COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME DE CÔTE D'IVOIRE

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

— ANALYSE 4 —

CNDHCI

Tehua Kobenan Alexis
facebook: Alexis lil'Ricky kshenho tehua
cel:0546234613/0757378446/0142703981
n°whatsapp: (+225) 0546234613

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA
Abidjan/côte d'Ivoire

Tehua

FICHE 1

UFR SFA / UNA — Année : 2015 / 2016

–*Licence 2* — *TD : Analyse 4* — *Fiche 1 et Fiche 2*

KAM

Exercice 1 OK

1. Les applications suivantes définies par
$$d_1(x,\ y) = |\sin x - \sin y| \quad \text{et} \quad d_2 = |x^2 - y^2|$$
sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
2. A quelle(s) condition(s) sur la fonction $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par
$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$
est-elle une distance sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 OK Compo. 2015-2016 .

Soit E un ensemble non vide.

1. Montrer que E muni de l'application d définie sur $E \times E$ par
$$d(x,\ y) = 1 \quad \text{si } x \neq y \quad \text{et} \quad d(x,\ x) = 0$$
est un espace métrique. d est alors appelé distance discrète.
2. Déterminer $B(x,\ r)$.
3. Déterminer les ouverts puis les fermés de $(E,\ d)$.
4. E est-il connexe ?

Exercice 3 OK

Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes suivantes :
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

1. Représenter les trois boules unité pour $n = 2$.
2. Montrer que pour tout $x = (x_1,\ \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

Indication : Pour montrer que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$, on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2\|y\|_2.$$

OK **Exercice 4**

Pour tout $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $N((x,\ y)) = \sup_{t\in[0,\ 1]} |x + ty|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déssiner la boule unité pour cette norme.

ok **Exercice 5**

Soit $(E,\ d)$ un espace métrique et soit $x \in E$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si x est limite d'une suite de points de A.

ok **Exercice 6**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si A est majorée alors, $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$.
2. Montrer que si A est minorée alors, $\inf(A)$ appartient à $\overline{A}$.

ok **Exercice 7**

Soient $(E,\ d)$ un espace métrique, A et B deux parties de E. Montrer les relations suivantes (dans le cas des inclusions, on montrera par des contres exemples que l'inclusion réciproque est fausse) :

1. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B), \quad Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B).$
   $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow Int(A) \cup Int(B) = Int(A \cup B)$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$
3. $\overline{E \backslash A} = E \backslash Int(A), \quad Int(E \backslash A) = E \backslash \overline{A}.$
4. $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$
   $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B).$
   $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A) \quad Fr(Int(A)) \subset Fr(A).$

NB : Pour toute partie A de E, $Int(A)$ désigne l'intérieur de A et $E \backslash A$ désigne le complémentaire de A dans E.

OK **Exercice 8**

On suppose que $\mathbb{R}$ est muni de sa métrique usuelle. Montrer que $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

Exercice 9

Montrer que dans un espace vectoriel normé E

$$\overline{B(a,\ r)} = B_f(a,\ r) \quad \text{et} \quad \mathring{B}_f(a,\ r) = B(a,\ r).$$

Ces résultats restent-ils vrais dans un espace métrique quelconque ?

Exercice 10

Montrer que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, il en ait de même de $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Déterminer $\mathring{F}$.

2. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 12

Montrer que si A est une parie d'un espace vectoriel normé E et O est un ouvert de E, alors l'ensemble $A + O$ défini par

$$A + O = \{a + b \, : \, a \in A, \, b \in B\}$$

est un ouvert de E.

Exercice 13

Soient E et F deux espaces métriques et $f \, : \, E \longrightarrow F$ une application.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer que si f est continue et surjective et si A est dense dans E c'est-à-dire que $\overline{A} = E$, alors $f(A)$ est dense dans F.

FICHE 2

UFR SFA / UNA — Année : 2015 / 2016

–Licence 2 — *TD : Analyse 4* — *Fiche 3 et Fiche 4*

OK **Exercice 1** Etudier les limites en $(0,\ 0)$ des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x,\ y)=\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad b)\ f(x,\ y)=\frac{x+2y}{x^2-y^2} \qquad c) f(x,\ y)=x^y.$$

OK **Exercice 2** On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,\ y)=\begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f.
3. f est-elle de classe C^1 ?

OK **Exercice 3** On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,\ y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0,\ 0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

OK **Exercice 4** Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{1}{2}(x^2-z^2),\ \sin x\sin y\right)$
2. $g(x,\ y)=\left(xy,\ \dfrac{1}{2}x^2+y,\ \ln(1+x^2)\right)$.
3. Calculer la matrice jacobienne de $f\circ g$ en $(x,\ y)$ d'une part en explicitant $f\circ g$ et d'autre part à l'aide d'un produit de matrice.

Exercice 5
Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g\ :\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$g(u,\ v)=f(u^2+v^2,\ uv).$$

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

OK $\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Montrer que l'équation

$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = g(x)$ en 1.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Montrer que l'equation

$$\cos(x^2 + y) + \sin(x + y) + e^{x^3 y} = 2$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction g admet un maximal local en 0.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Monter que l'équation

$$x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2$$

définit au voisinage du point $(1, -1)$ une fonction implicite $z = g(x, y)$. Donnez l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x, y)$ en $(1, -1)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Soit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u - v > 0\}$ et $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(u, v) = (u + v, uv).$$

Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert D sur un ouvert V que l'on précisera.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = \left(\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right)$$

1. Justifier que φ est de classe C^1.
2. Calculer la différentielle de φ et montrer que $d\varphi_{(x, y)}$ est inversible en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

OK $\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Déterminer les extrema (locaux et/ou) globaux des fontions f et g définies par :

OK 1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

OK 2. $g(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$.

OK $\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la nature du point critique $(0, 0)$.

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
2. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$
3. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Déterminer l'extremum local de la fonction f défini par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

TEHUA

UFR SFA / UNA **Année : 2015 / 2016**

–Licence 2 *TD : Analyse 4* *Fiche 5 et Fiche 6*

Exercice 1 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}.\, dt$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 2 On considère la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}dt.$$

1. Montrer que F est définie pour tout $x \geq 0$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 4 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

OK **Exercice 5** Calculer

$$I = \int\int_D xy\, dx\, dy$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

OK **Exercice 6** Calculer

$$I = \int\int_D x^2 dx\, dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, y \geq 0 \text{ et } y^2 \leq x\}$.

OK **Exercice 7** Calculer

$$I = \int\int_D \frac{dx\, dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

avec $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

OK× **Exercice 8** Calculer

$$I = \int\int_\Delta \sin(x+y) dx\, dy$$

où $\Delta = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ \text{et } x + y \leq \pi\}$.

OK **Exercice 9**

Calculer

$$I = \int\int_D \cos(x^2+y^2) dx\, dy$$

où D est le disque de centre O et de rayon R.

OK **Exercice 10** Calculer

$$I = \int\int_D x\, dx\, dy$$

où $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \leq 0\}$.

OK **Exercice 11** Calculer

$$I = \int\int_D (x+y)^2 dx\, dy$$

où $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \leq 0,\ x^2 + y^2 - y \geq 0,\ y \geq 0\}$.

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

ANALYSE 4

FICHE 1

EXERCICE 1

1. Soient les applications suivantes definies par :
$d_1(x,y) = |\sin x - \sin y|$ et $d_2(x,y) = |x^2 - y^2|$
Sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

* d_1

$d_1(x,y) = |\sin x - \sin y| \in \mathbb{R}^+$

$\forall x, y \in E \ / \ x = y$

$d_1(x,y) = |\sin x - \sin y| = |\sin x - \sin x|$

$d_1(x,y) = 0 \Rightarrow |\sin x - \sin y| = 0$

$\Rightarrow \sin x = \sin y$

$\Rightarrow x = y + 2k\pi$

d_1 n'est donc pas une distance sur $\mathbb{R}$.

* d_2

$d_2(x,y) = |x^2 - y^2| \in \mathbb{R}^+$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$d_2(2,-2) = 0$ or $2 \neq -2$

Conclusion : d_2 n'est pas une distance sur $\mathbb{R}$.

2/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ d(x,y) = |f(x) - f(y)|$

À quelle Condition sur f ; d est-elle une distance ?

$$d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$; $d(x,y) = d(y,x)$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

- Soit $x, y \in E \ / \ x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$
- Soit $x, y, \in E \ / \ d(x,y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow x = y$ si f est injective donc d est une distance.

Conclusion : d est une distance ssi f est injective.

EXERCICE 2 : Soit $E \neq \emptyset$

1/ Mq (E, d) est un espace metrique avec :

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

$d(x,y) \in \mathbb{R}^+ ; \forall (x,y) \in E \times E$

soit $(x,y) \in E^2$.

