarrow \min(a,b) = a$

si $\min(a,b) = b$ alors on a : $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0$
Par conséquent
$|a-b| = a-b$ et $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+b-a}{2} = \dfrac{2b}{2} = b \Rightarrow \min(a,b) = b$

EXERCICE 3

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$
Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$

Soit $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$.
Si $x \in A$ on a :$x \leq \sup(A)$,si $x \in B$ on a :$x \leq \sup(B)$
donc : $x \leq \max(\sup(A); \sup(B))$
Soit $M = \max(\sup(A), \sup(B))$
Montrons que M est le plus petit des majorants.
Soit M' un majorant de $A \cup B$
$A \subset A \cup B \Rightarrow \forall x \in A$ on a :$x \in A \cup B$,$x \leq M' \Rightarrow \sup(A) \leq M'$
$B \subset A \cup B \Rightarrow \forall x \in B$ on a :$x \in A \cup B$,$x \leq M' \Rightarrow \sup(B) \leq M'$
d'où $\max(\sup(A), \sup(B)) \leq M' \Leftrightarrow M \leq M'$

$\boxed{\text{Donc : } \sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))}$

Montrons que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$

Soit $x \in A \cup B$
on a :$x \in A$ ou $x \in B$
$\left.\begin{array}{l} \text{si} x \in A \text{ alors } \inf A \leq x \\ \text{si} x \in B \text{ alors } \inf B \leq x \end{array}\right\}$ alors $\min(\inf(A), \inf(B)) \leq x, \forall x \in A \cup B$
Donc $m = \min(\inf(A), \inf(B))$ est un minorant
montrons que m est le plus grand des minorants.
Soit m' un autre minorant de $A \cup B$
Soit $x \in A$ on a : $x \in A \cup B$ donc $m' \leq x, \forall x \in A \Rightarrow m' \leq \inf A$
Soit $y \in B$ on a : $y \in A \cup B$ donc $m' \leq y, \forall y \in B \Rightarrow m' \leq \inf B$
$\left.\begin{array}{l} m' \leq \inf A \\ m' \leq \inf B \end{array}\right\}$ alors $m' \leq \min(inf(A), \inf(B)) = m$
$\boxed{\text{Donc } \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))}$

EXERCICE 4

1-Montrons que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Soit $u = x + y \in A + B$ avec $x \in A, y \in B$
$x + y \leq \sup(A + B)$
Fixons y quelconque dans B et faisons varier x dans A.
Ainsi $\sup(A + B) - y$ sera fixe
on a : $x \leq \sup(A + B) - y, \forall x \in A \Rightarrow \sup(A + B) - y$ est un majorant de A.
Par conséquent $\sup A \leq \sup(A + B) - y; \forall y \in B$
c'est-à-dire $\forall y \in B$ fixé $y \leq \sup(A + B) - \sup A, \forall y \in B$ implique que $\sup(A + B) - \sup A$ est un majorant de B.
Par conséquent $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup A$

D'oú , $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$ inégalité 1

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists u_2 \in A + B$, $\exists x_\varepsilon \in A$ et $\exists y_\varepsilon \in B$ tels que
$\sup(A + B) - \varepsilon \leq x_\varepsilon + y_\varepsilon$ or $x_\varepsilon \leq \sup A$ et $y_\varepsilon \leq \sup B$ alors
$\sup(A+B)-\varepsilon < \sup(A)+\sup(B) \Rightarrow \sup(A+B) < \sup(A)+\sup(B)+\varepsilon, \forall \varepsilon$

ε négligeable donc $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ inégalité 2

D'après les inégalités 1 et 2 on a finalement $\boxed{\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)}$

Montrons que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

Soit $u = x + y \in A + B$ avec $x \in A, y \in B$
$x + y \geq \inf(A+B)$
Fixons y quelconque dans B et faisons varier x dans A.
Ainsi $\inf(A+B) - y$ sera fixe
on a : $x \geq \inf(A+B) - y, \forall x \in A \Rightarrow \inf(A+B) - y$ est un minorant de A.
Par conséquent $\inf A \geq \inf(A+B) - y; \forall y \in B$
c'est-à-dire $\forall y \in B$ fixé $y \geq \inf(A+B) - \inf A, \forall y \in B$ implique que $\inf(A+B) - \inf A$ est un minorant de B.
Par conséquent $\inf(B) \geq \inf(A+B) - \inf A$

