TD - série 2

Exercice 1:

1) ⊕ $I_1 = \int_0^1 ax\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

On a $I_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a\left(0 + \frac{k}{n}\right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a(n^2+n)}{2n^2} = \frac{a}{2}$

donc $I_1 = \frac{a}{2}$

⊕ $I_2 = \int_0^1 e^x\,dx$

On a $I_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$

On a $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = q^1 + q^2 + \dots + q^n = q\left(1 + q + \dots + q^{n-1}\right)$

$= q\left(\frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1-q}\right)$

$= q\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

donc $I_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{1}{n}} \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$

$\Rightarrow I_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

supposons $t = \frac{1}{n}$ $\quad t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

calculer $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t \cdot e^t}{1 - e^t}$.

On a $e^t = 1 + t + o(t)$

Donc $1 - e^t = -t + o(t)$ et $te^t = t + o(t)$

donc $\lim_{t\to 0} \frac{t e^t}{1-e^t} = \lim_{t\to 0} \frac{t+o(t)}{-t+o(t)} = -1$

donc $I_2 = -(1-e) = e-1$

2) * $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2(1+\frac{k^2}{n^2})}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, avec $x = \frac{k}{n}$

$1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq 1$

On a f est continue sur $]0,1]$, donc elle est R-integral sur cet intervalle, ~~Ave~~ Alors la somme de Riemann, $\cancel{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$

D'ou $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \ln(\sqrt{2})$

* $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \cancel{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n}{n} + \frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$

soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ avec $x = \frac{k}{n} \in]0,1] \subset [0,1]$

Alors d'après la somme de Riemon.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \int_0^1 (1+x)' (1+x)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

* $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

On a $\ln(v_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

soit $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in]0,1]$.

$\lim_{n\to+\infty} \ln v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

$\left| \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \\ v' = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{1+x} \\ v = x \end{array} \right.$

donc $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x \ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\,dx = \ln(2) - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \ln 2 - \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2)$$

$$= \ln(4) - 1$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \ln v_n = \ln(4) - 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{\ln v_n} = e^{\ln 4 - 1} = 4 \cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{e}$

* $(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)\, n^{-1-\alpha}$, $\alpha > -1$

On a $\lim_{n\to+\infty} (1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)\, n^{-1-\alpha}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f(x) = x^\alpha$, $x \in]0,1]$

donc f est R-integral sur $]0,1]$, donc la somme de Raiman.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$

* $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cos\left(x + \frac{k}{n}\pi\right)$

soit $f_x(t) = \cos(x + t\pi)$, $t = \frac{k}{n} \in]0,1]$

f est R-integrale sur $[0,1]$,

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_x\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f_x(t)\,dt$

$$= \int_0^1 \cos(x + t\pi)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\sin(x + t\pi)\right]_0^1$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\sin(x+\pi) - \sin x\right) = \frac{1}{\pi}(-\sin x - \sin x) = \frac{-2}{\pi}\sin x$$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cos\left(n+\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{-2}{\pi} \sin x}$

3) * $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

soient $f(t) = e^t$ et $g(t) = \frac{1}{t}$

* f est continue R-intégrale sur $[x, 2x]$, $x>0$
* g est R-integral sur $[x, 2x]$ et aussi toujours positive sur cet intervale.

donc $\exists c_x \in]x, 2x[$ tq $\int_x^{2x} f(t) g(t) dt = f(c_x) \int_x^{2x} g(t) dt$

$$= e^{c_x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = e^{c_x} [\ln t]_x^{2x}$$

$$= e^{c_x} (\ln 2x - \ln x) = e^{c_x} \ln 2$$

On a $c_x \in]x, 2x[\Rightarrow x \leq c_x \leq 2x$

$$\Rightarrow e^x \leq e^{c_x} \leq e^{2x}$$

$$\Rightarrow \ln 2\, e^x \leq \ln 2\, e^{c_x} \leq \ln 2\, e^{2x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln 2\, e^x}_{\ln 2} \leq \lim_{x\to 0^+} \ln 2\, e^{c_x} \leq \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln 2\, e^{2x}}_{\ln 2}$$

d'où $\lim_{x\to 0^+} \ln 2\, e^{c_x} = \ln 2$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2}$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{5n+2} \frac{\arctan t}{t}\, dt$