• si $d(x,y) = 1 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow y \neq x$

$\Rightarrow d(x,y) = 1 = d(y,x)$

• si $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow d(x,y) = d(y,x) = 0$

<u>Donc</u>: $\forall x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ par definition :

• $\forall x, y, z \in E$; $d(x,y) \leq ?\ d(x,z) + d(z,y)$

$\Rightarrow$ si $x = y$; $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z;y)$

car $d(x,z) \geqslant 0$ et $d(z,y) \geqslant 0$

* si $x \neq y$; $d(x,y) = 1$
* si $z = x \Rightarrow z \neq y$

$d(x,z) = 0$ et $d(z,y) = 1$

$d(x,y) \leq 1 \leq d(x,z) + d(z;y) = 1$

* si $z \neq x \Rightarrow d(x,z) = 1$

$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + d(z,y)$

Car $d(z,y) \geq 0$.

Par Consequent d est une distance sur E d'où (E,d) est un espace metrique.

<u>Rappel:</u> Un espace metrique est un espace sur lequel l'on peut definir des distances.

2/ Determinons $B(x,r)$ avec $r > 0$.

$B(x,r) = \{ y \in E \,/\, d(x,y) < r \}$

- si $r \leq 1$

$$
\begin{aligned}
y \in B(x,r) &\Leftrightarrow d(x,y) < r \leq 1 \\
&\Leftrightarrow d(x,y) < 1 \\
&\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = y.
\end{aligned}
$$

<u>Donc:</u> $\boxed{B(x,r) = \{x\}}$

- si $r > 1$; $\forall y \in E$.

- si $d(x,y) = 0 < r \Rightarrow x = y \in B(x,r)$
- si $d(x,y) = 1 < r \Rightarrow y \neq x$ et $y \in B(x,r)$

<u>Donc:</u> $\forall y \in E$; $y \in B(x,r) \Rightarrow E \subset B(x,r)$

or $B(x,r) \subset E$ <u>par</u> definition

Alors: $\boxed{B(x,r) = E}$

CNDHCI

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

3/ Determinons les ouverts puis les fermés de (E,d) :

* les Ouverts

Soit $A \subset E$, A est ouvert $\Leftrightarrow \forall x \in A , \exists r>0 / B(x,r) \subset A$

or pour $r = \frac{1}{2}$; $\forall x \in A$, $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset A \Rightarrow A$ ouvert.

Conclusion : Donc tout sous ensemble de E est ouvert par Consequent tout sous ensemble est Fermé, Car le Complémentaire est Ouvert.

4/ E est-il Connexe ?

E Connexe si les seuls ouverts et Fermés sont E et $\emptyset$; si Card $(E) > 1$ alors E n'est pas Connexe.

(Car $\exists A \subset E$ / $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ avec A ouvert et Fermé)

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^n$, on definit les normes suivantes :

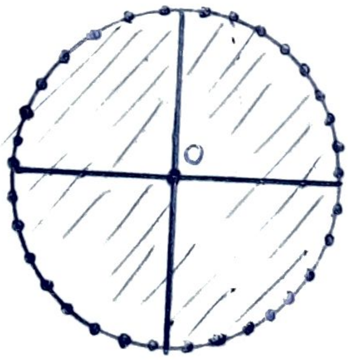
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \quad ; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1/ Répresentation des trois boules Unités pour $n = 2$.

- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$B_{\|\cdot\|_2}((0,0);1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y)-(0,0)\|_2 < 1\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y)\|_2 < 1\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} < 1\}$$

Ainsi nous avons $x^2+y^2 = 1$ etant l'equation d'un Cercle de Centre O et de rayon 1.



(boule ouverte ⇒ pointages)
(boule Fermée ⇒ traits)

- $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0);1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y)-(0,0)\|_\infty < 1\}$$

Abidjan, le.................................

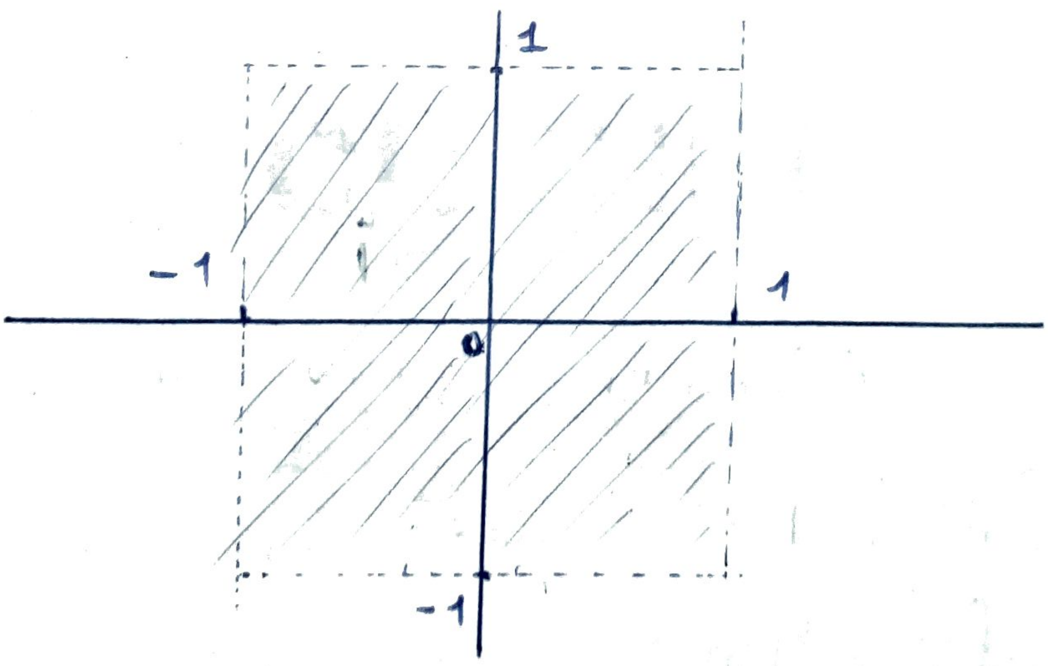
Le Secrétaire Exécutif,

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y)\|_\infty < 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \max_{1 \leq i \leq n}(|x|,|y|) < 1\}$$

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$$

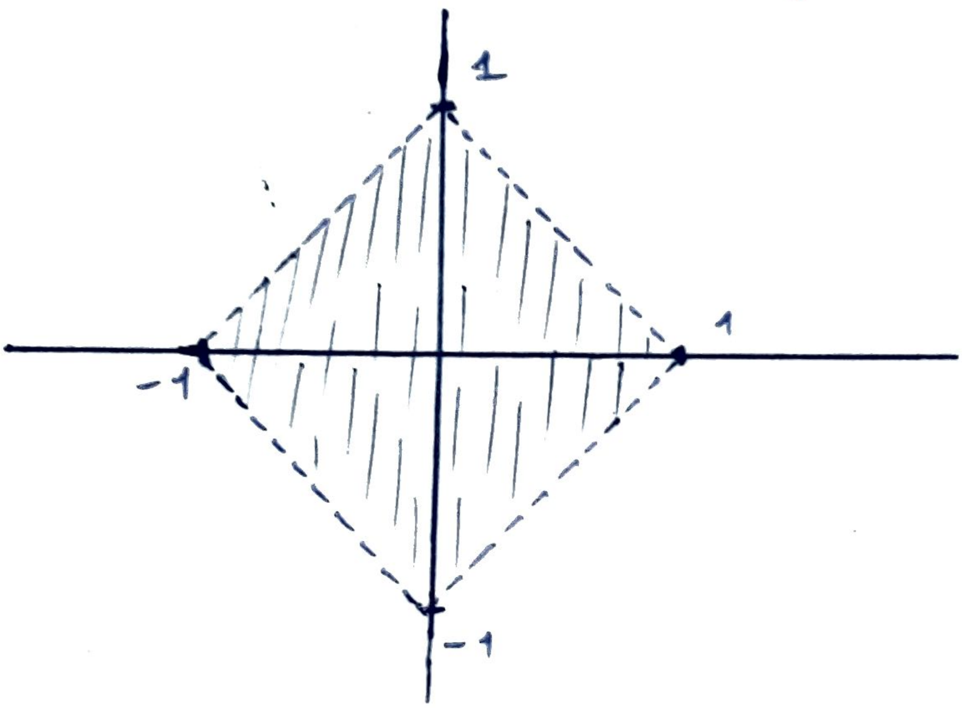
Ainsi nous avons : $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$



• $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$$B_{\|\cdot\|_1}((0,0);1) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y)-(0,0)\|_1 < 1\right\}$$
$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y\|_1 < 1\right\}$$
$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x| + |y| < 1\right\}$$

Ainsi nous avons : $|x| + |y| < 1$



2/ Montrons que $\forall\, x = (x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty .$$

Indication : Pour montrer que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$; on utilisera l'inegalité de Cauchy-Schwarz.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

Soit $x=(x_1;\dots;x_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

$\exists i_1\in\{1;\dots;n\} / \max_{1\leq i\leq n}|x_i|=|x_{i_1}|$

- $|x_{i_1}|=\sqrt{x_{i_1}^2}=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

$|x_{i_1}|=\sqrt{x_{i_1}^2}\Rightarrow\|x\|_\infty\leq\|x\|_2$ (1)

- $(|x_1|+\dots+|x_n|)^2=|x_1|^2+\dots+|x_n|^2+2\sum_{j\neq k}|x_j|.|x_k|$

$\left(\sum_{i=1}^n|x_i|\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)+2\sum_{j\neq k}|x_j|.|x_k|$

or $2\sum_{j\neq k}|x_j|.|x_k|\geq 0$ donc $\left(\sum_{i=1}^n|x_i|\right)^2\geq\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)$

Alors : $\left(\sum_{i=1}^n|x_i|\right)\geq\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}$

d'où $\|x\|_2\leq\|x\|_1$ (2)

• On a : $\left|\sum x_i y_i\right| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

posons : $y_i = 1$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \cancel{(1)^{1/2}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot (n)^{1/2}$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \qquad (3)$$

• Rmq : $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| = |x_{i_1}|$

on a ; $\forall i$; $|x_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$

$$|x_i|^2 \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2\right]^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left[n \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

$$\sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty \qquad (4)$$

Conclusion : Donc (1) ; (2) ; (3) et (4) ; nous pouvons etablir la relation à demontrer.