D'oú , $\inf(A) + \inf(B) \geq \inf(A+B)$ inégalité 1

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists u_2 \in A + B$, $\exists x_\varepsilon \in A$ et $\exists y_\varepsilon \in B$ tels que
$\inf(A+B) - \varepsilon \geq x_\varepsilon + y_\varepsilon$ or $x_\varepsilon \geq \inf A$ et $y_\varepsilon \geq \inf B$ alors
$\inf(A+B) - \varepsilon > \inf(A) + \inf(B) \Rightarrow \inf(A+B) > \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon, \forall \varepsilon$

ε négligeable donc $\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B$ inégalité 2
D'après les inégalités 1 et 2 on a finalement $\boxed{\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)}$

2-On suppose $A \subset B$, comparons $\sup A$ et $\sup B$;$\inf A$ et $\inf B$.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles $A \subset B$.
Soit $x \in A$
puisque $A \subset B$ on a : $x \in B \Rightarrow x \leq \sup B$.Donc $\forall x \in A, x \leq \sup B$
Par suite $\sup B$ est un majorant de A or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
donc $\boxed{\sup A \leq \sup B}$

Soit $x \in A$
puisque $A \subset B$ on a : $x \in B \Rightarrow x \geq \inf B$.Donc $\forall x \in A, x \geq \inf B$
Par suite $\inf B$ est un minorant de A or $\inf A$ est le plus grand des minorants de A.
donc $\boxed{\inf A \geq \inf B}$

3-On suppose $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$

Montrons que $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$
$\forall \in A, 0 \leq x \leq \sup A$
$\forall \in B, 0 \leq y \leq \sup B$
Donc $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$,$xy \leq \sup A \sup B \Rightarrow 0 \leq \sup AB \leq \sup A \sup B$ inégalité 1
$\oplus$ Si A ou B est reduit a $\{0\}$ alors $\sup A \sup B = 0$
Par conséquent $\sup AB = \sup A \sup B$
$\oplus$ Supposons $A \neq \{0\}$ et $B \neq \{0\}$
$\forall x \in A, \forall y \in B$, on a : $xy \leq \sup(AB)$
Donc pour y fixé dans $B\backslash\{0\}$ ona :$x \leq \frac{\sup(AB)}{y}, \forall \in A$
c'est-à-dire que $\frac{\sup(AB)}{y}$ est un majorant de A soit $\sup A \leq \frac{\sup(AB)}{y}$
on a :$\sup A \leq \frac{\sup(AB)}{y} \Leftrightarrow y \sup A \leq \sup(AB) \Leftrightarrow y \leq \frac{\sup(AB)}{\sup A}, \forall y \in B\backslash\{0\}$
Donc $\frac{\sup(AB)}{\sup A}$ est un majorant de B.
Par conséquent $\sup B \leq \frac{\sup(AB)}{\sup A}$ soit $\sup A. \sup B \leq \sup(AB)$ inégalité 2.
on en déduit des inégalités 1 et 2 que $\boxed{\sup(AB) = \sup A. \sup B}$

4-Déterminons les bornes supérieur et inférieur dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble
$A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ si elles existent.

on peut partitionner $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{I} = \{2n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1, n \in \mathbb{N}\}$
$A_1 = \{\frac{1}{2n} + 1, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $A_2 = \{\frac{1}{2n+1} - 1, n \in \mathbb{N}^*\}$
alors $A = A_1 \cup A_2$
Montrons que $A_1 \cup A_2 = A$
$\oplus$ $A_1 \cup A_2 \subset A$
$\frac{1}{2n} + 1 = \frac{1}{2n} + (-1)^{2n} = \frac{1}{m} + (-1)^m$ si l'on pose $m = 2n$; or $m = 2n \in \mathbb{N}^*$ alors $A_1 \subset A$
$\frac{1}{2n+1} + 1 = \frac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+1} = \frac{1}{p} + (-1)^p$ si l'on pose $p = 2n+1$; or $p = 2n+1 \in \mathbb{N}^*$ alors $A_2 \subset A$
Ainsi $A_1 \cup A_2 \subset A$ car $A_1 \subset A$ et $A_2 \subset A$

