Le 3 mars 2015

Béjaia

Le corrigé de l'Examen d'Algèbre 3 de l'année 2014 – 2015.

Exercice 1.

Soit A la matrice carrée d'ordre 4, à coefficients réels, donnée par :

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_4)$$

$$= \det \left(\begin{array}{cc|cc} 4-\lambda & -2 & -1 & 1 \\ 6 & -3-\lambda & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix} . \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \{(4-\lambda)(-3-\lambda)+12\} \cdot \{(2-\lambda)(1-\lambda) - 0\}$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

$$= \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

D'où :

$$\boxed{P_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)}.$$

② En déduire les valeurs propres de A tout en précisant la multiplicité algébrique de chacune d'entre elles.

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique P_A et ce sont donc : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

- $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre simple (i.e $m_a(0) = 1$).
- $\lambda_2 = 1$ est une valeur propre double (i.e $m_a(1) = 2$).
- $\lambda_3 = 2$ est une valeur propre simple (i.e $m_a(2) = 1$).

③ Déterminer la multiplicité géométrique de chacune des valeurs propres de A.

On sait que pour toute valeur propre λ de A, on a : $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. On a donc

$$1 \leq m_g(0) \leq m_a(0) = 1,$$

ce qui donne $\boxed{m_g(0) = 1}$.

De même :

$$1 \leq m_g(2) \leq m_a(2) = 1,$$

ce qui donne $\boxed{m_g(2) = 1}$.

Il reste à calculer la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda_2 = 1$. Pour ce faire, nous allons calculer l'espace propre $E(1)$ associé à cette valeur propre.

Calcul de $E(1)$: On a par définition :

$$E(1) := \operatorname{Ker}(A - I_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{(A - I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(S)} \right\}.$$

$$(S) \iff \begin{cases} 3x - 2y - z + t = 0 \\ 6x - 4y - t = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y + t = 0 \\ t = 6x - 4y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 0 \\ t = 6x - 4y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

D'où : $E(1) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} , x \in \mathbb{R} \right\}$

$$\boxed{E(1) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

D'où $\dim E(1) = 1$.

D'où $\boxed{m_g(1) = \dim E(1) = 1}$.

(4) La matrice A est-elle trigonalisable ? est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

- Comme P_A est visiblement scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est un produit de polynômes de 1er degrés) alors A est trigonalisable.

- Mais comme $\overbrace{m_a(1)}^{2} \neq \overbrace{m_g(1)}^{1}$ alors A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on considère la matrice réelle d'ordre 3 :

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ k & k & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

① ⓐ Calculer le polynôme caractéristique de A_k et le factoriser.

On a :

$$P_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda I_3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ k & k-\lambda & -2 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

En développant ce déterminant suivant sa deuxième colonne, on obtient :

$$P_{A_k}(\lambda) = -0.\det\begin{pmatrix} k & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} + (k-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$- 0 \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ k & -2 \end{pmatrix}.$$

$= (k-\lambda)\{(4-\lambda)(-1-\lambda)+6\}$

$= (k-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$

$= (k-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$. D'où :

$$\boxed{P_{A_k}(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-k)}.$$

(b) En déduire que A_k est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

Le polynôme caractéristique P_{A_k} de A_k est visiblement scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est un produit de polynômes de premier degré de $\mathbb{R}[\lambda]$). **Si $k \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$,** on voit que P_{A_k} est à racines simples ; ce qui entraîne que A_k est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

(2) (a) Pour $k \in \{1,2\}$, que doit valoir le polynôme minimal de A_k pour que A_k soit diagonalisable ? Justifier.

Lorsque $k \in \{1,2\}$, on a :

$$Sp(A_k) = \{1,2\}.$$

Pour que A_k soit diagonalisable, il faut et il suffit que son polynôme minimal m_{A_k} soit scindé (sur $\mathbb{R}$) et a toutes ses racines simples.
Comme les zéros de m_{A_k} sont les mêmes que les zéros de P_{A_k}, alors A_k est diagonalisable si et seulement si :

$$\boxed{\begin{aligned} m_{A_k}(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda-2) \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{aligned}}$$

(b) En déduire toutes les valeurs réelles de k pour lesquelles A_k est diagonalisable.