CNDHCI

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME DE CÔTE D'IVOIRE

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

Exercice 4

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; N\big((x,y)\big) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty|$

1/ Mq N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Soient (x,y) et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

- $N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| \in \mathbb{R}_+$ car $|x+ty| \geqslant 0$

- $N(x,y) = 0 \iff \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = 0$

$(x,y) = (0,0) \Rightarrow |x+ty| = 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = 0$

- $N(x,y) = 0 \Rightarrow \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = 0 \Rightarrow |x+ty| = 0 \; ; \; \forall t \in [0;1]$

En particulier

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; $t=0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0$; $\underset{t=1}{|x+ty| = |ty|} = 0 \Rightarrow y = 0$

<u>donc :</u> $N(x,y)=0 \Rightarrow x=y=0$

$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$; tq :

(i) $N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

(ii) $N(\lambda x)=|\lambda| N(x)$

(iii) $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$

- $N(\lambda(x,y)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda x + \lambda t y|$

$N(\lambda(x,y)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda| \cdot |x+ty|$

$N(\lambda(x,y)) = |\lambda| N(x,y)$

- Soient (x,y) et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

On a : $N((x,y)+(x',y')) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |(x+x')+t(y+y')|$

$= \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+x'+ty+ty'|$

$N((x,y)+(x',y')) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |(x+ty)+(x'+ty')|$

$|(x+ty)+(x'+ty')| \leq |x+ty|+|x'+ty'|$

$|(x+ty)+(x'+ty')| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |x'+ty'|$

<u>Donc :</u> $\sup\limits_{t\in[0,1]} |(x+ty)+(x'+ty')| \leq N(x,y)+N(x',y')$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$; $N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty|$

<u>Conclusion :</u> N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2/ Representation de la boule unité pour cette norme :

$B_1 = B_N((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, N((x,y)-(0,0)) < 1\}$

$$(x,y) \in B_1 \iff \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| < 1$$

<u>1er cas</u> : si $x \geq 0$ et $y > 0$

$\forall t \in [0,1]$; $x+ty \geq 0 \Rightarrow |x+ty| = x+ty$

$\Rightarrow f(t) = x+ty$

$\Rightarrow f'(t) = y > 0$; f est $\nearrow$

$$\sup_{t\in[0,1]} f(t) = f(1) = x+y$$

- <u>Cas 1</u> : si $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$(x,y) \in B_1 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x+y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ y < 1-x \end{cases}$$

- <u>Cas 2</u> : si $x \leq 0$ et $y \leq 0$; $x+ty \leq 0$

$|x+ty| = -x-ty$

$f(t) = -x-ty$

$f'(t) = -y > 0$ donc f est $\nearrow$

$$\sup_{t\in[0,1]} f(t) = f(1) = -x-y$$

Donc pour $x \leq 0$ et $y \leq 0$.

$$(x,y) \in B_1 \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ y < 0 \\ -x-y < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ y < 0 \\ y > -1-x \end{cases}$$

<u>Cas 3 :</u> $x \geq 0$ et $y > 0$

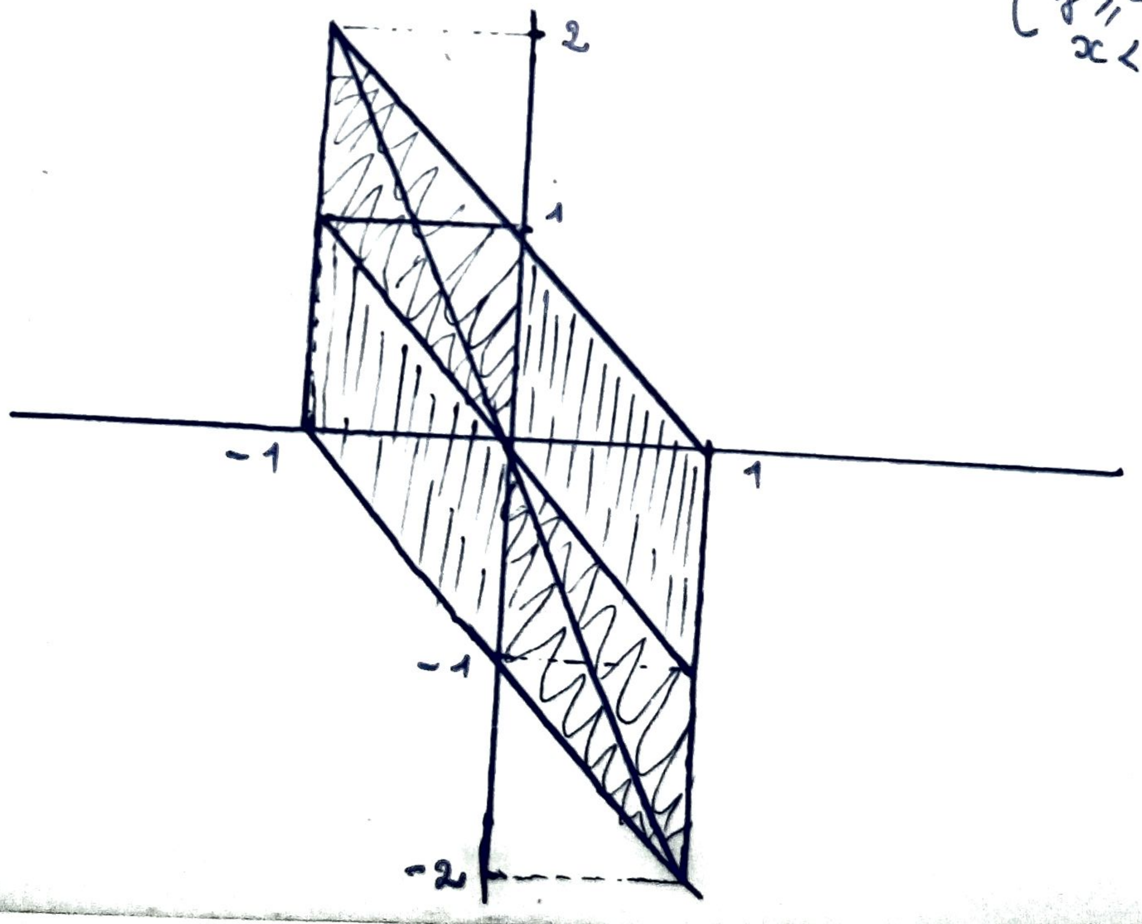
$$x + ty \geq 0 \iff t \leq -\frac{x}{y}$$

$$|x+ty| = \begin{cases} x+ty \ ; \text{ si } t \in \left]-\infty ; -\frac{x}{y}\right] \\ -x-ty \ ; \text{ si } t \in \left[-\frac{x}{y} ; +\infty\right[\end{cases}$$

i) • si $-\frac{x}{y} \geq 1 \iff y \geq -1$

<u>Alors :</u> $|-x+ty| = x+ty$ si $t \in [0;1]$ donc $f(t) = x+ty$

c.à.d $\sup_{t\in[0,1]} f(t) = f(0) = x$; $(x,y) \in B_1 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \geq -x \\ x < 1 \end{cases}$



Abidjan, le................................

Le Secrétaire Exécutif,

ii) $-\frac{x}{y} \leq 1 \Rightarrow -x \geq y$.

$$|x+ty| = \begin{cases} x+ty \ ; \text{ si } t \in [0 ; -\frac{x}{y}] \\ -x-ty \ ; \text{ si } t \in [-\frac{x}{y} ; 1] \end{cases}$$

- $\sup\limits_{t \in [0 ; -\frac{x}{y}]} |x+ty| = x$

- $\sup\limits_{t \in [-\frac{x}{y} ; 1]} |x+ty| = -x-y$

$$\sup |x+ty| = \begin{cases} x \ ; \text{ si } x \geq -x-y \\ -x-y \ ; \text{ si } x \leq -x-y. \end{cases}$$

$$(x,y) \in B_1 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \leq -x \\ y \geq -2x \\ x < 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \leq -x \\ y \leq -2x \\ -x-y < 1 \\ y > x-1 \end{cases}$$

EXERCICE 5

Soit $(E;d)$ un espace metrique et $x \in E$.
Mq $x \in \overline{A}$ ssi x est limite d'une suite de points de A.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de point de A qui tend vers x.
Alors pour $V \in \mathcal{V}(x)$; $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N$; $a_n \in V$; Comme $a_n \in A$ alors $a_n \in A \cap V \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{A}$.

