

SÉRIE N° 2

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul fixé. Considérons la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n - 1$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{i^2}{n^2} & \text{si } x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est une fonction en escalier.
- 2) Calculer en fonction de n , l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ de f sur $[0, 1]$.

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Considérons la fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que si ϕ et ψ sont deux fonctions en escalier telles que $\phi \leq f \leq \psi$. Alors $\phi \leq 0$ et $1 \leq \psi$.
- 2) En déduire que f n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Exercice 3. Considérons les fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = e^x.$$

- 1) Montrer que la fonction f est intégrable sur tout intervalle fermé borné de \mathbb{R} .
- 2) En utilisant la définition, calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.
- 3)* Refaire les questions 1) et 2) pour la fonction g .
- 4) Etudier l'intégrabilité des fonctions $h, k: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$h(x) = x - [x] \text{ et } k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 2] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

- 1) Montrer que si f est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$, et que $\int_a^b f(x) dx = 0$.
- 2) En déduire que si f est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a, b]$. Alors f est encore intégrable et la valeur de $\int_a^b f(x) dx$ ne change pas.
- 3) Montrer que si f est intégrable sur $[a, b]$. Alors sa restriction sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ est encore intégrable sur $[c, d]$.

Exercice 5. Considérons la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- 1) Calculer les sommes de Darboux (inférieure et supérieure) de f par rapport à la subdivision suivante $S_0 = \{0, 1/2, 1\}$ de $[0, 1]$.

2)* Même question pour la subdivision suivante $\mathcal{S}_1 = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ de $[0, 1]$.

3) En admettant que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Donner un encadrement de π par des nombres rationnels.

4) Pour une subdivision régulière (uniforme) de pas $1/n$, à quelle valeur de n on est sûr qu'on a une valeur approchée par excès de π à 10^{-3} près.

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que si $\int_a^b f(x) dx = 0$. Alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

2) En déduire que si $\int_a^b f(x) dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Alors f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$.

3) Montrer que si f est positive ou nulle. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

4) En déduire que si P est un polynôme réel. Alors $\int_a^b P^2(x) dx = 0 \implies P = 0$.

Exercice 7. En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite des suites suivantes :

1) $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ · 2) $S_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ · 3)* $T_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ · 4) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$.

5)* $V_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$ · 6) $W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$ · 7)* $X_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k}$ · 8) $Y_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{1/n}$ · 9)* $Z_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

* : La correction de cette question ne sera pas donné en classe.