

Suites et séries de fonctions

ESSO H Modeste

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA
UFR SFA

14 mars 2015

Notations :

Les notations suivantes seront utilisées :

- I est un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point ;
- \mathbb{K} désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} ;
- toutes les applications considérées sont des applications d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes
l'ensemble des applications de I vers \mathbb{K} est noté $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$
ou encore $\mathcal{F}(I)$.
- $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ (ou simplement $\mathcal{B}(I)$) est le sous-ensemble de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ formées des applications qui sont bornées sur I .

Norme de la convergence uniforme

Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$. On introduit le réel positif $\|f\|_\infty$ défini par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

On montre facilement que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ et pour réel $k \in \mathbb{R}$, on a :

- 1 $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- 2 $\|kf\|_\infty = |k| \|f\|_\infty$
- 3 $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ces trois propriétés se traduisent en disant que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme de l'espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

Plan

- 1 Suite de fonctions
 - Convergence simple et convergence uniforme
 - Convergence uniforme et continuité
 - Convergence uniforme, intégration et dérivation.
- 2 Série de fonctions

Définition de la notion de suite de fonctions

Définition 1.1

On appelle *suite de fonctions définies sur I* toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(I)$, c'est-à-dire la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$.

En d'autre terme $(f_n)_{n \geq 0}$ est suite de fonctions de I dans \mathbb{K} signifie que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans \mathbb{K} , c'est-à-dire $f_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $f_n(x) \in \mathbb{K}$.

Convergence simple

Définition 1.2

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge simplement sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ si, et seulement si, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge dans \mathbb{K} vers $f(x)$. Ce qui équivaut à :

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\varepsilon, x}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Convergence simple

Définition 1.2

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge simplement sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ si, et seulement si, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge dans \mathbb{K} vers $f(x)$. Ce qui équivaut à :

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\varepsilon, x}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La convergence simple de la suite $(f_n)_n$ vers f sur I implique la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ vers f sur toute partie $J \subset I$.

Exemple :

Etudions la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie sur $I = [0, +\infty[$ par $g_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + nx}$.

Exemple :

Étudions la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie sur $I = [0, +\infty[$ par $g_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + nx}$.

On a :

- $g_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(0) = 0$,

- pour $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + nx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx} = 1.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur

$$[0, +\infty[\text{ vers } g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Convergence uniforme

Définition 1.3

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge uniformément sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ceci équivaut encore à : les applications $(f_n - f)$ sont bornées sur I pour n assez grand et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{+\infty} = 0$.

Convergence uniforme

Définition 1.3

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge uniformément sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ceci équivaut encore à : les applications $(f_n - f)$ sont bornées sur I pour n assez grand et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{+\infty} = 0$.

Constatez la place du quantificateur $\forall x \in I$ et rappelez-vous que le rang N est indépendant de x , ce rang ne dépend que de ε .

- La convergence uniforme sur I implique donc la convergence simple sur I .

- La convergence uniforme sur I *implique* donc la convergence simple sur I .
- Attention ! La convergence simple sur I *n'implique pas* la convergence uniforme sur I .

- La convergence uniforme sur I implique donc la convergence simple sur I .
- Attention ! La convergence simple sur I n'implique pas la convergence uniforme sur I .
- Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I ; alors la suite $(|f_n|)_n$ converge uniformément vers $|f|$ sur I .

- La convergence uniforme sur I implique donc la convergence simple sur I .
- Attention ! La convergence simple sur I n'implique pas la convergence uniforme sur I .
- Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I ; alors la suite $(|f_n|)_n$ converge uniformément vers $|f|$ sur I .
- Si la suite $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) converge uniformément vers f (resp. g) sur I , la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_n$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur I pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- La convergence uniforme sur I implique donc la convergence simple sur I .
- Attention ! La convergence simple sur I n'implique pas la convergence uniforme sur I .
- Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I ; alors la suite $(|f_n|)_n$ converge uniformément vers $|f|$ sur I .
- Si la suite $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) converge uniformément vers f (resp. g) sur I , la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_n$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur I pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- Si la suite $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) converge uniformément vers f (resp. g) sur I , la suite $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers fg sur I .

Exemples :

- 1] Considérons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{n} x \exp(-nx)$.
Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} x \exp(-nx) = 0.$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

De plus $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \exp(-nx)(1 - nx).$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$	
$f'_n(x)$		+	0	-
$f_n(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0	

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Par conséquent la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

2] Considérons la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie sur $I =]0, +\infty[$ par $g_n(x) = \frac{1}{nx}$.

Il est clair que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$, mais ne converge pas uniformément sur I car :

il existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tel que pour $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $n = N$, il existe $x = \frac{1}{n}$, $|f_n(x) - 0| = \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 > \varepsilon$.