Reciproquement : Soit $x \in \overline{A}$.

$B(x, \frac{1}{n})$ est un voisinage de x, il intercepte A.

- soit $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ alors a_n est une suite de point de A vérifiant $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$; d'où a_n est une Suite de A qui tend vers x ce qui signifie que $x \in \overline{A} \Rightarrow x$ est limite d'une suite de point de A.

EXERCICE 6

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1/ Mq si A est majorée alors $\sup(A) \in \overline{A}$.

Posons : $m = \sup(A)$

d'après la definition de la borne supérieure, on a :
$\forall \varepsilon > 0$; $\exists\, a_\varepsilon$ dans $A \,/\, m - \varepsilon \leq a_\varepsilon \leq m$
et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\exists a_n \in A \,/\, m - \frac{1}{n} \leq a_n \leq m$.

Abidjan, le...................................

Le Secrétaire Exécutif,

$\lim_{n\to+\infty} (m - \frac{1}{n}) = m$ alors d'après le theorème des grandeurs on a : $\lim_{n\to+\infty} a_n = m$.

Comme $m = \text{Sup}(A)$ est limite d'une suite de point de A alors $\text{Sup}(A) \in \overline{A}$.

2/ Mq si A est minorée alors $\inf(A) \in \overline{A}$.

Posons : $s = \inf(A)$

d'Après la definition de la borne inférieure, on a :

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists a_\varepsilon$ dans A / ... $s \leq a_\varepsilon < s + 1$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\exists a_n \in A$ / $s \leq a_n \leq s + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} s + \frac{1}{n} = s$ alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = s$.

Comme $s = \text{Inf}(A)$ est limite d'une suite de point de A alors $\text{Inf}(A) \in \overline{A}$.

EXERCICE 7

Soient $(E;d)$ une espace metrique et A, B deux parties de E

1/ Mq $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

NB: $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathrm{int}(A\cap B)$ et $\mathring{A}\cap\mathring{B} = \mathrm{int}(A)\cap\mathrm{int}(B)$

- $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subseteq \mathring{A}\cap\mathring{B}$?

on a : $\begin{cases} A\cap B \subseteq A \\ A\cap B \subseteq B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subseteq \mathring{A} \\ \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subseteq \mathring{B} \end{cases}$

$$\boxed{\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subseteq \mathring{A}\cap\mathring{B}}$$

Rappel: $\begin{cases} \mathring{A} \subseteq A \\ \mathring{B} \subseteq B \end{cases} \Rightarrow \mathring{A}\cap\mathring{B} \subseteq A\cap B$

- $\mathring{A}\cup\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$?

$\begin{cases} A \subseteq A\cup B \\ B \subseteq A\cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathring{A} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \\ \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \end{cases}$

$$\boxed{\mathring{A}\cup\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}}$$

- $A\cup\overline{B} = \overline{A}\cap B = \phi \Rightarrow \mathring{A}\cup\mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

Supposons $A\cap\overline{B} = \overline{A}\cap B = \phi$

Mq $\mathring{A}\cup\mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

on a deja : $\mathring{A}\cup\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

il suffit de mq $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \subseteq \mathring{A}\cup\mathring{B}$

Soit $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x,r) \subseteq A \cup B$.

$x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subseteq A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$

- si $x \in A$

Supposons : $x \notin \overset{\circ}{A} \Rightarrow \forall \alpha > 0 \,;\, B(x,\alpha) \not\subseteq A$

or $B(x,r) \subseteq A \cup B$

On peut Construire une suite de points de B Convergents vers x. Donc $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$ Absurde

Donc $x \in A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$

de m̂ $x \in B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$

Donc $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$

$$B\left(x, \frac{r}{n}\right) \subseteq B(n, r) \subseteq A \cup B$$

Soit $B\left(x, \frac{r}{n}\right) \subseteq A \cup B$

$B\left(x, \frac{r}{n}\right) \not\subseteq A$

$\exists a_n \in B(x,r) \,/\, A \Rightarrow a_n \in B$ et $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

$\Rightarrow x \in \overline{B}$; $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow$ Absurde.

Application : $A =]1;2[$; $B =]2;3[$

$\bar{A} = [1;2]$; $\bar{B} = [2;3]$

$\mathring{A} =]1;2[$; $\mathring{B} =]2;3[$

- $A \cup B =]1;3[$
- $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} =]1;3[\neq]1;2[\cup]2,3[$

Donc $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$

2/

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\begin{cases} A \subset \bar{A} \Rightarrow A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B} \\ B \subset \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{\bar{A} \cup \bar{A}} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$$

* $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$?

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\overline{A \cap B} \not\subset \bar{A}} \quad \bar{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \cancel{\overline{A \cap B} \not\subset \bar{B}} \quad \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{A} . \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}}$$

Par Conséquent : $\boxed{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$

- Mq $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \bar{B} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}}$$

Abidjan, le....................................

Le Secrétaire Exécutif,

3/ Mq $\overline{E\setminus A} = E\setminus \mathring{A}$

$\overline{E\setminus A} \subset E\setminus \mathring{A}$?

Soit $x \in \overline{E\setminus A}$

$\Rightarrow \forall r>0 \,;\, B(x,r)\cap(E\setminus A)\neq\emptyset$

$\Rightarrow B(x,r)\not\subset A \,;\, \forall r>0$

$\Rightarrow x\notin \mathring{A} \Rightarrow x \in E\setminus \mathring{A}$ d'où $\boxed{\overline{E\setminus A} \subset E\setminus \mathring{A}}$

• Mq $\overset{\circ}{\overline{E\setminus A}} = E\setminus \bar{A}$

$E\setminus \mathring{A} \subset E\setminus \bar{A}$?

Soit $x\in E\setminus \mathring{A}$

$\Rightarrow x\notin \mathring{A} \Rightarrow \forall r>0 \,;\, B(x,r)\not\subset A$

$\Rightarrow B(x,r)\cap(E\setminus A)\neq 0$

$\Rightarrow x\in \overline{E\setminus A}$; $\overset{\circ}{\overline{E\setminus A}} = E\setminus \bar{A}$

Soit $x\in \overset{\circ}{\overline{E\setminus A}}$

$\Leftrightarrow \exists r>0 \,/\, B(x,r)\subset E\setminus A$

$\Leftrightarrow B(x,r)\cap A=\emptyset$

$\Leftrightarrow x\notin \bar{A} \Leftrightarrow x\in E\setminus A$ donc $\boxed{\overset{\circ}{\overline{E\setminus A}} = E\setminus \bar{A}}$

4/ • Mq : $Fr(A\cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

$$\overline{A\cup B} \setminus (\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}) \subset (\bar{A}\setminus\mathring{A}) \cup (\bar{B}\setminus\mathring{B}) \ ?$$

soit $x \in \overline{A\cup B} \setminus (\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}})$

$\Rightarrow x \in \overline{A\cup B}$ et $x \notin (\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}})$

$\Rightarrow x \in \bar{A}\cup\bar{B}$ et $\forall r>0 \ ; B(x,r) \not\subset (A\cup B)$.

Supposons $x \in \bar{A}$

$\forall r>0 \ ; B(x,r) \not\subset (A\cup B)$

si $x \in \mathring{A}$; $\exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq A \subseteq A\cup B$

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq A\cup B$ Absurde.

Donc $x \notin \mathring{A}$; Alors $x \in \bar{A}\setminus\mathring{A} = Fr(A)$

de même si $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{B}\setminus\mathring{B} = Fr(B)$

D'où $\boxed{Fr(A\cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)}$

<u>Contre exemple</u>

$A =]1;2] \Rightarrow Fr(A) = \{1;2\}$

$B =]2;3] \Rightarrow Fr(B) = \{2;3\}$

$A\cup B =]1;3] \Rightarrow Fr(A\cup B) = \{1;3\}$

d'où $Fr(A\cup B) \neq Fr(A) \cup Fr(B)$

on a déjà $Fr(A\cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$

Donc Mq : $Fr(A) \cup Fr(B) \subseteq Fr(A\cup B)$

soit $x \in Fr(A) \cup Fr(B)$

$\Rightarrow x \in Fr(A)$ ou $x \in Fr(B)$

si $x \in Fr(A) \Rightarrow x \in \bar{A}$ et $x \notin \mathring{A}$.

CNDHCI

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

Comme $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$.

Supposons $x \in \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$.

$\exists r > 0 \;/\; B(x,r) \subseteq A \cup B$ ①

or $x \notin \overset{\circ}{A} \Rightarrow B(x,r) \not\subseteq A$ ②

① et ② $\Rightarrow \exists$ une suite de points de B Convergents vers x.

donc : $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ Ce qui est Absurde.