$\oplus$ On a :$\frac{1}{n} + (-1)^n \in A, n \in \mathbb{N}^*$
Pour $n = 2p, p \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n} + (-1)^n = \dfrac{1}{2p} + 1 \in A_1 \Rightarrow A \subset A_1$
Pour $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n} + (-1)^n = \dfrac{1}{2p+1} - 1 \in A_2 \Rightarrow A \subset A_2$
On a ainsi montrer que la partition est bien choisie

$\frac{1}{2n}+1 \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow +\infty$
donc $\forall\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > N, \Longrightarrow \left|\frac{1}{2n}1-1\right| < \varepsilon \Longrightarrow -1-\varepsilon < \frac{1}{2n}1 < 1+\varepsilon$ et $\forall \in \mathbb{N}^*$
alors $\inf A_1 = 1$
de même $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right) = -1 \Longrightarrow \inf A_2 = -1$
en conclusion 1 : $\boxed{\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = -1}$

On a : $\frac{1}{2}+1 \geq \frac{1}{2n}+1, \forall n \in \mathbb{N}* \Longrightarrow \sup A_1 = \frac{3}{2}$
de même $1 \geq \frac{1}{2n+1} \Longrightarrow 0 \geq \frac{1}{2n+1}-1 \Longrightarrow \sup A_2 = 0$
en conclusion 2 : $\boxed{\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \frac{3}{2}}$
N.B :Pour cette question nous avons eu recourt aux reponses de l'exercice 3

EXERCICE 5
Prouvons que $F = \{p\ln 2 + q\ln 3 : (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
Posons $F_+ = F\bigcap\mathbb{R}_+^*$
0 est un minorant de F_+
Donc F_+ admet une borne inférieure.
Posons $\alpha = \inf F_+$
Il n'y a que deux possibilités qui s'exclues mutuellement,pour α (*soit* $\alpha > 0$ *soit* $\alpha = 0$)

$\odot$ Supposons que $\alpha > 0$
Dans ce cas,$\alpha \in F_+$?
Supposons le contraire,$\alpha \notin F_+$ (raisonnement par contraposé)
$\alpha = \inf F_+ \Longrightarrow$ il existe $x \in F_+$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$
posons $\varepsilon = x - \alpha$ il existe $y \in F_+$ tel que $\alpha < y < \alpha + \varepsilon$
donc on a :$x, y \in F_+$ avec

$$\left.\begin{array}{c}\alpha < x < 2\alpha\\ \alpha < y < x\end{array}\right\} \Longrightarrow 0 < x-y < \alpha \Longrightarrow -x < y < -\alpha$$

Puisque la somme de 2 élements de F est élement de F,et l'opposé d'un élement de F est encore élément de F, $x-y \in F_+$(*absurde*) car α est le inf de F_+
Donc $\boxed{\alpha \in F_+}$
Par conséquent on a : $F = \alpha\mathbb{Z}$
En effet $\alpha \in F_+ \Longrightarrow \alpha \in F$ et $k\alpha \in F$
$\forall k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \alpha\mathbb{Z} \subset F$

Soit $x \in F$
Posons $k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$
$\Longleftrightarrow k \leq \frac{x}{\alpha} < k+1 \Longleftrightarrow \alpha k \leq x < \alpha k + \alpha \Longleftrightarrow 0 \leq x - \alpha k < \alpha$
$x \in F, \alpha k \in F \Longrightarrow x - \alpha k \ \in \ F$
Si $0 < x - \alpha k$ alors il y a problème car $x - \alpha k$ appartiendrait alors à F_+ serait plus petit que le inf F_+
Donc $x - \alpha k = 0 \Longrightarrow x = \alpha k \Longrightarrow x \in \alpha\mathbb{Z} \Longrightarrow F \subset \alpha\mathbb{Z}$ d'où $F = \alpha\mathbb{Z}$
Mais F ne peut pas être égale à $\alpha\mathbb{Z}$ car $\ln 2$ *et* $\ln 3 \in F$.
Si alors il existerait 2 entiers naturels non nuls p et q tel que $\ln 2 = \alpha p$ et $\ln 3 = \alpha q$