Proposition 1.4 : Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q > N_\varepsilon, \sup_{x \in I} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.4 : Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q > N_\varepsilon, \sup_{x \in I} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Remarque

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur I_1 et I_2 implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur la réunion $I_1 \cup I_2$; cette propriété se généralise à un nombre *fini* de parties.

La question abordée ici est de savoir si, lorsqu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f et que chaque f_n est continue, la fonction limite f est nécessairement continue.

La question abordée ici est de savoir si, lorsqu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f et que chaque f_n est continue, la fonction limite f est nécessairement continue.

Théorème 1.5

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I)$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I)$.

- (i) Soit a un point quelconque de I ; si chaque f_n est continue en a , alors f est continue en a .
- (ii) Si chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

La question abordée ici est de savoir si, lorsqu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f et que chaque f_n est continue, la fonction limite f est nécessairement continue.

Théorème 1.5

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I)$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I)$.

- (i) Soit a un point quelconque de I ; si chaque f_n est continue en a , alors f est continue en a .
- (ii) Si chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Par contraposée, ce théorème peut permettre de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme.

La question abordée ici est de savoir si, lorsqu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f et que chaque f_n est continue, la fonction limite f est nécessairement continue.

Théorème 1.5

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I)$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I)$.

- (i) Soit a un point quelconque de I ; si chaque f_n est continue en a , alors f est continue en a .
- (ii) Si chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Par contraposée, ce théorème peut permettre de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme.

Corollaire 1.6

Toute suite de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment de I a sa limite continue sur I .

Preuve du théorème 1.5

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I , on a :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in I, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

En utilisant la fonction f_N , on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

La continuité de f_N en a donne l'existence de $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta$ implique $|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi $|x - a| < \eta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ et f est continue en a .

Exemple :

On a vu que la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie sur $I = [0, +\infty[$ par $g_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + nx}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la

$$\text{fonction } g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction g n'est pas continue en 0 alors que chaque g_n est continue en 0, on en déduit donc que la suite de fonctions $(g_n)_n$ ne converge pas uniformément.

Théorème 1.7 : Complément important sur l'interversion des limites.

Soient I une partie non vide de \mathbb{R} et $a \in \bar{I}$ un point adhérent à I . Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose :

- d'une part, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a ,
- et d'autre part que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors

- 1 la suite (ℓ_n) converge dans \mathbb{K} ,
- 2 f admet une limite en a ,
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$

En d'autres termes $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Preuve.

- Montrons que la suite ℓ_n est de Cauchy dans \mathbb{K}
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur I assure :

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall p, q \geq N, \forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre x vers a , on obtient

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall p, q \geq N, |\ell_p - \ell_q| \leq \varepsilon.$$

La suite (ℓ_n) est donc de Cauchy dans \mathbb{K} , elle converge ainsi vers $\ell \in \mathbb{K}$.

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de ℓ_n vers ℓ assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de ℓ_n vers ℓ assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de ℓ_n vers ℓ assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Traitant ici le cas où $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ s'adaptent facilement)

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de ℓ_n vers ℓ assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Traitant ici le cas où $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ s'adaptent facilement)

Soit $n \geq N$, comme la limite de f_n en a est ℓ_n , donc :

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de ℓ_n vers ℓ assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Traitant ici le cas où $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ s'adaptent facilement)

Soit $n \geq N$, comme la limite de f_n en a est ℓ_n , donc :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| < \delta \implies |f_n(x) - \ell_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Montrons que la fonction f admet ℓ comme limite en a

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de ℓ_n vers ℓ assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Traitant ici le cas où $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ s'adaptent facilement)

Soit $n \geq N$, comme la limite de f_n en a est ℓ_n , donc :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| < \delta \implies |f_n(x) - \ell_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - a| < \delta$, on ait

$$|f(x) - \ell| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Montrons que la fonction f admet l comme limite en a
On a : $\forall x \in I, |f(x) - l| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f et la convergence de l_n vers l assurent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Traitant ici le cas où $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ s'adaptent facilement)

Soit $n \geq N$, comme la limite de f_n en a est l_n , donc :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| < \delta \implies |f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - a| < \delta$, on ait

$$|f(x) - l| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Théorème 1.8 : convergence uniforme et intégration sur un segment

Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , pour des réels fixés $a < b$, et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

- chaque f_n est continue sur I
- et la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors la suite $\int_a^b f_n(x) dx$ converge dans \mathbb{K} et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Preuve

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f , donc f est continue sur I , d'où l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = 0.$$

Corollaire 1.9 : convergence uniforme et primitives

Soient I un intervalle quelconque de \mathbb{R} (non vide, non réduit à un point). Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

- chaque g_n est continue sur I
- et la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Fixons un élément $a \in I$ quelconque et, pour tout $n \geq 0$, notons $h_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ la primitive de g_n sur I telle que $h_n(a) = 0$. Alors la suite (h_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une application $h : I \rightarrow \mathbb{K}$; de plus, g est continue sur I et h est la primitive de g sur I telle que $h(a) = 0$.

