

# Séries Numériques

Modeste ESSOH

Université Nangui Abrogoua/SFA

# Plan

- 1 Notion de série
- 2 Les séries à termes positifs
- 3 Série absolument convergente
- 4 Séries alternées
- 5 Comparaison entre séries et intégrales

# Plan

- 1 Notion de série
  - Terminologie des séries
  - Exemples Classiques de séries numériques
- 2 Les séries à termes positifs
- 3 Série absolument convergente
- 4 Séries alternées
- 5 Comparaison entre séries et intégrales

Dans tout ce cours,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $|\cdot|$  désigne respectivement la valeur absolue ou le module.

### Définition 1.1

À la suite  $(u_n)_n$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on associe la suite  $S_n$  définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad (1)$$

On appelle *série numérique de terme général*  $u_n$  le couple  $((u_n)_n, (S_n)_n)$ ; elle est notée  $\sum u_n$ .

$S_n$  est appelé la *somme partielle de rang*  $n$  de la série de terme général  $u_n$ ; la suite  $(S_n)_n$  est la suite des sommes partielles de cette série.

Ce vocabulaire reste valable pour une suite  $(u_n)_{n \geq p}$  définie à partir d'un certain rang  $p$ ; on note  $\sum_{n \geq p} u_n$  la série associée.

Ce vocabulaire reste valable pour une suite  $(u_n)_{n \geq p}$  définie à partir d'un certain rang  $p$ ; on note  $\sum_{n \geq p} u_n$  la série associée.

### Définition 1.2 : Convergence et divergence d'une série

On dit que la série  $\sum u_n$  *converge* si, et seulement si, la suite  $(S_n)_n$  de ses sommes partielles converge dans  $\mathbb{C}$ , sinon la série est dite *divergente*.

En cas de convergence, le nombre  $S = \lim_n S_n$  est appelé

*somme* de la série  $\sum u_n$ ; il est noté  $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ,  $k$  joue le rôle d'un indice muet. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le *reste de rang*

$n$  par  $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

On dit que deux séries numériques sont de même nature lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Le lemme suivant exprime que : la nature d'une série n'est pas modifiée lorsque l'on change l'indice de départ ; mais quand il y a convergence, la valeur de la somme peut être modifiée.

On dit que deux séries numériques sont de même nature lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Le lemme suivant exprime que : la nature d'une série n'est pas modifiée lorsque l'on change l'indice de départ ; mais quand il y a convergence, la valeur de la somme peut être modifiée.

### Lemme 1.3 : Changement d'indice de départ

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série numérique, et  $p \in \mathbb{N}$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq p} u_n$  sont de même nature. De plus si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{p-1} u_n + \sum_{n=p}^{+\infty} u_n.$$

## Proposition 1.4 : Condition NÉCESSAIRE de convergence

Si la série  $\sum u_n$  est convergente, alors la suite  $(u_n)_n$  tend vers 0 ; la réciproque est FAUSSE.

Si la suite  $(u_n)_n$  ne converge pas vers 0, alors la série  $\sum u_n$  est divergente (On dit alors qu'elle est grossièrement divergente.)

## Proposition 1.4 : Condition NÉCESSAIRE de convergence

Si la série  $\sum u_n$  est convergente, alors la suite  $(u_n)_n$  tend vers 0 ; la réciproque est FAUSSE.

Si la suite  $(u_n)_n$  ne converge pas vers 0, alors la série  $\sum u_n$  est divergente (On dit alors qu'elle est grossièrement divergente.)

## Proposition 1.5 : Convergence des séries parties réelle et imaginaire

La série à termes complexes  $\sum u_n$  est convergente si, et seulement si, les deux séries à termes réels  $\sum \Re(u_n)$  et  $\sum \Im(u_n)$  sont convergentes et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Re(u_k) + i \sum_{k=0}^{\infty} \Im(u_k).$$

## Théorème 1.6 : Critère de Cauchy pour une série

La série  $\sum u_n$  est convergente si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n > N_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

## Théorème 1.6 : Critère de Cauchy pour une série

La série  $\sum u_n$  est convergente si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n > N_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

## Proposition 1.7

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries *convergentes*; alors, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  la série  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

## Remarque

- 1 Si  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \lambda u_n$  sont de même nature.

## Remarque

- 1 Si  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \lambda u_n$  sont de même nature.
- 2 Si la série  $\sum u_n$  est convergente, les séries  $\sum v_n$  et  $\sum (u_n + v_n)$  sont de même nature ; en particulier, si la série  $\sum u_n$  est convergente et la série  $\sum v_n$  est divergente, alors la série  $\sum (u_n + v_n)$  est divergente.