Alors : $x \notin \overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \Rightarrow x \in Fr(A \cup B)$ d'où l'égalité.

EXERCICE 8

On suppose que $\mathbb{R}$ est muni de sa metrique Usuelle.

Mq $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

Supposons que $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} \neq \emptyset$

$\overset{\circ}{\mathbb{Z}} \neq \emptyset$; $\exists x \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}$; $\exists r > 0 \;/\; B(x,r) \subseteq \mathbb{Z}$.

$B(x,r) =]x-r ; x+r[$; $\exists a, b \in \mathbb{Z} \;/\; \frac{a}{b} \in B(x,r)$ avec $(a;b) = 1$

$\frac{a}{b} \in B(x,r) \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\exists q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$; $0 < q < 1$ et $0 < q < r$

$\Rightarrow n+q \in B(n,r)$ et $n+q \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow B(n,r) \not\subset \mathbb{Z}$ Absurde

$\Rightarrow B(n,r) \not\subset \mathbb{Z}$ Absurde

<u>Donc</u> : $\boxed{\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset}$

Abidjan, le...................................

Le Secrétaire Exécutif,

FICHE 2

EXERCICE 1 : Etude de limites en $(0;0)$ de fonctions :

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

• **1ère methode**

Posons : $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$; $R>0$ et $\theta \in [0;2\pi]$

$f(R\cos\theta ; R\sin\theta) = \dfrac{\sin(R^2\cos\theta\sin\theta)}{\sqrt{R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}$ or $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$f(R\cos\theta ; R\sin\theta) = \dfrac{\sin(R^2\cos\theta\sin\theta)}{R}$

$\sin(R^2\cos\theta\sin\theta) \underset{0}{\sim} R^2\cos\theta\sin\theta$.

$f(R\cos\theta ; R\sin\theta) \underset{0}{\sim} R\cos\theta\sin\theta \xrightarrow[R=0]{} 0$

2^{eme} methode

$$|\sin xy| \leq |xy|$$

$$|\sin xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\frac{|\sin xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{|\sin xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1/2} = 0$$

b/ $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$

posons: $y = tx$

$$f(x,tx) = \frac{x+2tx}{x^2-t^2x^2} = \frac{1+2t}{x(1-t^2)}$$

- si $t=0$; $f(x;0) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \pm\infty$ n'existe pas.

Conclusion : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$ n'existe pas qd $(x,y) \to (0;0)$

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

c/ $f(x,y) = x^y = e^{y\ln x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(f(x,y))\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \ ?$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$$

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1$ ①
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$ ②

① $\neq$ ② $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

EXERCICE 2

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1/ Etude de Continuité sur $\mathbb{R}^2$.

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

f est Continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ Comme Composé de fonction Continue $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} f(0;0)$.

Posons : $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

$$f(R\cos\theta; R\sin\theta) = R^2\cos^2\theta\, R^2\sin^2\theta \ln\left(R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right)$$
$$= R^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln(R^2)$$

$$f(R\cos\theta; R\sin\theta) = R^4\ln(R^2) \xrightarrow[R=0]{} 0$$

Donc : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0;0)$.

donc f est Continue sur $\mathbb{R}^2$.

2/ Etudions l'existence et la Continuité des derivées partielles prémières de f.

- si $(x,y) \neq (0;0)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^2\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^2y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$

- si $(x,y) = (0,0)$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

$$\frac{\partial f}{\partial(x)}(0;0) = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ de même symétrie $\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ? \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} \underbrace{2xy^2 \ln(x^2+y^2)}_{0} + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

posons : $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2} = 2R^3 \sin^2\theta \cos^3\theta \xrightarrow[R \to 0]{} 0$$

3/ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Donc f est de classe C^1 en $(0;0)$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mq f admet une derivée en $(0;0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être Continue.

• Continuité en $(0;0)$ de f.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?\ f(0;0)$$

posons : $x = \sqrt{y}$

$$f(\sqrt{y};y) = \frac{y^2}{y^2+y^2} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Posons : $y = x$

$$f(x,x) = \frac{x^3}{x^4+x^2} = \frac{1}{1-x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad (2)$$

$(1) \neq (2)$ donc f n'est pas Continue en $(0;0)$

• Existence de la derivée en $(0;0)$ selon tout vecteur (x,y)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(x,y)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 x^2 y}{(t^3x^4+t^2y^2)t} = \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

posons : $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(x,y)) - f(0,0)}{t} = \lim_{R\to 0} \frac{2R^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{R^2} = 2R^3\cos^3\theta\sin^2\theta \xrightarrow[R=0]{} 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(x,y)) - f(0,0)}{t} = 0$$

Donc la derivée directionnelle existe selon tout vecteur non nul.

EXERCICE 4

Justifions que les fonctions suivantes sont differentiables et calculons leur matrice Jacobienne.

1/ $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2) ; \sin x \sin y\right)$

$$D_f = \mathbb{R}^3 ; \quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f = (f_1 ; f_2)$$

f_1 et f_2 sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ par conséquent f est differentiable.

* Matrice Jacobienne de f.

$$J_f(x,y;z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}$$

2/ $g(x,y) = \left(xy \,;\, \frac{1}{2}x^2 + y \,;\, \ln(1+x^2)\right)$

$g(x,y) = \left(g_1(x,y) \,;\, g_2(x,y) \,;\, g_3(x,y)\right)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;;\; g_1 g_2 g_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$

$D_g = \mathbb{R}^2.$

$g_1 ; g_2$ et g_3 sont de C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Donc f est differentiable.

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

3/ <u>Calculons</u> : $J_{fog}(x,y) = J_f\left(g(x,y) \times J_g(x,y)\right)$

$$J_{fog}(x,y) = \begin{pmatrix} xy & 0 & -z\ln(1+x^2) \\ \cos(x,y)\sin\left(\frac{1}{2}(x^2+y)\right) & \sin(x,y)\cos\left(\frac{1}{2}(x^2+y)\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{f\circ g}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 - \dfrac{2xz\ln(1+x^2)}{1+x^2} & x^2y \\ y\cos(x,y)\sin\left(\frac{1}{2}(x^2+y)\right) + x\sin(x,y)\cos\left(\frac{1}{2}(x^2+y)\right) & x\cos(x,y)\sin\left(\frac{1}{2}(x^2+y)\right) + \sin(x,y)\cos\left(\frac{1}{2}(x^2+y)\right) \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6

Soit $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$

Mq l'equation definit au voisinage du point o une Fonction implicite $y = g(x)$ / $g(1) = 0$.

Donnons l'equation de la tangente à la Courbe $y = g(x)$ en 1.

Posons : $f(x,y) = \ln x + e^{\frac{y}{x}} - 1$

f est de classe C^1 sur D_f.

$f(1,0) = \ln(1) + e^0 - 1$

$f(1,0) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \neq 0$$

D'après le theorème des Fonctions implicites l'equation $f(x,y)=0 \Leftrightarrow \ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$ definie au voisinage du point 0 ; $y = g(x)$: Fonction implicite.

$$g'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x;g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x;g(x))}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x;g(x)) = \frac{1}{x} - \frac{g(x)}{x} e^{\frac{g(x)}{x}}$$

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x} + \frac{g(x)}{x} e^{\frac{g(x)}{x}}}{\frac{1}{x} e^{\frac{g(x)}{x}}}$$

$$g'(x) = \frac{-1 + \frac{g(x)}{x} e^{\frac{g(x)}{x}}}{e^{\frac{g(x)}{x}}}$$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

Ainsi : $g'(1) = 1$

l'équation de la tangente.

$$y = g'(x)(x-1) + g(x)$$

$$\boxed{y = -x + 1}$$

EXERCICE 11

Determinons les extrema (Locaux et/ou) globaux des Fonctions f et g.

1/ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

• point critique (x,y)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$x = 0$ ou $x = 1$

$y = 0$ ou $y = 1$

les points Critiques sont :

$(0;0)$ et $(1;1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$$

Notion de Monge

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

- si $(rt - s^2) > 0$ et $r > 0 \Rightarrow$ minimum local
- si $(rt - s^2) > 0$ et $r < 0 \Rightarrow$ maximum local
- si $(rt - s^2) < 0$ pas d'extremum
- si $(rt - s^2) = 0$ indetermination.

- si $(a, b) = (0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} r = 0 \\ s = 3 \\ t = 0 \end{array}\right\} rt - s^2 = -9 < 0$$ donc pas d'extremum.

- si $(a, b) = (1, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} r = 6 \\ s = 3 \\ t = 6 \end{array}\right\} rt - s^2 = 36 - 9 > 0 \text{ et } r = 6 > 0$$

Donc f admet un minimum local au point $(1 ; 1)$.

