



Correction-Examen semestre -I-

Durée : 1h 30 m

Exercice 1 (8 pts)

- Donner la négation des deux propositions suivantes et indiqué vraie ou fausse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$.

.....
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y(y = -x - 1) \in \mathbb{R} : x + y = -1 \leq 0$. (vraie)

Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$

.....
 $\exists x(x = 0) \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$. (vraie)

Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x$

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

3. Déterminer $f(A)$ tel que $A = [1; 2]$.

.....
 $f'(x) = 2x - 4$,

$f'(x) \leq 0$ pour $x \in A$, f est décroissante.

$f(A) = \{f(x), x \in A\}$

soit $x \in A$,

$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 0$

$f(A) = [-1; 0]$

4. Déterminer $f^{-1}(B)$ tel que $B = [-1; 3]$

.....
 $f^{-1}(B) = \{x, f(x) \in B\}$

$-1 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 3$ et $-1 \leq x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 4]$

et

$-1 \leq x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ vraie pour toute $x \in \mathbb{R}$

Donc

$$f^{-1}(B) = [0; 4] \cap \mathbb{R} = [0; 4]$$

Exercice 2 (12 pts)

Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation suivante : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 4k \quad tq \quad k \in \mathbb{Z}$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

.....
Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$

- Réflexive : $x - x = 0 = 4 \times 0 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$

- Symétrique :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x - y = 4k \quad tq \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y - x = -4k = 4(-K) \quad tq \quad -k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

- Transitive :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z &\Leftrightarrow x - y = 4k \quad et \quad y - z = 4k' \quad tq \quad k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x - z = 4(k + k') \Leftrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de 1 et 0.

.....

$$\begin{aligned} \dot{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x\mathcal{R}1\} = \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x - 1 = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x, tq \quad x = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\} = \{4k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x\mathcal{R}0\} = \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{4k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

3. Donner la définition d'un corps.

.....
Définition 1

- On dit qu'un ensemble $(A, \oplus, \otimes)$ est un corps si

$(A, \oplus)$ est un groupe commutatif, $(A^*, \otimes)$ est un groupe et $\otimes$ distributive par rapport à $\oplus$.

Si de plus $\otimes$ est commutative, on dit que A est un corps commutatif

Définition 2

- On dit qu'un anneau unitaire $(A, \oplus, \otimes)$ est un corps si tout élément non nul de A est inversible.

Si de plus $\otimes$ est commutative, on dit que A est un corps commutatif

L'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$ muni des deux lois de composition interne définies par les tableaux ci-dessous

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

4. L'ensemble $(A, \oplus, \otimes)$ est-il un corps, justifier votre réponse.

.....
 L'élément 2 ne possède pas un élément inverse (l'élément symétrique),
 l'ensemble $(A, \oplus, \otimes)$ n'est pas un corps

5. Montrer que : $(x \oplus 1)^2 = x^2 \oplus 2x \oplus 1$ dans l'anneau $(A, \oplus, \otimes)$.

.....
 En utilisant les propriétés de l'anneau commutatif A .

"0" l'élément neutre pour $\oplus$ et "1" l'élément neutre pour $\otimes$.

$$\begin{aligned}
 (x \oplus 1)^2 &= (x \oplus 1) \otimes (x \oplus 1) = (x \oplus 1) \otimes x \oplus (x \oplus 1) \otimes 1 \quad (\text{Distributivité}) \\
 &= (x \otimes x \oplus 1 \otimes x) \oplus (x \otimes 1 \oplus 1 \otimes 1) \quad (\text{Distributivité} + \text{Associativité}) \\
 &= x^2 \oplus x \oplus x \oplus 1 = x^2 \oplus 2x \oplus 1 \quad (\text{Associativité})
 \end{aligned}$$

6. Résoudre l'équation suivante : $x^2 \oplus 2x \oplus 1 = 0$ dans l'anneau $(A, \oplus, \otimes)$.

.....
 En utilisant les propriétés de l'anneau commutatif A et les deux tableaux, on a

$$\begin{aligned}
 x^2 \oplus 2x \oplus 1 &= (x \oplus 1)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow x \oplus 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x \oplus 1 = 2 \\
 \Leftrightarrow x \oplus 1 \oplus 3 &= 0 \oplus 3 \quad \text{ou} \quad x \oplus 1 \oplus 3 = 2 \oplus 3 \\
 \Leftrightarrow x \oplus 0 &= 3 \quad \text{ou} \quad x \oplus 0 = 1 \\
 \Leftrightarrow x &= 3 \quad \text{ou} \quad x = 1
 \end{aligned}$$

7. Soient les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$

$$A(x) = x^2(x+2)^5(x+1)(x+3)^4, \quad B(x) = (x-2)(x+1)^2(x+3)^6$$

- Calculer le pgcd de A et B

.....
 $\text{pgcd}(A, B) = (x+1)(x+3)^4$

- Calculer le ppcm de A et B

.....
 $\text{ppcm}(A, B) = x^2(x+2)^5(x-2)(x+1)^2(x+3)^6$