Corollaire 1.10 : convergence uniforme et dérivation

Soient I un intervalle quelconque de \mathbb{R} (non vide, non réduit à un point). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$ convergeant vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

- chaque f_n est de classe C^1 sur I
- et la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une application f ; de plus, f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

En d'autres termes, on a :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n.$$

Plan

- 1 Suite de fonctions
- 2 Série de fonctions
 - Convergence simple et uniforme d'une série de fonctions
 - Théorèmes de permutation
 - Convergence normale

Définition 2.1

Soit I une partie de \mathbb{R} . Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$.

On peut former la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k. \text{ Chaque } S_n \text{ est donc une fonction de } I \rightarrow \mathbb{K},$$

et tout ce que l'on a développé dans la première partie de ce chapitre s'applique en particulier à la suite (S_n) des sommes partielles.

Définition 2.1

Soit I une partie de \mathbb{R} . Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$.

On peut former la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k. \text{ Chaque } S_n \text{ est donc une fonction de } I \rightarrow \mathbb{K},$$

et tout ce que l'on a développé dans la première partie de ce chapitre s'applique en particulier à la suite (S_n) des sommes partielles.

• Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$; on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si, et seulement si, la suite de fonctions S_n converge simplement.

Dans ce cas, on note $S(x)$ la somme de la série $\sum f_n(x)$; on a :

$$\forall x \in I, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

- Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$; on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si, la suite de fonctions S_n converge uniformément.

Il résulte naturellement de l'étude des suites de fonctions qu'une série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente.

Proposition 2.2

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si, la suite $(R_n)_n$ de ses restes à l'ordre n converge uniformément sur I vers la fonction nulle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = 0$$

Exemple 1

- 1 $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- 2 $\sum e^{-n} e^{in^2 x}$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Exemple 2

- 1 $\sum \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
- 2 $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.
- 3 $\sum e^{-n} e^{in^2 x}$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Les théorèmes de continuité, d'interversion de limites, d'intégration ou de dérivation vus dans la première partie du chapitre sont vrais pour les suites de fonctions. Ils s'appliquent a fortiori aux séries de fonctions, qui en sont un cas particulier.

Théorème 2.3 : Théorème de continuité

Soient $\sum_n f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(I)$. On suppose que

$\sum_n f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I)$.

- (i) Soit a un point quelconque de I ; si chaque f_n est continue en a , alors f est continue en a .
- (ii) Si chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Théorème 2.4 : Théorème d'intégration

Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , pour des réels fixés $a < b$, et soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

- chaque f_n est continue sur I
- et la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I .

Alors la série $\sum_n \int_a^b f_n(x) dx$ converge dans \mathbb{K} et on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Théorème 2.5 : Théorème de dérivation

Soient I un intervalle quelconque de \mathbb{R} (non vide, non réduit à un point). Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{K}$

convergeant simplement sur I . On suppose que :

- chaque f_n est de classe C^1 sur I
- et la série $\sum_n f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout segment

inclus dans I vers une application f ; de plus, la somme $\sum_n f_n$ est de classe C^1 sur I et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n.$$

Définition 2.6

Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$; on dit que la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, la série de terme général $\sum_n \|f_n\|_\infty$ est une série convergente.

Ce qui est équivalent à :

l'existence d'une série numérique à *termes réels positifs* $\sum_n \alpha_n$ convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \alpha_n.$$

Théorème 2.7

Toute série $\sum_n f_n$ qui converge normalement sur I , converge absolument et uniformément sur I , et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$$

Théorème 2.7

Toute série $\sum_n f_n$ qui converge normalement sur I , converge absolument et uniformément sur I , et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$$

Preuve.

L'inégalité $|f_n(x)| \leq \|f_n\|$ pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ montre la convergence de $\sum_n |f_n(x)|$, c'est-à-dire l'absolue convergence de $\sum_n f_n(x)$ pour tout $x \in I$.

L'absolue convergence de $\sum_n f_n(x)$ donne les inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty$$

ce qui montre que $\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|$, et puisque

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (reste d'une série convergente),}$$

d'où $\|R_n\|$ tend vers 0. Ainsi il y a convergence uniforme.

$$\forall x \in I, \left| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|$$

Par passage à la borne supérieure sur x , on obtient le résultat demandé.

convergence normale



convergence uniforme



convergence absolue



convergence simple

Exercice :

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale pour chacune des séries suivantes :

1 $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}$ de la variable $x \in \mathbb{R}$

2 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ de la variable $x \in [0, +\infty[$

3 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ de la variable $x \in [0, +\infty[$