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$\Longleftrightarrow q \ln 2 = p \ln 3 \Longleftrightarrow \ln 2^q = \ln 3^p \Longleftrightarrow 2^q = 3^p (impossible)$
car 2 et 3 sont premiers entre eux avec 2 pair et 3 impair
conclusion F ne peut pas être égale à $\alpha \in \mathbb{Z}$
ce qui suppose que l'hypothèse $\alpha > 0$ est fausse. Par conséquent $\alpha = 0$

$\odot$ $\alpha = 0$
c'est à dire que inf $F_+ = 0$
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b \Longrightarrow b - a > 0$
Donc $\exists Z \in F_+$ tel que $0 < Z < b - a \Longrightarrow 1 < \frac{b}{Z} - \frac{a}{Z} \Longrightarrow \exists n \in \left]\frac{a}{Z}, \frac{b}{Z}\right[\bigcap \mathbb{Z}$
$\frac{a}{Z} < n < \frac{b}{Z} \Longleftrightarrow a < nZ < b$ or $nZ \in F$
Donc **F est dense dans** $\mathbb{R}$

remarque :Si la différence de deux nombres est grand que 1 alors il exixte un entier entre ces deux nombres

Montrons que l'ensemble $E = \{2^p 3^q : (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $a < b \Longrightarrow b > 0$

cas particulier : si $a = 0$ $0 < b$;il existe $a_1 : 0 < a_1 < b$

Pour $a \in \mathbb{R}_+, a < a_1 < b$ donc $a_1, b \in \mathbb{R}_+^*$
$a_1 < b \Longrightarrow \ln a_1 < \ln b$
$\ln a_1$ et $\ln b$ sont des réels.
F étant dense dans $\mathbb{R}$ (d'après l'indication),$(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\ln a_1 < p \ln 2 + q \ln 3 < \ln b \Longleftrightarrow \ln a_1 < \ln 2^p + \ln 3^q < \ln b \Longleftrightarrow \ln a_1 < \ln 2^p 3^q < \ln b \Longrightarrow a_1 < 2^p 3^q < b \Longrightarrow a < 2^p 3^q < b$
Donc l'élément de E, $2^p 3^q \in]a, b[$.
Par conséquent E **est dense dans** $\mathbb{R}$

FICHE 1

$$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\operatorname{sgn}(x)\,dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}$$

$|x|>1$

$$\Rightarrow I_1 = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$$ (il faut que $x>0$ ou $x<-1$)

1/ $x>0$. $$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$$

$$\Rightarrow I_3 = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right) + C$$

2/ $1+x<0$
$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{-x-1}\cdot\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{-x-1}\right)^2}}$$

$$= -2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}\right) + C$$

Finalement, $I_3 = 2\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right) + C$
$x \notin [-1,0]$.

$$I_4 = \int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx$$

On a: $$\sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{d\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)}{2(a^2-b^2)}$$

Poser donc $a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x = t$

Donc $I_4 = \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2x + b^2\cos^2 x} + C,\ a^2 \neq b^2.$

$$I_5 = \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$I_6 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) + C$$

$$I_7 = \int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2} \quad \text{Poser } x^2 = t$$

$$\Rightarrow I_7 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) + C$$

$$I_8 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}},\ a \neq 0 \quad \text{Poser } x = a\tan t$$

$$\Rightarrow I_8 = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

Ex.2

$$J_1 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx \quad \text{Poser } x = a\cos 2t$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \cot g\, t, \quad dx = -2a\sin 2t\,dt$$

$\Rightarrow$ Il est plus simple de poser $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = t$

$$J_2 = \int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx \quad \text{Poser } x = 2a\sin^2 t$$

$$\Rightarrow J_2 = 8a^2\int \sin^4 t\,dt = \dots =$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\cdot\sqrt{x(2a-x)} + C,$$

$$0 \leq x < 2a.$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad \text{Poser } x-a = (b-a)\sin^2 t$$

$$\Rightarrow J_3 = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

$a < x < b.$

$$J_4 = \int \sqrt{(x+a)(x+b)}\, dx$$

1) $x+a>0$ et $x+b>0$ (supposons $b>a$)

Poser $x+a = (b-a)\,sh^2 t$.

$$\Rightarrow J_4 = \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right) + C.$$

2) $x+a<0$ et $x+b<0$. $(b>a)$.