soient $f(t) = \text{Arctan } t$ et $g(t) = \frac{1}{t}$

* f est continue et R-integral sur $[n, 5n+2]$
* g est R-integrale et positive $[n, 5n+2]$

donc $\exists c_n \in]n, 5n+2[$ tq

$$\int_n^{5n+2} f(t)\,g(t)\,dt = f(c_n)\int_n^{5n+2} g(t)\,dt = \text{Arctan } c_n \int_n^{5n+2} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \arctan c_n \left[\ln t\right]_n^{5n+2}$$

$$= \arctan c_n \left(\ln(5n+2) - \ln(n)\right)$$

$$= \arctan c_n \cdot \ln\left(\frac{5n+2}{n}\right)$$

On a $c_n \in]n, 5n+2[\Rightarrow n < c_n < 5n+2$

$\Rightarrow \text{Arctan}(n) < \text{Arctan } c_n < \text{Arctan}(5n+2)$

$\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Atan}(n) \cdot \ln\left(\frac{5n+2}{n}\right)}_{\frac{\pi}{2} \quad \ln(5)} < \lim\limits_{n\to+\infty} \text{Atan } c_n \ln\left(\frac{5n+2}{n}\right) < \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Arctan}(5n+2) \cdot \ln\left(\frac{5n+2}{n}\right)}_{\frac{\pi}{2} \quad \ln(5)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \text{Arctan } c_n \ln\left(\frac{5n+2}{5}\right) = \frac{\pi}{2}\ln 5$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{5n+2} \frac{\text{Arctan } t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \ln 5$

Exercice 2 :

1)
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2x+4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

l'ensemble des primitives de g sur $[0, 1[$ est $\left\{ \frac{x^2}{2} + k_1 \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$

et l'ensemble des primitives de g sur $]1, 2]$ est

$$\left\{ -x^2 + 4x + k_2 \mid k_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

soit G une primitive de g sur $[0,2]$

alors : $\begin{cases} G(x) = \frac{x^2}{2} + k_1 & \text{si } x \in [0,1[\\ G(x) = -x^2 + 4x + k_2 & \text{si } x \in]1,2]. \end{cases}$

• prolongement par continuité de au point 1,

On a $\lim_{x \to 1^-} G(x) = \frac{1}{2} + k_1$ et $\lim_{x \to 1^+} G(x) = 3 + k_2$

d'où $\frac{1}{2} + k_1 = 3 + k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{-5}{2} + k_1$

soit $\overline{G}$ le prolongement par continuité de G au point 1

donc $\begin{cases} \overline{G}(x) = \frac{x^2}{2} + k_1 & \text{si } x \in [0,1[\\ \overline{G}(x) = -x^2 + 4x - \frac{5}{2} + k_1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$

Dérivabilité de $\overline{G}$ au point 1

On a $\lim_{x \to 1^-} \frac{\overline{G}(x) - \overline{G}(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} + k_1 - (\frac{1}{2} + k_1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 1 = \overline{G}'_g(1)$

et $\lim_{x \to 1^+} \frac{\overline{G}(x) - \overline{G}(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2 + 4x - \frac{5}{2} + k_1 - (\frac{1}{2} + k_1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(-x+3)}{\cancel{x-1}} = -1 + 3 = 2$

$= \overline{G}'_d(1)$

Donc $\overline{G}$ n'est pas dérivable en 1.

Alors g n'admet pas de primitive sur $[0,2]$.

2) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

(*) $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\, \text{Arcsin}\, x}$

calculer : $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\, A\sin x} dx$

Supposons que $t = \text{Arcsin}\, x$ Donc $x = \sin t$

Alors $dx = \cos t \, dt$ et $x^2 = \sin^2 t$

D'où $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\, A\sin x} = \int \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot t} dt$

On a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

Alors $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$

Donc $\int \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}\, t}\, dt = \int \frac{\cos t}{\cos t \times t}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt$

$= \ln t + c \quad , c \in \mathbb{R}$

On a $t = \text{Arcsin}\, x$

Alors $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\, \text{Arcsin}\, x} = \ln(\text{Arcsin}\, x) + c \quad , C \in \mathbb{R}.$