2/ $f(x,y) = y(x^2+(\ln y)^2) = yx^2 + y(\ln y)^2$

• point critique : (x,y)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2yx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y$$

$$\begin{cases} 2yx = 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\ln y)^2 + 2\ln y = 0 \end{cases}$$

posons : $X = \ln y$

$X^2 + 2X = 0$

$X(X+2) = 0$

$X = 0$ ou $X + 2 = 0$

$X = 0$ ou $X = -2$

or $X = \ln y$

donc $\ln y = 0$ ou $\ln y = -2$

$y = 1$ ou $y = e^{-2}$

Alors : $x = 0$ ou $x = 0$

$y = 1$ ou $y = e^{-2}$

• points critique : $(x,y) = (0;1)$ et $(x,y) = (0;e^{-2})$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\ln y}{y} + \frac{2}{y} = \frac{2\ln y + 2}{y}$$

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x$$

• si $(x,y) = (0;1)$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,1) = 2$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,1) = 2$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 0$$

$rt - s^2 = 4 > 0$ et $r > 0$ donc f admet un minimum local au point $(0;1)$

• si $(x,y) = (0;e^{-2})$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0;e^{-2}) = 2e^{-2}$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0;e^{-2}) = \frac{-2}{e^{-2}}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;e^{-2}) = 0$$

$rt - s^2 = -4 < 0$ donc pas d'extremum.

Siège social : Abidjan - Cocody, près de l'Ecole de Gendarmerie, Carrefour CHU à droite - 01 BP 1375 Abidjan 0
Tél. : (225) 22 48 21 35 - Fax (225) 22 48 21 39 - Mail : info@cndhci.net - Site web : www : cndhci.ci - Numéro Vert : 800 00 88

EXERCICE 12

Pour chacune des fonctions suivantes, Etudions la nature du point critique $(0;0)$.

1/ $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = (2x - y)' = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = (2y - x)' = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$$

- si $(x,y) = (0;0)$

$\left.\begin{array}{l} r = 2 \\ t = 2 \\ s = -1 \end{array}\right\}$ $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ et $r > 0$ donc f admet un minimum l. au point $(0;0)$.

2/ $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = (2x + 2y)' = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = (2y + 2x) = 2$$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2$$

• Si $(x;y) = (0;0)$

$$\left.\begin{array}{l} r = 2 \\ t = 2 \\ s = 2 \end{array}\right\} rt - s^2 = 4 - 4 = 0 \quad \text{indetermination.}$$

3/ $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = (3x^2 + 2y^2 + 2x + 3y)' = 6x + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = (4xy - 4y^3 + 3x + 2y)' = 4x - 12y^2 + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y + 3$$

• Si $(x,y) = (0;0)$

$$\left.\begin{array}{l} r=2 \\ t=2 \\ s=3 \end{array}\right\} rt-s^2 = 4-9=-5<0 \quad \text{pas d'extremum.}$$

Exercice 13 : Determinons l'extremum local de la Fonction f defini par :

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+x-2z.$$

— laisser au lecteur —

HORS TD

Exercice 1 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1/ Est-elle Continue sur $\mathbb{R}$?

2/ Calculer $\nabla f(x,y)$.

3/ La fonction est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

4/ f est-elle differentiable sur $\mathbb{R}$.

Resolution

1/ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r^3\cos^2\theta\sin^3\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^3 = 0 = f(0;0)$$

Donc f est Continue sur $\mathbb{R}$.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

2/ Calculons $\nabla f(x,y)$.

- $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

- $\forall (x,y) = (0;0)$

$$\nabla f(0;0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3/ Classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{2r^6(\cos\theta \sin^5\theta)}{r^4} = \lim_{r\to 0} 2r^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$\bullet \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^6(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{r^4} = \lim\limits_{r\to 0} 4r^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Conclusion : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

donc f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

4/ Puisque toute Fonction de Classe $C^1(\Omega)$ est differentiable sur Ω. On conclut que f est differentiable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto \frac{x}{y^2}$

- Derivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x}{y^3}$$

- Calcul de differentielle

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{y^2}dx - \frac{2x}{y^3}dy$$

- Matrice Jacobienne

$$Jf(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{1}{y^2} ; -\frac{2x}{y^3}\right)$$

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

EXERCICE 3

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$; $f(0,0) = 0$

f est-elle differentiable en $(0,0)$

Calcul de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\| f(x,y) - f(0,0) - L(x,y) \|}{\|x, y\|}$

- $L(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial (x)}(0,0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, dy$.

* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = ?$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Posons : $L(x,y) = dy$; $L(x,y) = y$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)|}{\|x,y\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} - y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

posons : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)\|}{\|x,y\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^4\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta\sin\theta}{r^3}$$

$$\frac{\|f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)\|}{\|x,y\|} = -\cos^2\theta\sin\theta$$

en prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\cos^2\theta\sin\theta \neq 0$ donc f n'est pas dérivable en $(0;0)$.

Exercice 3

Discutez, suivant les valeurs du paramètre réel λ la nature des extremums de la fonction :

$$f(x,y) = y(x^2 2 + y^2 - 2\lambda y)$$

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

Résolution

- **Points Critiques**

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(4x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4\lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(3y - 4\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4}{3}\lambda \end{cases}$$

points critiques : $M(0;0)$ et $N\left(0, \frac{4}{3}\lambda\right)$.

- **Formule de Monge.** ($M(0;0)$)

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y & \Rightarrow r = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 4\lambda & \Rightarrow t = -4\lambda \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x & \Rightarrow s = 0 \end{array}\right\} \delta(0,0) = rt - s^2 = 0$$

Donc indetermination.

* Etude de l'indétermination

$$f(x,y)-f(0,0)=y(2x^2+y^2-2\lambda y)-0$$

posons : $\sqrt{|\lambda y|}=x$

on a : $f\left(\sqrt{|\lambda y|}\right)=y(2|\lambda y|+y^2-2\lambda y)-0$

• si $\lambda>0$

$$|\lambda y|=\begin{cases}\lambda y & \text{si } y>0 \quad (1)\\ -\lambda y & \text{si } y<0 \quad (2)\end{cases}$$

➤ $f\left(\sqrt{|\lambda y|};y\right)=y(2\lambda y+y^2-2\lambda y)=y^3>0$

➤ $f\left(\sqrt{|\lambda y|};-y\right)=y(-2\lambda y+y^2-2\lambda y)=y^3-4\lambda y^2\underset{0}{\sim}-4\lambda y^2<0$

Donc : Il n'y a pas d'extremum local.

* Formule de Monge $\left(N(0;\frac{4}{3}\lambda)\right)$

$r=\frac{16}{3}\lambda$; $t=4\lambda$ et $s=0$

$$\delta(0;\tfrac{4}{3}\lambda)=\frac{16}{3}\lambda\times4\lambda=\frac{64}{3}\lambda^2$$

• si $\lambda\neq0$

$\delta(0,\frac{4}{3}\lambda)>0$ donc il y a extremum local

- si $\lambda>0$; $r>0$ $\Rightarrow$ il y a extremum local.
- si $\lambda<0$; $r<0$ $\Rightarrow$ il y a maximum local.

• si $\lambda=0$ (Voir l'etude de $M(0,0)$)

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

$$f(x,y) - f(0;\tfrac{4}{3}\lambda) = y(2x^2+y^2-2\lambda y) - \frac{4}{3}\lambda\left(\frac{16}{9}\lambda^2 - 2\lambda\left(\frac{4}{3}\lambda\right)\right)$$

$$f(x,y) - f(0;\tfrac{4}{3}\lambda) = y(2x^2+y^2-2\lambda y) + \frac{32}{27}\lambda^3$$

$$f_x(y) = y(2x^2+y^2-2\lambda y) + \frac{32}{27}\lambda^3$$

- $\lim\limits_{y\to+\infty} f_x(y) = +\infty \Rightarrow \exists\, x,y \,/\, f_x(y) > 0$ (1)
- $\lim\limits_{y\to-\infty} f_x(y) = -\infty \Rightarrow \exists\, x,y \,/\, f_x(y) < 0$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ il n'y a pas d'extremum global.

EXERCICE 4

Soit $g(x,y,z) = xyz - 32$; $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ g(x,y,z) = 0\}$

et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto xy + 2yz + 2xz$.

Déterminez $\min\{f(x,y,z) \,;\, g(x,y,z) \in S\}$

Sur S on a : $g(x,y,z)=0 \Rightarrow xyz-32=0$

$$\Rightarrow z=\frac{32}{xy} \quad \text{pour } xy\neq 0.$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)=xy+2y\cdot\frac{32}{xy}+2x\cdot\frac{32}{xy}$$

$$f(x,y,z)=xy+\frac{64}{x}+\frac{64}{y}=h(x,y)$$

Etude d'extremums

- points critiques

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y-\frac{64}{x^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-\frac{64}{y^2}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{64}{y^2}\\ y=\frac{64}{x^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=64\times\left(\frac{x^2}{64}\right)^2\\ y=\frac{64}{x^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$$

- Mq $M(4,4)$ est un extremum.

$\delta(4,4)=4-1=3>0$ donc $h(x,y)$ admet un minimum local en $M(4,4)$.