Poser $x+b = -(b-a)\,sh^2 t$.

$$\Rightarrow J_4 = \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right) + C$$

<u>ou bien</u> $(x+a)(x+b) = (x+a)^2 \cdot \frac{x+b}{x+a} = (b+x)^2 \cdot \frac{(x+a)}{(x+b)}$

Donc $\sqrt{(x+a)(x+b)} = |x+a|\sqrt{\frac{x+b}{x+a}}$ ou $|b+x|\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$

$a \neq b$

ici, $x+a>0$ et $x+b>0$ ou $x+a<0$ et $x+b<0$.

Donc une fois $|x+a| = x+a$, l'autre fois : $-x-a$.

Poser $\frac{x+b}{x+a} = t^2$. C'est plus simple.

$$J_5 = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}} = \int \frac{x^2\, d(x^2)}{2\sqrt{(x^2-1)^2 - 2}} =$$

$$= \int \frac{(x^2-1)\, d(x^2-1)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$$

$$\Rightarrow J_5 = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right| + C$$

$$J_6 = \int \frac{dx}{x^3+1} \qquad x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Décomposer en éléments simples.

$$\Rightarrow J_6 = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$J_7 = \int \frac{dx}{x^4+1} \qquad x^4+1 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$

$$J_7 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$$

$$J_8 = \int\frac{dx}{x^4+x^2+1} \quad \text{et} \quad x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

Décomposer ensuite en él. simples.

On trouve(?) $J_8 = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right) + C$

$$J_9 = \int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$$

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 = x^4(x-1)+x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^4+x^2+1)$$
$$= (x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) \quad (\text{voir } J_8).$$

Ensuite,

$$J_9 = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Ex.3 $I=\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ est une fraction rationnelle si, dans la décomposition

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x}+\frac{E}{(x-1)^2}+\frac{F}{x-1},$$ les coefficients D et F sont nul. Dans ce cas

$$ax^2+bx+c \equiv A(x^2-2x+1)+B(x^3-2x^2+x)+Ex^3$$

$$\Rightarrow \boxed{a+2b+3c=0}$$

2/ $L_1=\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $a>0$.

$L_1=\int \sqrt[4]{\frac{a}{a-x}}\,dx$, $0<x<a$.

Poser $\frac{a}{a-x}=t^4$.

$$L_2=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}\cdot(x-b)^{n-1}}} \quad n\in\mathbb{N}.$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}\cdot(x-a)^{2n}}}.\quad \text{Poser } \frac{x-b}{x-a}=t^n.$$

$$\Rightarrow L_2=\frac{n}{b-a}\int dt=\frac{n}{b-a}t+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

Ex-4 $$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$N_1 = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}$$

Dériver et rendre au même dénominateur.

$\Rightarrow$ $A = -\frac{1}{3}$; $B = -\frac{5}{6}$, $C = -\frac{19}{3}$, $\lambda = 4$.

On obtient alors $N_1 = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$

$$N_2 = \int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2x^4 - x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= (Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient ;

$A = \frac{1}{6}$, $B = 0$, $C = -\frac{a^2}{24}$, $D = 0$, $E = -\frac{a^4}{16}$, $F = 0$, $\lambda = \frac{a^6}{16}$

$$\Rightarrow N_2 = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{a^2x^3}{24} - \frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|} + C,\ |x| \le |a|.$$

Ex. 5 $$I_n = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \int \frac{d(-a\cos x + b\sin x)}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}}.$$

Intégration par parties $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_n = \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2\,dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}} =$$

$$= \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2 + (b\cos x + a\sin x)^2\,dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)I_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}\right]$$

Ex 5 (suite).

$$\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3} = I_3 = \frac{1}{10}\left(\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x} + \frac{2\sin x-\cos x}{(\sin x+2\cos x)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan 2\right)\right| + \frac{2\sin x-\cos x}{(\sin x+2\cos x)^2}\right) + C.$$

$x \neq k\pi - \arctan 2.$

Ex-6 $I_n = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2-a^2)^n}$, $a \neq 0.$

Par parties $\Rightarrow I_n = -\dfrac{t}{2(n-1)a^2(t^2-a^2)^{n-1}} - \dfrac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$

$J = \displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\, dx.$ $(x>0,\ x<-1).$

$= \displaystyle\int \sqrt{x^4(1+x^{-1})}\, dx = \int x^2 \left(1+x^{-1}\right)^{1/2} dx$

Ici, $n=-1$, $m=2$, $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.