## Remarque

- 1 Si  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \lambda u_n$  sont de même nature.
- 2 Si la série  $\sum u_n$  est convergente, les séries  $\sum v_n$  et  $\sum (u_n + v_n)$  sont de même nature ; en particulier, si la série  $\sum u_n$  est convergente et la série  $\sum v_n$  est divergente, alors la série  $\sum (u_n + v_n)$  est divergente.
- 3 Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont divergentes, on ne peut rien affirmer *a priori* quant à la nature de la série  $\sum (u_n + v_n)$ .

① Série géométrique : Soit  $z \in \mathbb{K}$ . La série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  s'appelle

la série géométrique de raison  $z$ .

Elle est convergente si et seulement si  $|z| < 1$ , et dans ce

cas 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

- ① Série géométrique : Soit  $z \in \mathbb{K}$ . La série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  s'appelle

la série géométrique de raison  $z$ .

Elle est convergente si et seulement si  $|z| < 1$ , et dans ce

$$\text{cas } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

- ② Série harmonique : La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  s'appelle la série harmonique. Elle est divergente.

- ① Série géométrique : Soit  $z \in \mathbb{K}$ . La série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  s'appelle

la série géométrique de raison  $z$ .

Elle est convergente si et seulement si  $|z| < 1$ , et dans ce

$$\text{cas } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

- ② Série harmonique : La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  s'appelle la série harmonique. Elle est divergente.

- ③ Série harmonique alternée : La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  s'appelle

la série harmonique alternée. Elle est convergente et sa

$$\text{somme est } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

- 4 Séries dites télescopiques : On désigne par ce terme familier des séries dont le terme général  $u_n$  peut s'exprimer sous la forme  $u_n = v_{n+1} - v_n$  pour une certaine suite  $(v_n)$ . On calcule alors les sommes partielles sous la forme :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) \\ &= v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \cdots + v_n - v_{n-1} + v_{n+1} - v_n \\ &= v_{n+1} - v_0 \end{aligned}$$

On en déduit que, La *série télescopique*  $\sum_n u_n$  converge si, et seulement si, la *suite*  $(v_n)_n$  est convergente et, dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

Exemple :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Exemple :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Exercice : Montrer que la suite  $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln n$  converge vers un nombre réel  $\gamma$  appelé constante d'Euler.

Exemple :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Exercice : Montrer que la suite  $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln n$  converge vers un nombre réel  $\gamma$  appelé constante d'Euler.

Exercice : Étudier la nature de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)}$

avec  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

# Plan

- 1 Notion de série
- 2 Les séries à termes positifs
  - Comparaison à une série de Riemann
  - Règle de d'Alembert
  - Règle de Cauchy
- 3 Série absolument convergente
- 4 Séries alternées
- 5 Comparaison entre séries et intégrales

## Définition 2.1 Série à termes positifs

On dit que  $\sum u_n$  est une série à *termes positifs* si, et seulement si,  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Définition 2.1 Série à termes positifs

On dit que  $\sum u_n$  est une série à *termes positifs* si, et seulement si,  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

La modification d'un nombre fini des termes d'une série et la multiplication par  $-1$  ne modifient pas la nature d'une série, mais modifient la somme de cette série. C'est pourquoi, tous les théorèmes de ce paragraphe qui concernent la nature d'une série à termes positifs sont encore valables pour les séries de signe constant à partir d'un certain rang.

## Théorème 2.2 : Caractérisation de la convergence d'une série à termes positifs

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs ; la série  $\sum u_n$  est convergente si, et seulement si, la suite  $(S_n)_n$  est majorée et dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_n S_n = \sup_n S_n$$

Sinon, la série  $\sum u_n$  est divergente et la suite  $(S_n)_n$  diverge vers  $+\infty$ .

### Proposition 2.3 : Critère de comparaison

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes *positifs* telles que  $0 \leq u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ .

- Si la série  $\sum v_n$  converge alors la série  $\sum u_n$  converge, et dans ce cas :

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si la série  $\sum u_n$  diverge alors la série  $\sum v_n$  diverge.

## Proposition 2.4 : Utilisation de $O$

Considérons deux séries à termes positifs  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  telles que  $u_n = O(v_n)$ ; alors :

- si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est une série convergente ;
- si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  est une série divergente.