(*) $x \longrightarrow \frac{1}{x \ln x \ln x}$

Suppossons que $t = \ln x$ Donc $x = e^t$

Alors $dx = e^t dt$

Donc $\int \frac{dx}{x \ln x \ln x} = \int \frac{e^t}{e^t\, t \cdot t}\, dt = \int \frac{1}{t^2}\, dt$

$= -\int \frac{-1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} + c \quad , \in \mathbb{R}$

On a $t = \ln x$

Alors $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln x} = -\frac{1}{\ln x} + c \quad , C \in \mathbb{R}$

(*) $x \longrightarrow \frac{\text{sh}\, x}{1 + 4\, \text{ch}^2 x}$

On a $\int \frac{\text{sh}\, x}{1 + 4\,\text{ch}^2 x}\, dx = \int \frac{(\text{ch}\, x)'}{1 + (2\,\text{ch}\, x)^2}\, dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{(2\,\text{ch}\, x)'}{1 + (2\,\text{ch}\, x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\, \text{Arctan}(2\,\text{ch}\, x) + c$

D'où $\int \frac{\text{sh}\, x}{1 + 4\,\text{ch}^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\, \text{Arctan}(2\,\text{ch}\, x) + c \quad , C \in \mathbb{R}$

(*) $x \longrightarrow \sqrt{\cos x}\, \sin x$

On a $\int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = \int \sin x \cos^{\frac{1}{2}} x\, dx$

$$= \int -\cos'(x)\cos^{\frac{1}{2}}x\,dx = \frac{-1}{\frac{1}{2}+1}\int\left(\frac{1}{2}+1\right)\cos'(x)\cdot\cos^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$= \frac{-2}{3}\int\frac{3}{2}\cos'(x)\cdot\cos^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}x\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x + c \quad , \; c\in\mathbb{R}$$

car $\boxed{\left(f^n(x)\right)' = n\cdot f'(x)\cdot f^{n-1}(x)}$

Alors $\int\sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x + c \quad , \; c\in\mathbb{R}$

2eme methode:

Supposon que $t = \cos x \longrightarrow dt = -\sin x\,dx$

Alors $\int\sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = -\int\sqrt{t}\,dt = -\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$, $c\in\mathbb{R}$

Donc $\int\sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = \frac{-2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x + c \quad , \; c\in\mathbb{R}$

(*) $x \longrightarrow \sin^4 x\cos^3 x$

On a $\int\sin^4(x)\cos^3(x)\,dx = \int\sin^4(x)\cos^2(x)\cos(x)\,dx$

$$= \int\sin^4(x)\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx$$

On supposson que $t = \sin(x) \longrightarrow dt = \cos x\,dx$

Donc $\int\sin^4(x)\cos^3(x)\,dx = \int t^4\left(1-\cancel{\sin}^2\right)dt$

$$= \int\left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + c \,,\; c\in\mathbb{R}$$

Donc $\int\sin^4 x\cos^3(x)\,dx = \frac{1}{5}\sin^5(x) - \frac{1}{7}\sin^7(x) + c \quad , \; c\in\mathbb{R}$

(*) $x \longrightarrow \frac{1}{\cos x}$

1er méthode:

Supposson que $t = \sin x \longrightarrow dt = \cos x\,dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$

Donc $\int\frac{1}{\cos x}\,dx = \int\frac{1}{\cos x}\,\frac{dt}{\cos x} = \int\frac{1}{\cos^2 x}\,dt$

$$= \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\,dt = \int \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{argth}(t) + c \,,\quad c \in \mathbb{R}.$$

Donc $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \operatorname{argth}(\sin x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

2ème méthode:

On a $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin'(x)}{1-\sin^2(x)}\,dx$

$$= \operatorname{Argth}(\sin x) + c \,,\ c \in \mathbb{R}$$

Donc $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \operatorname{Argth}(\sin x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

(*) $x \longrightarrow \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch} x}$

On a $\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{1-1+\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch} x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{ch} x}\right) dx$

Supposons que $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

3) Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{\pi} x(2x+1)^n\,dx$$

1er méthode:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}$$

On a $\int_0^{\pi} x(2x+1)^n\,dx = \int_0^{\pi} x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x)^k\,dx$