Dans 1) b), on a montré que A_k est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ et lorsque $k \in \{1, 2\}$, on a montré dans (2) (a) que A_k est diagonalisable si et seulement si $m_{A_k}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.
Comme le polynôme $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ divise toujours m_{A_k} $(\forall k \in \mathbb{R})$ (car 1 et 2 sont des valeurs propres de A_k) alors pour $k \in \{1, 2\}$, A_k est diagonalisable si et

seulement si $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$ est un polynôme annulateur de A_k.

Soit $k \in \{1, 2\}$. On a :

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)(A_k) = A_k^2 - 3A_k + 2I_3$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ k^2+4k-6 & k^2 & -4k+2 \\ 9 & 0 & -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ k & k & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k^2+k-6 & k^2-3k+2 & -4k+8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)(A_k) = (0)$ si et seulement si $k = 2$. D'où l'on déduit que A_k est diagonalisable pour $k = 2$ et A n'est pas diagonalisable pour $k = 1$.

Conclusion : La matrice A_k est diagonalisable si et seulement $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

③ On pose $A = A_1$. En utilisant la méthode de votre choix, exprimer explicitement A^n en fonction de n (où n est un entier naturel).

D'après le résultat de la question précédente, la matrice $A = A_1$ n'est pas diagonalisable. Cependant, elle est trigonalisable car son polynôme caractéristique $P_{A_1}(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Mais puisqu'elle possède plus d'une valeur propre, sa [illegible] trigonalisation ne permet pas de calculer explicitement A_1^n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$). Pour calculer A^n explicitement ($n \in \mathbb{N}$), on se sert d'un polynôme annulateur de A qui n'est rien d'autre que P_A (en vertu du théorème de Cayley-Hamilton P_A est un polynôme annulateur de A).

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, considérons la division euclidienne de λ^n sur P_A qui s'écrit :

$$\lambda^n = Q_n(\lambda)\, P_A(\lambda) + R_n(\lambda),$$

où Q_n et R_n sont des polynômes de $\mathbb{R}[\lambda]$ et $\deg R_n < \deg P_A = 3$; d'où $\deg R_n \leq 2$.

On peut donc écrire $R_n(\lambda)$ sous la forme :

$$R_n(\lambda) = a_n \lambda^2 + b_n \lambda + c_n,$$

où a_n, b_n et c_n sont des réels à déterminer.

On a donc :

$$\lambda^n = Q_n(\lambda)\, P_A(\lambda) + a_n \lambda^2 + b_n \lambda + c_n \quad \text{----} \quad (*)$$

<u>Déterminons a_n, b_n et c_n :</u>

- En substituant dans $(*)$ λ par 1, on trouve :

$$1^n = Q_n(1) \underbrace{P_A(1)}_{=0} + a_n + b_n + c_n$$

D'où :

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{----} \quad (1)$$

- En substituant dans $(*)$ λ par 2, on trouve :

$$2^n = Q_n(2) \underbrace{P_A(2)}_{=0} + 4a_n + 2b_n + c_n$$

D'où :

$$4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \quad \text{.....} \quad (2)$$

- En dérivant les deux membres de $(*)$ par rapport à λ, on a :

$$n\lambda^{n-1} = Q_n'(\lambda)\, p_A(\lambda) + Q_n(\lambda)\, p_A'(\lambda) + 2a_n\lambda + b_n .$$

En prenant dans cette dernière $\lambda = 1$, on obtient :

$$n \cdot 1^{n-1} = Q_n'(1)\, \underbrace{p_A(1)}_{=0} + Q_n(1)\, \underbrace{p_A'(1)}_{=0} + 2a_n + b_n$$

D'où :

$$2a_n + b_n = n \quad \text{....} \quad (3)$$

On a donc le système de 3 équations à trois inconnus a_n, b_n, c_n :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 & \text{...} \quad (1) \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n & \text{...} \quad (2) \\ 2a_n + b_n = n & \text{...} \quad (3) \end{cases}$$