$f(x,y,z)=xy+2yz+2xz$ on a : $z=\frac{32}{16}=2$

Alors f admet un minimum local en $(4,4)$ sur S.

$$h(x,y)=h(4,4)=xy+\frac{64}{x}+\frac{64}{y}-48=f_y(x)$$

$$f'_y(x)=y-\frac{64}{x^2}$$

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

$f'_y(x)=0 \Rightarrow y-\frac{64}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=\frac{64}{y} \Rightarrow x=\frac{8}{\sqrt{y}}$

x	0		$\frac{8}{\sqrt{y}}$		$+\infty$
$f'_y(x)$		$-$	0	$+$	
$f_y(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{8}{\sqrt{y}}\right)$	$\nearrow$	

$f_y\left(\frac{8}{\sqrt{y}}\right)=8\sqrt{y}+8\sqrt{y}+\frac{64}{y}-48=\frac{16y^3+64-48y}{y}$

posons : $t=\sqrt{y} \Rightarrow y=t^2$

$f_y\left(\frac{8}{\sqrt{y}}\right)=\frac{16y^3+64-48y}{y} \Rightarrow f\left(\frac{8}{\sqrt{y}}\right)=\frac{16t^3-48t^2+64}{t^2}$

posons : $16t^3-48t^2+64$; $t>0$

$L'(t)=48t^2$; $L'(t)=0 \Rightarrow 48t(t-2)=0$ donc $t=2$

Siège social : Abidjan - Cocody, près de l'Ecole de Gendarmerie, Carrefour CHU à droite - 01 BP 1375 Abidjan 01
Tél. : (225) 22 48 21 35 - Fax (225) 22 48 21 39 - Mail : info@cndhci.net - Site web : www : cndhci.ci - Numéro Vert : 800 00 888

t	0		2		$+\infty$
$L'(t)$		$-$	0	$+$	
$L(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

donc $L(t) > 0$ d'où $f_y\left(\frac{8}{\sqrt{y}}\right) > 0$.

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le...............................

Le Secrétaire Exécutif,

FICHE 5

Hors Td

Exercice 1

$F(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

1/ Déterminons D_F et la Continuité de F sur D_F :

• D_F ?

$D_F = \{ x \in \mathbb{R} ; \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \text{ Converge} \}$

Soit $F_1(x) = \int_0^1 t^x e^{-t} dt$ et $F_2(x) = \int_1^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

• $F_1(x) = \int_0^1 t^x e^{-t} dt$; $\forall t \in]0;1]$

$t^x e^{-t} \underset{0}{\sim} t^x$; $\int_0^1 t^x d\cancel{t} = \int_0^1 \frac{1}{t^{-x}} dt$

Converge ssi $-x < 1 \Rightarrow x > -1$

Donc $\boxed{D_{F_1} =]-1 ; +\infty[}$

• $F_2(x) = \int_1^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$

Appliquons la règle de $t^\alpha f(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} \left(t^2 f_2(t)\right) = \lim_{t\to+\infty} t^2 t^x e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^{x+2} e^{-t} = 0$$

donc $\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$ Converge, $\forall x \in \mathbb{R}$. donc $D_{F_2} = [1;+\infty[$

Conclusion : $\boxed{D_F =]-1;+\infty[}$

• Continuité de F sur D_F

$F_1(x) = \int_0^1 t^x e^{-t}\, dt$

Soit $f_1 :]-1;+\infty[\times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto t^x e^{-t}$

* f_1 est Continue sur $]-1;+\infty[\times]0;1]$

Soit $a \in]-1;+\infty[$; $x \in [a;+\infty[$

$x \geq a \Rightarrow x\ln t \leq a \ln t \Rightarrow e^{x\ln t} \leq e^{a\ln t} \Rightarrow t^x \leq t^a$

$e^{-t}t^x \leq e^{-t}t^a$

$\varphi_1(t) = e^{-t}t^a$

Verifions si $\int_0^1 \varphi_1(t)\, dt$ Converge.

$e^{-t}t^a \underset{0}{\sim} t^a$; $\int_0^1 t^a\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{-a}}\, dt$ Converge

ssi $-a < 1 \Rightarrow a > -1$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

F_1 est Continue sur $]a;+\infty[$ qd $a \to +\infty$ donc F_1 est Continue sur $]-1;+\infty[$.

* $F_2(x) = \int_1^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

Soit $f_2 :]-1;+\infty[\times]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto t^x e^{-t}$

f_2 est Continue sur $]-1;+\infty[\times]1;+\infty[$; $|f_2(x,t)| = t^x e^{-t}$

Soit $a \in]-1;+\infty[$; $x \in]-1;a]$

$x \leq a \Rightarrow x\ln t \leq a\ln t \Rightarrow e^{x\ln t} \leq e^{a\ln t} \Rightarrow t^x \leq t^a$

$e^{-t}t^x \leq e^{-t}t^a = f_2(t)$

Verifions si $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^a dt$ Converge.

$\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 t^a e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} t^{a+2} e^{-t} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^a$ Converge

donc F_2 est Continue sur $]-1;a]$ qd $a \to +\infty$ donc F_2 est Continue sur $]-1;+\infty[$

<u>Conclusion</u>: F est Continue sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 2 :

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$

1/ Determinons D_F

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$; posons : $f(x,t) = \frac{t^x}{1+e^t}$

$D_F = \{x \in \mathbb{R} ; \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt \text{ Converge}\}$

- Convergence en 0 ①

$\frac{t^x}{1+e^t} \underset{0}{\sim} \frac{t^x}{2} = \frac{1}{2} t^x$; $\int_0^1 \frac{1}{2} t^x dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^{-x}} dt$

Converge ssi $-x < 1 \Rightarrow x > -1$

Donc : en 0 on a : $]-1 ; +\infty[$

- Convergence en $+\infty$ (règle $t^\alpha f(t)$) ②

prenons : $\alpha = 2$.

$\lim_{t \to +\infty} t^2 f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{x+2}}{1+e^t} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} f(x,t) dt$ Converge

$\forall x \in \mathbb{R}$.

D'après ① et ② ; $\boxed{D_F =]-1 ; +\infty[}$

2/ Etudions la derivabilité de F sur D_F.

f est Continue sur $]-1 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$ et est C^∞

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \left[\frac{e^{x\ln t}}{1+e^t}\right]' = \frac{t^x \ln t}{1+e^t}$

Soit $a \in]-1;+\infty[$; $x \geqslant a$

$t \in]0;1]$

$x \longmapsto t^x$ est décroissante.

$t^x \leq t^a \Rightarrow |\ln t|t^x \leq |\ln t|t^a \Rightarrow \frac{|\ln t|}{1+e^t}t^x < t^a$

posons : $\psi(t) = \frac{|\ln t|\, t^a}{1+e^t}$ • en 0

On montre que $\int_0^1 \psi(t)\,dt$ Converge donc F_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Soit $a \in]-1;+\infty[$; $t \in [1;+\infty[$; $x \longmapsto t^x$ est $\nearrow$ $\forall x \in]-1;a]$

On a : $x \leq a \Rightarrow t^x \leq t^a \Rightarrow \ln t . t^x \leq \ln t . t^a$

$\Rightarrow \left|\frac{t^x \ln t}{1+e^t}\right| \leq \frac{\ln t . t^a}{1+e^t}$ montre que $\int_1^{+\infty} \psi(t)\,dt$ CV

Appliquons la règle $t^{\alpha} f(t)$. en $+\infty$ avec $\alpha = 2$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\alpha+2} \ln t}{1+e^t} = 0$$ donc $\int_1^{+\infty} \psi(t)\,dt$ Converge d'où

F_2 est derivable sur $]-1; a]$.

$a \to +\infty$; F_2 est derivable sur $]-1; +\infty[$.

$F = F_1 + F_2$ est derivable sur $]-1; +\infty[$.

CNDHCI

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME DE CÔTE D'IVOIRE

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le................................

Le Secrétaire Exécutif,

INTEGRALES DOUBLES

Exercice 5 ; Calcule

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0 \,;\, y > 0 \text{ et } x + y \leq 1$

Resolution.

$\cancel{0 < x+y \leq 1}$

$0 < x < 1$ et $0 \leq y \leq 1 - x$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} x\, y^2 \right]_0^{1-x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x (1-x)^2\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x + x^2 + \frac{1}{2} x^3 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{8} x^4 \right]_0^1$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\,dy \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$$

Siège social : Abidjan - Cocody, près de l'Ecole de Gendarmerie, Carrefour CHU à droite - 01 BP 1375 Abidjan 0
Tél. : (225) 22 48 21 35 - Fax (225) 22 48 21 39 - Mail : info@cndhci.net - Site web : www : cndhci.ci - Numéro Vert : 800 00 88

$$\boxed{I = \frac{1}{24}}$$

Exercice 6

$$I = \iint_D x^2 \, dx \, dy$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1 \,; y \geq 0 \text{ et } y^2 \leq x\}$

Resolution

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \,; 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} x^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x^2 y \right]_0^{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\cancel{I = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]}$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{x} \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{5/2} \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{7} x^{7/2} \right]_0^1$$

$$\boxed{I = \frac{2}{7}}$$

Exercice 7

$$I = \iint_D \frac{dx \, dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x \leq 1\}$

Resolution

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 1\}$

On peut reexprimer l'integrale double.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left[\int_0^x \frac{dy}{1+y^2}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left[\arctan y\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\arctan 1)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2 \times 16}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{32}}$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}(\arctan x)$

$u = \arctan x$

$u' = \frac{1}{1+x^2}$

$F(x) = uu'$.

soit F une primitive de f.