Donc $I_1 = \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^{k+1} \, dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \int_0^{\pi} x^{k+1} dx$

Alors $I_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \left[\frac{x^{k+2}}{k+2} \right]_0^{\pi}$

D'où $\boxed{I_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \frac{\pi^{k+2}}{k+2}}$

$2^{\text{ème}}$ méthode,

On pose $t = 2x+1 \longrightarrow dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{2}$

et $x = \frac{t-1}{2}$

On a $\begin{cases} x=0 \\ x=\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2\pi+1 \end{cases}$

Donc $I_1 = \int_1^{2\pi+1} \left(\frac{t-1}{2}\right) t^n \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int (t^{n+1} - t^n) \, dt$

D'où $\boxed{I_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_1^{2\pi+1} - \frac{1}{4} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_1^{2\pi+1}}$

$3^{\text{ème}}$ méthode : par partie

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = (2x+1)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2(n+1)} (2x+1)^{n+1} \end{cases}$

On a $I_1 = [u \cdot v]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u' v \, dx$

Donc $\boxed{I_1 = \left[x(2x+1)^n \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{1}{2(n+2)} (2x+1)^{n+2} \right]_0^{\pi}}$

$I_2 = \int_0^2 \frac{x}{x^4+16} dx$

On a $I_2 = \frac{1}{16} \int_0^2 \frac{x}{\frac{x^4}{16}+1} dx = \frac{1}{16} \int_0^2 \frac{x}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+1} dx$

et On a $\left(\text{Arctan}\left(\frac{x^2}{4}\right) \right)' = \frac{\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}$

Donc $I_2 = \frac{1}{8} \int_0^2 \frac{\frac{x}{2}}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+1} dx = \frac{1}{8} \left[\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right) \right]_0^2$

Donc $\boxed{I_2 = \frac{1}{8}\left[\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)\right]_0^2}$

$I_3 = \int_2^3 \sqrt{e^x - 1}\, dx$:

On pose $u = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow u^2 + 1 = e^x$
$\Rightarrow \ln(u^2+1) = x$

$\Rightarrow dx = \frac{2u}{u^2+1} du$

Donc $I_3 = \int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^3-1}} u \cdot \frac{2u}{u^2+1} du$

Alors $I_3 = 2\int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du$

D'où $I_3 = 2\int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^3-1}} 1\, du - 2\int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{1}{u^2+1} du$

Donc $\boxed{I_3 = 2\left[u\right]_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^3-1}} - 2\left[\operatorname{Arctan}(u)\right]_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^3-1}}}$

$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2+4x+12}{x^2+4x+3} dx$

On a $I_4 = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{x^2+4x+3}\right) dx = \int_0^1 dx + 9\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$

et On a $\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$

$\frac{1}{x+3} = a + (x+1)\cdot\frac{b}{x+3} \xrightarrow[x=-1]{} a = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x+1} = b + (x+3)\frac{a}{x+1} \xrightarrow[x=-3]{} b = \frac{-1}{2}$

Donc $I_4 = 1 + 9\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+3} dx\right)$

D'où $I_4 = 1 + 9\left(\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x+3)\right]_0^1\right)$

Donc $I_4 = 1 + \frac{9}{2}\left(\ln(2) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

Alors $\boxed{I_4 = 1 + \frac{9}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

Supposons que $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$

et On a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - t^2$

Donc $I_5 = \int_0^1 \frac{+dt}{1+1-t^2} = \int_0^1 \frac{+dt}{2-t^2} = \int_0^1 \left(\frac{a}{\sqrt{2}-t} + \frac{b}{\sqrt{2}+t}\right) dt$

On a $\frac{1}{2-t^2}(\sqrt{2}-t) = a + \frac{b}{\sqrt{2}+t}(\sqrt{2}-t)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+t} = a + \frac{b}{\sqrt{2}+t}(\sqrt{2}-t) \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

et On a $\frac{1}{\sqrt{2}-t} = b + \frac{a}{\sqrt{2}-t}(\sqrt{2}+t) \Rightarrow b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Donc $I_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left[\ln(\sqrt{2}-t)\right]_0^1 + \left[\ln(\sqrt{2}+t)\right]_0^1\right)$