Posons alors $x^{-1}+1 = t^2 \Rightarrow J = -\displaystyle\int \frac{2t^2\,dt}{(t^2-1)^4}$

$\Rightarrow J = -2I_3 - 2I_4$, $I_n = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2-1)^n}$, $n=3;4.$ $a=1$

Développements limités usuels en 0

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e^x} &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\textbf{sh } \boldsymbol{x} &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{ch } \boldsymbol{x} &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)\\
\textbf{sin } \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{cos } \boldsymbol{x} &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(1+x)^\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{1-x}} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\ln(1-x)} &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{1+x}} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\ln(1+x)} &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\sqrt{1+x}} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\textbf{Arctan } \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{Argth } \boldsymbol{x} &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{Arcsin } \boldsymbol{x} &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{Argsh } \boldsymbol{x} &= x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{th } \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)\\
\textbf{tan } \boldsymbol{x} &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)
\end{aligned}
$$

Développements en série entière usuels

$\boldsymbol{e^{ax}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$		$a \in \mathbb{C}\,,\ x \in \mathbb{R}$
$\mathbf{sh}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\mathbf{ch}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{\sin x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{\cos x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{(1+x)^{\alpha}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$	$(\alpha \in \mathbb{R})$	$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{a-x}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{(a-x)^2}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{(a-x)^k}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\boldsymbol{\ln(1-x)}$	$=$	$\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$		$x \in [-1\,;1\,[$
$\boldsymbol{\ln(1+x)}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,]$
$\boldsymbol{\sqrt{1+x}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathbf{Arctan}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in [-1\,;1\,]$
$\mathbf{Argth}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathbf{Arcsin}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathbf{Argsh}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle\vert\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\text{cotan } x$		$-1 - \text{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\text{ch } x$		$\text{sh } x$	$\mathbb{R}$
$\text{sh } x$		$\text{ch } x$	$\mathbb{R}$
$\text{th } x$		$1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\text{coth } x$		$1 - \text{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\text{sh}^2 x}$	$\mathbb{R}^*$
$\text{Arcsin } x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\text{Arccos } x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\text{Arctan } x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\text{Argsh } x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$\text{Argch } x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1\,;+\infty[$
$\text{Argth } x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1\,;1[$

Primitives usuelles

I Polynômes et fractions simples

Fonction	Primitive	Intervalles
$(x-x_0)^n$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}\ :\ x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})\ :$ $x \in \,]-\infty\,;x_0\,[\ ,\ ]\,x_0\,;+\infty\,[$
$(x-x_0)^\alpha$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]\,x_0\,;+\infty\,[$
$(x-z_0)^n$ $\quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x-a}$ $\quad a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$]-\infty\,;a\,[\ ,\ ]\,a\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{x-(a+\mathrm{i}b)}$ $\quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right]$ $+\,\mathrm{i}\ \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x-a}{b}$	$\mathbb{R}$

II Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$]\,0\,;+\infty\,[$
$e^{\alpha x}$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\mathrm{cotan}\ x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln(\mathrm{ch}\ x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{coth}\ x$	$\ln\lvert\mathrm{sh}\ x\rvert$	$]-\infty\,;0\,[\ ,\ ]\,0\,;+\infty\,[$

III Puissances et inverses de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x - x$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\operatorname{sh}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth}^2 x$	$x - \operatorname{coth} x$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|\tan\dfrac{x}{2}\right\|$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right\|$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2\operatorname{Arctan} e^x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{coth}^2 x - 1$	$-\operatorname{coth} x$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^4 x}$	$-\operatorname{cotan} x - \dfrac{\operatorname{cotan}^3 x}{3}$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \dfrac{\tan^3 x}{3}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$