### Proposition 2.4 : Utilisation de $O$

Considérons deux séries à termes positifs  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  telles que  $u_n = O(v_n)$ ; alors :

- si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est une série convergente ;
- si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  est une série divergente.

### Proposition 2.5 : Règle d'équivalence

Soient  $\sum u_n$  une série à termes positifs et  $\sum v_n$  une série à termes réels telles que  $u_n \sim v_n$ .

Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

## Définition 2.6 : Série de Riemann

Les séries de Riemann sont les séries  $\sum n^{-\alpha}$  où  $\alpha$  est un nombre réel.

## Définition 2.6 : Série de Riemann

Les séries de Riemann sont les séries  $\sum n^{-\alpha}$  où  $\alpha$  est un nombre réel.

## Théorème 2.7 : Nature des séries de Riemann

- La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

## Corrolaire 2.8 : Règle de comparaison avec une séries de Riemann

Soit  $\sum u_n$  une série à termes réels positifs.

- S'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l$  avec  $l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  sont de même nature.

## Corrolaire 2.8 : Règle de comparaison avec une séries de Riemann

Soit  $\sum u_n$  une série à termes réels positifs.

- S'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l$  avec  $l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  sont de même nature.
- S'il existe un réel  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$  alors la série  $\sum u_n$  est convergente.

## Corrolaire 2.8 : Règle de comparaison avec une séries de Riemann

Soit  $\sum u_n$  une série à termes réels positifs.

- S'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l$  avec  $l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  sont de même nature.
- S'il existe un réel  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$  alors la série  $\sum u_n$  est convergente.
- S'il existe un réel  $\alpha \leq 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$  alors la série  $\sum u_n$  est divergente.

## Proposition 2.9 : Règle de D'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $\ell = \lim_n u_{n+1}/u_n$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $\ell < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;

## Proposition 2.9 : Règle de D'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n u_{n+1}/u_n$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;

## Proposition 2.9 : Règle de D'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n u_{n+1}/u_n$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

## Proposition 2.9 : Règle de D'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n u_{n+1}/u_n$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

## Proposition 2.9 : Règle de D'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n u_{n+1}/u_n$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

Exemple : La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$  est convergente.

## Proposition 2.10 : Règle de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;

## Proposition 2.10 : Règle de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;

## Proposition 2.10 : Règle de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

## Proposition 2.10 : Règle de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

## Proposition 2.10 : Règle de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

Exemple : La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^n$  est convergente.

## Proposition 2.10 : Règle de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs tels que  $l = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$  ;

- si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge ;
- si  $l > 1$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  et la série  $\sum u_n$  diverge (grossièrement) ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure.

Exemple : La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^n$  est convergente.

On peut montrer que si la règle de d'Alembert s'applique, alors la règle de Cauchy aussi. Mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

## Exercice résolu

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \left[ 1 - \cos \left( \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \right) \right].$$

# Plan

- 1 Notion de série
- 2 Les séries à termes positifs
- 3 Série absolument convergente**
  - Définition
  - Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes
- 4 Séries alternées
- 5 Comparaison entre séries et intégrales

### Définition 3.1

La série  $\sum u_n$  est dite *absolument convergente* si, et seulement si, la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

### Définition 3.1

La série  $\sum u_n$  est dite *absolument convergente* si, et seulement si, la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

### Théorème 3.2

Toute série de terme général  $u_n$  absolument convergente est convergente et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

La réciproque est fausse.

### Définition 3.1

La série  $\sum u_n$  est dite *absolument convergente* si, et seulement si, la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

### Théorème 3.2

Toute série de terme général  $u_n$  absolument convergente est convergente et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

La réciproque est fausse.

Une série numérique qui est convergente mais qui n'est pas absolument convergente est dite parfois semi-convergente.

### Définition 3.3

On appelle produit (ou produit de Cauchy) des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ , la série  $\sum w_n$  où on pose pour tout  $n$

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

### Définition 3.3

On appelle produit (ou produit de Cauchy) des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ , la série  $\sum w_n$  où on pose pour tout  $n$

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

### Théorème 4.3

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries et  $\sum w_n$  leur série produit. Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes alors leur série produit  $\sum w_n$  est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

# Plan

- 1 Notion de série
- 2 Les séries à termes positifs
- 3 Série absolument convergente
- 4 Séries alternées**
- 5 Comparaison entre séries et intégrales

## Définition 4.1

Une série à termes réels  $\sum u_n$  est une *série alternée* si, et seulement si, son terme général vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

## Définition 4.1

Une série à termes réels  $\sum u_n$  est une *série alternée* si, et seulement si, son terme général vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

