

## Corrigé de l'interrogation d'Algèbre 3

**Pour tout ce qui suit,  $k$  désigne un paramètre réel. On travaille sur le corps commutatif  $\mathbb{R}$  et on considère  $A_k$  la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :**

$$A_k := \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k \\ k & 1 & -1 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A_k$  et en déduire le spectre de  $A_k$ .**

Le polynôme caractéristique de  $A_k$  est :

$$\begin{aligned} P_{A_k}(\lambda) &:= \det(A_k - \lambda I_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2k - \lambda & 0 & -k \\ k & 1 - \lambda & -1 \\ k & 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En développant ce déterminant suivant sa deuxième colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{A_k}(\lambda) &= -0 \cdot \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & -\lambda \end{vmatrix} + (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2k - \lambda & -k \\ k & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2k - \lambda & -k \\ k & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \{ (2k - \lambda)(-\lambda) + k^2 \} \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2k\lambda + k^2) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda - k)^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$P_{A_k}(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - k)^2.$$

Les valeurs propres de  $A_k$  sont les racines de son polynôme caractéristique  $P_{A_k}$  et qui sont 1 et  $k$ . Soit

$$\text{SP}(A_k) = \{1, k\}.$$

**2) Montrer, sans calcul d'espace propre, que la matrice  $A_1$  n'est pas diagonalisable.**

D'après le résultat de la première question, on a  $\text{SP}(A_1) = \{1\}$ . Procédons par l'absurde en supposant que  $A_1$  est diagonalisable. Alors  $A_1$  s'écrit  $A_1 = PDP^{-1}$ , avec  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est diagonale et  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ . Comme  $D$  possède les mêmes valeurs propres que  $A_1$  (car  $D$  est semblable à  $A_1$ ) alors

on a forcément  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ . D'où  $A_1 = PDP^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ , ce qui est absurde puisqu'on

a visiblement  $A_1 \neq I_3$ . La matrice  $A_1$  n'est donc pas diagonalisable.

**3) En distinguant les valeurs de  $k$ , déterminer les espaces propres de  $A_k$  tout en précisant la dimension de chacun d'entre eux.**

Calcul de l'espace propre  $E(1)$  : On a :

$$E(1) := \text{Ker}(A_k - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(A_k - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(1)} \right\}.$$

On a :

$$(1) \iff \begin{cases} (2k-1)x - kz = 0 \\ kx - z = 0 \\ kx - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2k-1)x - kz = 0 \\ z = kx \end{cases} \iff \begin{cases} (k-1)^2 x = 0 \\ z = kx \end{cases} \quad (2)$$

On distingue les deux cas suivants :

1<sup>er</sup> cas (si  $k = 1$ ) : Dans ce cas, on a (2)  $\Leftrightarrow z = x$ . D'où :

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'ensuit que  $\dim E(1) = 2$ .

2<sup>nd</sup> cas (si  $k \neq 1$ ) : Dans ce cas, on a (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ . D'où :

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'ensuit que  $\dim E(1) = 1$ .

Calcul de l'espace propre  $E(k)$  :

• Si  $k = 1$ , on a d'après ce qui précède :

$$E(k) = E(1) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et par conséquent  $\dim E(k) = 2$ .

• Supposons pour la suite que  $k \neq 1$ . On a :

$$E(k) = \text{Ker}(A_k - kI_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(A_k - kI_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(3)} \right\}.$$

On a :

$$(3) \iff \begin{cases} kx - kz = 0 \\ kx + (1-k)y - z = 0 \\ kx - kz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k(x-z) = 0 \\ z = kx + (1-k)y \end{cases} \iff \begin{cases} k(1-k)(x-y) = 0 \\ z = kx + (1-k)y \end{cases} \quad (4)$$

On distingue les deux cas suivants :

1<sup>er</sup> cas (si  $k = 0$ ) : Dans ce cas, on a (4)  $\Leftrightarrow z = y$ . D'où :

$$E(k) = E(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'ensuit que  $\dim E(k) = \dim E(0) = 2$ .

2<sup>nd</sup> cas (si  $k \neq 0$ ) : Dans ce cas, puisqu'on a supposé aussi que  $k \neq 1$ , alors on a (4)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$ . D'où :

$$E(k) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'ensuit que  $\dim E(k) = 1$ .