Alors $I_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\ln(2) + \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1)\right)$

D'où $I_5 = \frac{-\ln(2)}{2\sqrt{2}}$

$$I_6 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4(x)}\,dx$$

- $\cotan(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\cotan'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $1 + \cotan^2(x) = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

Donc $I_6 = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotan'(x)(1+\cotan^2 x)\,dx$

$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotan' x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotan' x \cdot \cotan^2 x\, dx$

$= \left[-\cotan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\left[\cotan^3(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

D'où $I_6 = \frac{4}{3}$

Exercice 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^3+1)^n}$$

1) $I = \int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1} dt$

On a : $(t^2-t+1)' = 2t+1$

et On a : $t^2-2 = \frac{1}{2}(2t-1) + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}(2t-1) - \frac{3}{2}$

~~donc I(x) =~~
donc $I(x) = \int_0^x \frac{\frac{1}{2}(2t-1) - \frac{3}{2}}{t^2-t+1} dt$

donc $I(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt - \frac{3}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2-t+1} dt$

$= \frac{1}{2}\left[\ln|t^2-t+1|\right]_0^x - \frac{3}{2} J(x)$

On a $J(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2-t+1} dt$

On a $t^2-t+1 = t^2 - 2\cdot\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

d'où : $J(x) = \int_0^x \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt$

$= \frac{4}{3}\int_0^x \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dt$

$= \frac{4}{3}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^x \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt$

donc : $J(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^x$

Alors : $I(x) = \frac{1}{2}\left[\ln|t^2-t+1|\right]_0^x - \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^x$

D'où $I(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Donc $I(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}$

2) $F(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k$$

pour $n=3$ $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

On a $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$

donc $\dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}$

Alors $F(t) = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Donc $(t+1)F(t) = a + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}(t+1)$

pour $t=-1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

et Donc $(t^2-t+1)F(t) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{t^2-t+1}{t+1} + bt+c$

pour $t=0$

$\Rightarrow F(0) = \dfrac{1}{3} + c \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{3} + c \Rightarrow c = \dfrac{2}{3}$

et on a $\lim\limits_{t \to +\infty} tF(t) = 0 = a+b \Rightarrow b = -a = \dfrac{-1}{3}$

D'où $F(t) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$

3) $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^3+1}$

On a $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^3+1} = \int_0^x \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(1+t)\right]_0^x - \frac{1}{3} I$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{3} I$$

Donc $I_1(x) = \dfrac{1}{3}\ln(1+x) - \dfrac{1}{3} I$

4) la relation entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$:

par partie :

On a $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(t)'\,dt}{(t^3+1)^n}$

Donc $I_n = \left[\frac{t}{(t^3+1)^n}\right]_0^x - \int_0^x t \cdot \left(\frac{1}{(t^3+1)^n}\right)' dt$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n u^{n-1} \cdot u'}{u^{2n}} = -\frac{n u'}{u^{n+1}}$$

Alors $I_n = \frac{x}{(x^3+1)^n} + n \int_0^x \frac{3t^3}{(t^3+1)^{n+1}} dt$

$$= \frac{x}{(x^3+1)^n} + 3n \int_0^x \frac{t^3+1-1}{(t^3+1)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{x}{(x^3+1)^n} + 3n \int_0^x \frac{t^3+1}{(t^3+1)^{n+1}} dt - 3n \int_0^x \frac{dt}{(t^3+1)^{n+1}}$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$I_n = \frac{x}{(x^3+1)^n} + 3n I_n - 3n I_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \left(\frac{x}{(x^3+1)^n} + 3n I_n - I_n\right) \frac{1}{3n}$$

$$= \frac{1}{3n} \cdot \frac{x}{(x^3+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$$

Donc $I_{n+1} = b_n + a_n I_n$

5) En déduire $I_2(x)$, Puis calculer $I_2(1)$:

(*) D'après la question (4) : $I_{n+1} = b_n + a_n I_n$:

pour $n = 1$

$$I_{1+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{(x^3+1)^1} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) I_1$$

Donc $I_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^3+1} + \frac{2}{3} I_1$

(*) et On a $I_2(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} I_1(1)$

Donc $I_2(1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} I_1(1)$