(1) − (2) + (3) donne :

4

$$-a_n = 1 - 2^n + n.$$

D'où

$$\boxed{a_n = 2^n - n - 1} \quad --- \quad (4)$$

En substituant cette valeur de a_n dans (3), on trouve :

$$2(2^n - n - 1) + b_n = n.$$

D'où :

$$\boxed{b_n = -2^{n+1} + 3n + 2} \quad --- \quad (5)$$

Finalement, en substituant ces valeurs de a_n et b_n dans (1), on trouve :

$$(2^n - n - 1) + (-2^{n+1} + 3n + 2) + c_n = 1.$$

D'où

$$\boxed{c_n = 2^n - 2n} \quad ---- \quad (6)$$

- En appliquant maintenant les deux membres de (*) à la matrice A, on a :

$$A^n = Q_n(A)\,P_A(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Mais comme $P_A(A) = (0)$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), il vient que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 .$$

Mais

$$A^2 = A_1^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & -5 \end{pmatrix} .$$ D'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 10a_n + 4b_n + c_n & 0 & -6a_n - 2b_n \\ -a_n + b_n & a_n + b_n + c_n & -2a_n - 2b_n \\ 9a_n + 3b_n & 0 & -5a_n - b_n + c_n \end{pmatrix}$$

En substituant a_n, b_n et c_n par leurs valeurs obtenues aux relations (4), (5) et (6), on obtient enfin :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 0 & -2^{n+1} + 2 \\ -3.2^n + 4n + 3 & 1 & 2^{n+1} - 4n - 2 \\ 3.2^n - 3 & 0 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} \forall n \\ \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$$

④ On pose $B = A_2$. Réduire B (la diagonaliser si elle est diagonalisable, la trigonaliser sinon).

D'après le résultat de la question 2) b), la matrice $B = A_2$ est diagonalisable. Les valeurs propres de $B = A_2$ sont $\lambda_1 = 1$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre double). Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

Calcul de $E(1)$. On a :

$$E(1) := \operatorname{Ker}(B - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(B - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(S)} \right\}$$

$$(S) \iff \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{3}{2}x \\ y = -2x + 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{3}{2}x \\ y = x \end{cases}. \quad \text{D'où :}$$

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

D'où

$$\boxed{E(1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3/2\end{pmatrix}\right\}}$$

Calcul de $E(2)$: On a :

$$E(2) = \text{Ker}(B - 2I_3)$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(B-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{(S')}\right\}$$

$$(S') \iff \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \iff z = x$$

D'où :

$$E(2) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\boxed{E(2) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}}$$

Les vecteurs propres (linéairement indépendants) de B sont donc :

5) $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ (associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$)

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$)

$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$).

Soit f l'endomorphisme que représente B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$f(V_1) = 1 . V_1$$
$$f(V_2) = 2 . V_2$$
$$f(V_3) = 2 . V_3$$

La matrice associée à f relativement à la nouvelle base $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est donc :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ qui est diagonale.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et le changement de base s'interprète par la formule matricielle :

$$\boxed{D = P^{-1} B P}$$

(5) Résoudre le système linéaire d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2z \\ y' = 2x + 2y - 2z \\ z' = 3x - z \end{cases},$$

où x, y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle t.

Introduisons la fonction vectorielle :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le système proposé équivaut à :

$$u'(t) = B\, u(t)$$

ie

$$u'(t) = P D P^{-1} u(t)$$

$$P^{-1} u'(t) = D P^{-1} u(t)$$

En posant

$$u_*(t) = \begin{pmatrix} x_*(t) \\ y_*(t) \\ z_*(t) \end{pmatrix} = P^{-1} u(t) ,$$

il vient que :

$$u_*'(t) = D \, u_*(t) .$$

C-à-d :

$$\begin{cases} x_*'(t) = x_*(t) \\ y_*'(t) = 2y_*(t) \\ z_*'(t) = 2z_*(t) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x_*(t) = c_1 e^{t} \\ y_*(t) = c_2 e^{2t} \\ z_*(t) = c_3 e^{2t} \end{cases}$$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Enfin :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = u(t) = P u_*(t) .$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{t} + c_3 e^{2t} \\ z(t) = \frac{3}{2} c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \end{cases}} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

Ce qui est la solution général du système proposé.