## Théorème 4.2 : Critère spécial des séries alternées

Soit  $\sum u_n$  une série alternée telle que la suite  $(|u_n|)_n$  converge vers 0 en **décroissant** ; alors,

## Définition 4.1

Une série à termes réels  $\sum u_n$  est une *série alternée* si, et seulement si, son terme général vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

## Théorème 4.2 : Critère spécial des séries alternées

Soit  $\sum u_n$  une série alternée telle que la suite  $(|u_n|)_n$  converge vers 0 en **décroissant** ; alors,

- la série  $\sum u_n$  converge ;

## Définition 4.1

Une série à termes réels  $\sum u_n$  est une *série alternée* si, et seulement si, son terme général vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

## Théorème 4.2 : Critère spécial des séries alternées

Soit  $\sum u_n$  une série alternée telle que la suite  $(|u_n|)_n$  converge vers 0 en **décroissant** ; alors,

- la série  $\sum u_n$  converge ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k \geq n+1} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$  et  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  est du signe de  $u_{n+1}$ .

### Corollaire 4.3 : Nature des séries alternées de Riemann

La série (alternée de Riemann)  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  diverge  
(grossièrement) pour  $\alpha \leq 0$  et converge pour  $\alpha > 0$ .

## Exercice résolu

Pour  $\alpha > 0$  et  $n > 1$ , on pose  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ . Étudions la nature de la série  $\sum u_n$ .

## Exercice résolu

Pour  $\alpha > 0$  et  $n > 1$ , on pose  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ . Étudions la nature de la série  $\sum u_n$ .

## Exercice résolu

Pour  $\alpha > 0$  et  $n > 1$ , on pose  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ . Étudions la nature de la série  $\sum u_n$ .

- Si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum u_n$  est absolument convergente puisque  $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ .

## Exercice résolu

Pour  $\alpha > 0$  et  $n > 1$ , on pose  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ . Étudions la nature de la série  $\sum u_n$ .

- Si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum u_n$  est absolument convergente puisque  $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ .
- Si  $0 < \alpha \leq 1$ , un développement limité à la précision  $\frac{1}{n^{2\alpha}}$  donne

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Ce qui montre que  $u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ .

La règle des équivalents pour les séries à termes de signe constant montre que  $\sum (u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$  converge si, et seulement si,  $2\alpha > 1$  et puisque  $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$  converge,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

En résumé, la série  $\sum \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$  est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .

## Remarque

La série  $\sum \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$  est une série divergente alors que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est convergente. La règle des équivalents est mise en défaut pour les séries qui ne sont pas à termes réels et de signe constant.

# Plan

- 1 Notion de série
- 2 Les séries à termes positifs
- 3 Série absolument convergente
- 4 Séries alternées
- 5 Comparaison entre séries et intégrales

## Théorème 5.1

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  une série réelle de terme général  $a_n \in \mathbb{R}$ . Soit

$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = a_n$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [n; n + 1[$ . Alors

## Théorème 5.1

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  une série réelle de terme général  $a_n \in \mathbb{R}$ . Soit

$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = a_n$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [n; n + 1[$ . Alors

- La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.

## Théorème 5.1

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  une série réelle de terme général  $a_n \in \mathbb{R}$ . Soit

$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = a_n$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [n; n + 1[$ . Alors

- La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.
- De plus, dans le cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

## Théorème 5.2

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ , que l'on suppose positive et décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Alors : la série  $\sum_{n \geq 0} f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.

## Théorème 5.2

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ , que l'on suppose positive et décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Alors : la série  $\sum_{n \geq 0} f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.

## Corollaire 5.3

Soit  $a \geq 0$ . Si  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$ , positive et décroissante sur  $[a, +\infty[$ . Alors : la série  $\sum_{n \geq 0} f(a + n)$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.

## Exercice d'application : Série de Bertrand

On fixe  $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Montrer que :

## Exercice d'application : Série de Bertrand

On fixe  $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Montrer que :

- 1 si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge pour tout  $\beta$

## Exercice d'application : Série de Bertrand

On fixe  $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Montrer que :

- 1 si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge pour tout  $\beta$
- 2 si  $\alpha < 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  diverge pour tout  $\beta$

## Exercice d'application : Série de Bertrand

On fixe  $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Montrer que :

- 1 si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge pour tout  $\beta$
- 2 si  $\alpha < 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  diverge pour tout  $\beta$
- 3 si  $\alpha = 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\beta > 1$ .