IV Fonctions dérivées de fonctions réciproques

Fonction		Primitive	Intervalles
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{Argth} x \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-1\,;1\,[\\ ]-\infty\,;-1\,[\,, \\ ]-1\,;1\,[\,,\ ]\,1\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{Argth}\dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[\\ ]-\infty\,;-\lvert a\rvert\,[\,, \\ ]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[\,,\ ]\,\lvert a\rvert\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1\,;1\,[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\lvert a\rvert}$	$]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{Argch} x \\ -\operatorname{Argch}(-x) \\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]\,1\,;+\infty\,[\\ ]-\infty\,;-1\,[\\ ]-\infty\,;-1\,[\text{ ou }]\,1\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$	$\begin{cases} a>0\ :\ \mathbb{R} \\ a<0\ : \\ \quad]-\infty\,;-\sqrt{-a}\,[\\ \quad \text{ou }]\sqrt{a}\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x+\dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x-\dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$

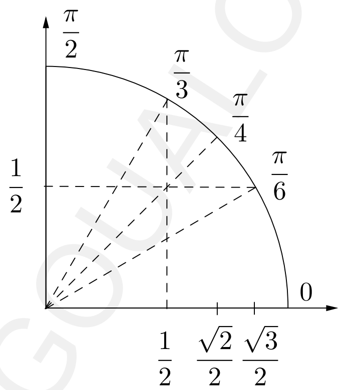
Trigonométrie

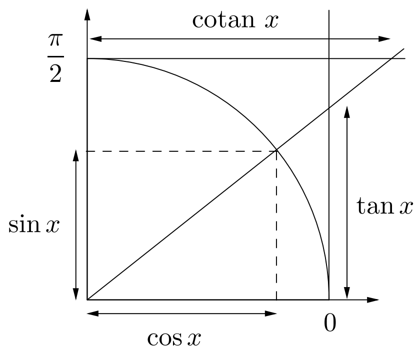
I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\operatorname{cotan} x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{cotan} x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{cotan} x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
cotan x	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin , Arccos , Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = \pi - \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\cos x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arccos}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = -\,\text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan}\ \lambda \mod \pi$
- Si cotan $x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot}\ \lambda \mod \pi$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin}\ \lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x	Arccot x
Ensemble de définition	$[-1\,;1]$	$[-1\,;1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2\,;\pi/2]$	$[0\,;\pi]$	$]-\pi/2\,;\pi/2[$	$]0\,;\pi[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$]-1\,;1[$	$]-1\,;1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

3 Relations

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arccot} x = \begin{cases} \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 1/x = \operatorname{sign}(x) \times \pi/2$$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan\dfrac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + \mathrm{i}\ \sin a)^n = \cos na + \mathrm{i}\ \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos^3 a - 3\cos a\ \sin^2 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3a &= 3\cos^2 a\ \sin a - \sin^3 a\\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a\end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

IV Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p + \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p + \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\ a + \mathrm{th}\ b}{1 + \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p + \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p+q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p - \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p - \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a-b) = \frac{\mathrm{th}\ a - \mathrm{th}\ b}{1 - \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p - \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p-q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\ 2x &= \mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x\\ &= 2\,\mathrm{ch}^2\, x - 1\\ &= 1 + 2\,\mathrm{sh}^2\, x\end{aligned} \qquad \mathrm{ch}^2\, x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x + 1}{2}$$

$$\mathrm{sh}\ 2x = 2\,\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{ch}\ x \qquad \mathrm{sh}^2\, x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{2}$$

$$\mathrm{th}\ 2x = \frac{2\,\mathrm{th}\ x}{1 + \mathrm{th}^2\, x} \qquad \mathrm{th}\ x = \frac{\mathrm{sh}\ 2x}{\mathrm{ch}\ 2x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{\mathrm{sh}\ 2x}$$

En notant $t = \text{th}\,\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\text{sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad\qquad \text{ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\text{ch}\,a + \text{sh}\,a)^n = \text{ch}\,na + \text{sh}\,na$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{ch}\,3a &= \text{ch}^3 a + 3\,\text{ch}\,a\,\text{sh}^2 a \\ &= 4\,\text{ch}^3 a - 3\,\text{ch}\,a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sh}\,3a &= 3\,\text{ch}^2 a\,\text{sh}\,a + \text{sh}^3 a \\ &= 4\,\text{sh}^3 a + 3\,\text{sh}\,a \end{aligned}$$

$$\text{th}\,3a = \frac{3\,\text{th}\,a + \text{th}^3 a}{1 + 3\,\text{th}^2 a}$$

Dans la même collection nous avons