Exercice 3.

Trois matrices A, B, C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont telles que :

$Tr(A) = 0$; $\det(A) = -1$;

$Tr(C) = 1$; $\det(C) = 0$ et

$(A + I_2)BC = (0)$.

(1) Déterminer les polynômes caractéristiques des deux matrices A et C.

On a :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\,\lambda + \det(A)$$
$$= \lambda^2 - 0\cdot\lambda + (-1)$$

D'où $\boxed{P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1}$.

De même :

$$P_C(\lambda) = \lambda^2 - Tr(C)\,\lambda + \det(C)$$
$$= \lambda^2 - 1\cdot\lambda + 0$$

D'où $\boxed{P_C(\lambda) = \lambda^2 - \lambda}$.

② En déduire que l'on a :

$$A^2 = I_2 \quad \text{et} \quad C^2 = C$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a : $P_A(A) = (0)$, càd

$$A^2 - I_2 = (0)$$

D'où :

$$\boxed{A^2 = I_2} .$$

De même, d'après le thm de Cayley-Hamilton, on a : $P_C(C) = (0)$; càd

$$C^2 - C = (0).$$ D'où

$$\boxed{C^2 = C} .$$ CQFD.

③ Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par sa décomposition en blocs :

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} .$$

ⓐ Déterminer le polynôme caractéristique de M puis le polynôme minimal de M.

Le polynôme caractéristique de M est :

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_4)$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_2 & B \\ \hline (0) & C-\lambda I_2 \end{array}\right)$$

$$= \det(A-\lambda I_2) \cdot \det(C-\lambda I_2)$$

$$= P_A(\lambda) \cdot P_C(\lambda)$$

$$= (\lambda^2-1)(\lambda^2-\lambda)$$ (d'après les résultats de la 1ère question)

$$= (\lambda-1)(\lambda+1) \cdot \lambda(\lambda-1).$$ D'où

$$\boxed{P_M(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)}.$$

- Le polynôme minimal de M est de la forme :

($m_M(\lambda) = \lambda^\alpha (\lambda-1)^\beta (\lambda+1)^\gamma$

avec $1 \leq \alpha \leq 1$

$1 \leq \beta \leq 2$

$1 \leq \gamma \leq 1$

c.à.d $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta \in \{1, 2\}$.

D'où :

$$\boxed{m_M(\lambda) \in \left\{ \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) , \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1) \right\}}$$

Testons si le polynôme $\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$
$= \lambda(\lambda^2-1) = \lambda^3 - \lambda$ annule M.

On a :

$(\lambda^3-\lambda)(M) = M^3 - M$.

Calculons alors $M^3 - M$.

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^2 & AB+BC \\ (0) & C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & AB+BC \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

9) (Car $A^2 = I_2$ et $C^2 = C$).

D'où :

$$M^3 = M^2 \cdot M$$

$$= \begin{pmatrix} I_2 & AB + BC \\ (0) & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B + ABC + BC^2 \\ (0) & C^2 \end{pmatrix}$$

Comme $C^2 = C$ et

$$B + ABC + BC^2 = B + ABC + BC$$

$$= B + (A + I_2) BC$$

$$= B + (0) \quad \left(\text{Car } (A + I_2) BC = (0)\right)$$

$$= B$$

il en résulte que :

D'où : $M^3 = M$.

D'où $M^3 - M = (0)$.

Le polynôme $(\lambda^3 - \lambda)$ annule donc M et on a par conséquent :

$$\boxed{m_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

(b) En déduire que M est diagonalisable.

Comme $m_M(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et a toutes ses racines simples alors M est diagonalisable.

FIN