En récapitulant, on a :

$$\dim E(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k \in \{0, 1\} \\ 1 & \text{si } k \notin \{0, 1\} \end{cases}.$$

**4) En déduire qu'il existe une unique valeur de  $k$  pour laquelle la matrice  $A_k$  est diagonalisable. On vous demande de préciser cette valeur de  $k$ .**

D'après le théorème fondamental de la diagonalisabilité des matrices, la matrice  $A_k$  est diagonalisable si et seulement si :

- i) Le polynôme caractéristique  $P_{A_k}$  de  $A_k$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .
- ii) Pour tout  $\lambda \in \text{SP}(A_k)$ , on a :  $\mathbf{m}_a(\lambda) = \mathbf{m}_g(\lambda)$ .

Le résultat de la première question montre que la condition i) est satisfaite pour tout  $k \in \mathbb{R}$  et d'après le résultat de la troisième question, on a :

- Pour  $k = 1$  :  $\mathbf{m}_a(1) = 3$  et  $\mathbf{m}_g(1) = 2$ . D'où  $\mathbf{m}_a(1) \neq \mathbf{m}_g(1)$ , ce qui entraîne que  $A_1$  n'est pas diagonalisable (on retrouve ainsi le résultat de la deuxième question).
- Pour  $k = 0$  :  $\mathbf{m}_a(1) = \mathbf{m}_g(1) = 1$  et  $\mathbf{m}_a(0) = \mathbf{m}_g(0) = 2$ . D'où  $A_0$  est diagonalisable.
- Pour  $k \notin \{0, 1\}$  :  $\mathbf{m}_a(1) = \mathbf{m}_g(1) = 1$  mais  $\mathbf{m}_a(k) = 2 \neq \mathbf{m}_g(k) = 1$ . D'où  $A_k$  n'est pas diagonalisable.

On conclut donc que :

$$\boxed{\text{La matrice } A_k \text{ est diagonalisable si et seulement si } k = 0}.$$

**5) Trigonaliser  $A_1$  puis exprimer  $A_1^n$  en fonction de  $n$  (où  $n$  est un entier naturel).**

Trigonalisons  $A_1$ . Comme  $P_{A_1}(\lambda) = -(\lambda-1)^3$  est visiblement scindé sur  $\mathbb{R}$  alors  $A_1$  est trigonalisable. L'unique valeur propre de  $A_1$  est  $\lambda_1 = 1$  et d'après le résultat de la troisième question, on a :

$$E(1) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \text{ avec } \mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Complétons la famille libre  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^3$ . On peut réaliser cette complétion avec le vecteur de la base canonique  $\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  car on a  $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}) = 1 \neq 0$ . Soit  $f$  l'endomorphisme que représente  $A_1$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On a donc :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 1\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= 1\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{e}) &= \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{e}, \end{aligned}$$

avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des réels à déterminer. Déterminons  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . On a :

$$f(\mathbf{e}) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{e} \iff A_1 \mathbf{e} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{e} \iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} .$$

D'où  $f(\mathbf{e}) = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{e}$ . La matrice associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e})$  de  $\mathbb{R}^3$  est donc :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est une matrice triangulaire supérieure.

La matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  vers la base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e})$  est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la formule de changement de base s'interprète par la relation matricielle :

$$T = P^{-1} A_1 P.$$

Explicitons maintenant  $A_1^n$  en fonction de  $n$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ). La relation  $T = P^{-1} A_1 P$  équivaut à  $A_1 = P T P^{-1}$ . Il en résulte grâce à un simple raisonnement par récurrence que l'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$A_1^n = P T^n P^{-1} \tag{5}$$

Nous allons nous en servir de la formule (5) pour trouver l'expression explicite de  $A_1^n$  en fonction de  $n$ . Pour ce faire, nous aurons besoin d'explicitier  $T^n$  en fonction de  $n$  puis de calculer  $P^{-1}$ .

Calcul de  $T^n$  : La matrice  $T$  se décompose en :

$$T = I_3 + N, \text{ avec } N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on a de toute évidence  $I_3 N = N I_3 (= N)$  alors on peut se servir de la formule du binôme matricielle pour développer  $(I_3 + N)^n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a d'après la formule du binôme matricielle :

$$T^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k.$$

Mais puisque  $N^2 = \mathbf{0}$  ( $N$  est nilpotente d'indice 2), il en résulte que :

$$T^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N = I_3 + nN.$$

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Calcul de  $P^{-1}$  : Pour tous  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ x + z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = -x' + z' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Ce qui montre que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

En reportant (6) et (7) dans (5), il vient finalement que l'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$A_1^n = P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

soit

$$A_1^n = \begin{pmatrix} 1+n & 0 & -n \\ n & 1 & -n \\ n & 0 & 1-n \end{pmatrix}.$$



B. FARHI