$F(x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$.

EXERCICE 8

$$I = \iint_{\Delta} \sin(x+y)\,dx\,dy$$

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0 \ , y > 0 \text{ et } x+y \leq \pi\}$

Resolution

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < x < \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \pi - x\}$

$$I = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi - x} \sin(x+y)\,dy \right) dx.$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\cos(x+y) \right]_0^{\pi - x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + \cos x)\,dx$$

$$= \left[\sin x + x \right]_0^{\pi}$$

$$= \sin \pi + \pi$$

$$\boxed{I = \pi}$$

EXERCICE 9

$$I = \iint_D \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

D est le disque de centre O et de rayon R.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

Resolution

En passant par Coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\left(r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right) = \cos(r^2)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ et $0 \leq y \leq R$

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} \cos(r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} r\cos(r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin r^2\right]_0^R$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sin R^2$$

$$\boxed{I = \pi \sin R^2}$$

Siège social : Abidjan - Cocody, près de l'Ecole de Gendarmerie, Carrefour CHU à droite - 01 BP 1375 Abidjan 01
Tél. : (225) 22 48 21 35 - Fax (225) 22 48 21 39 - Mail : info@cndhci.net - Site web : www : cndhci.ci - Numéro Vert : 800 00 888

EXERCICE 10

$$I = \iint_D x \, dx dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 - x \leq 0\}$$

Resolution

On peut ecrire D en Coordonnées polaires.

$$D = \{(r\cos\theta ; r\sin\theta) / \theta \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \ ; \ 0 \leq r \leq \cos\theta\}$$

$$I = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta \, r dr \right) d\theta \right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} r^2 \cos\theta \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\theta \right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}}$$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

EXERCICE 11

$$I = \iint_D (x+y)^2 \, dx dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2-x \leq 0 \ ; \ x^2+y^2-y \geq 0 \ ; \ y \geq 0\}$$

Resolution

En Coordonnées polaires

$$D = \{ M(r\cos\theta ; r\sin\theta) / \theta \in [0 ; \tfrac{\pi}{4}] \ ; \ \sin\theta \leq r \leq \cos\theta \}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \left(r(\cos\theta + \sin\theta)\right)^2 r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} r^3 (\cos\theta + \sin\theta)^2 dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{4} r^4 (\cos\theta + \sin\theta)^2 \right]_{\sin\theta}^{\cos\theta} d\theta$$

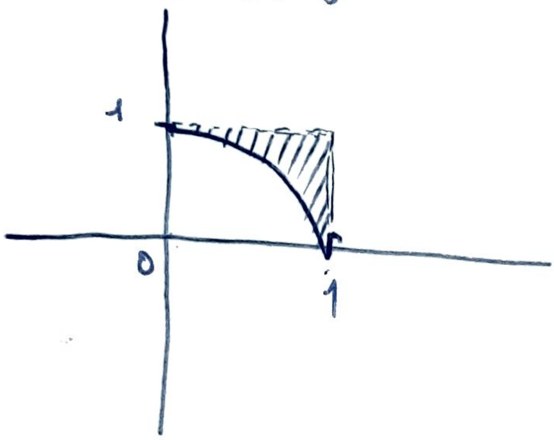
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta \right) (\cos\theta + \sin\theta)^2 d\theta$$

Quelques Representation de domaine

1/ $I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

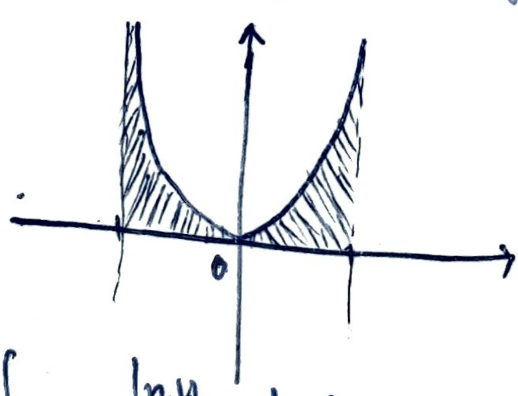
$D = \{ xy \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 1 \leq x^2+y^2 \}$

$[0;1] \times [0,1]$



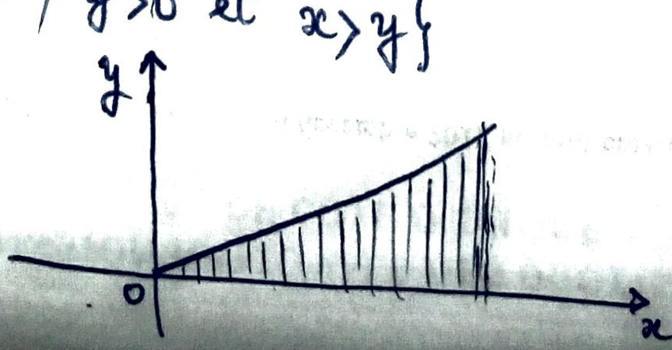
2/ $I = \iint_D \frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \leq x^2 \text{ et } y > 0 \}$



3/ $I = \iint_D \frac{\ln y}{\sqrt{x-y}}\,dx\,dy$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \text{ et } x > y \}$



COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

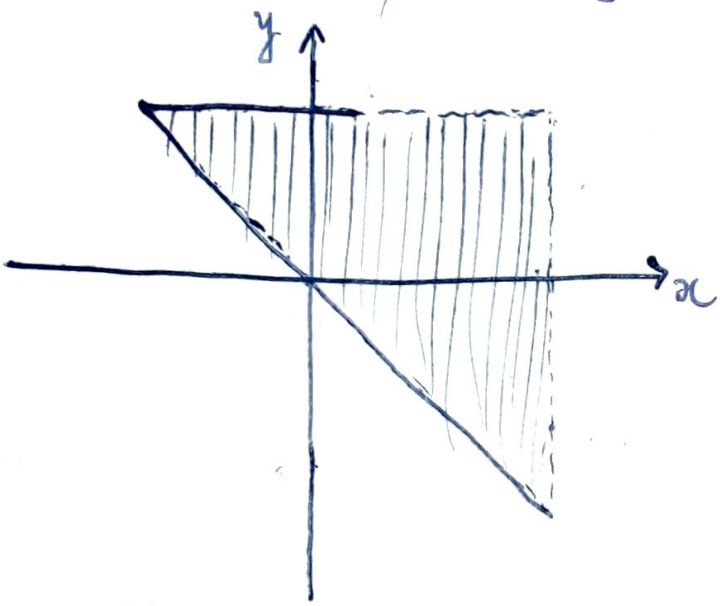
Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

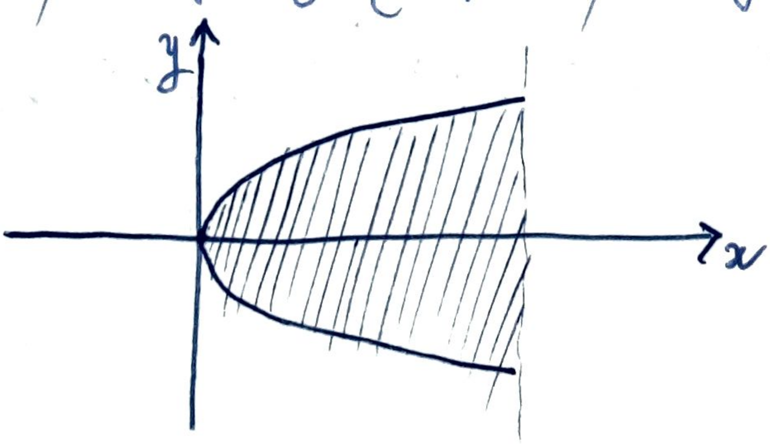
4/ $I = \iint_D \ln(x+y)\,dxdy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > -x\}$



5/ $I = \iint_D \ln(x-y^2)\,dxdy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x - y^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > y^2\}$



CORRECTION COMPO / ANALYSE 4 / ECUE 1 - 2016

Exercice 1

$$f(x,y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$$

* **points critiques : (x,y)**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2x} + 2e^{2x}(x + y^2 + 2y) = (1 + 2x + 2y^2 + 4y)e^{2x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y+2)e^{2x} = 2e^{2x}(y+1)$$

Resolvons : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+2x+2y^2+4y)e^{2x} = 0 \\ 2e^{2x}(y+1) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2x + 2y^2 + 4y = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2x + 2y^2 + 4y = 0 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow$ $1 + 2x + 2 - 4 = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

D'où les points critiques : $(x,y) = (\frac{1}{2} ; -1)$

* **Nature de point critique**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2x}(1 + 2x + 2y^2 + 4y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{2x}\left(2+2x+2y^2+4y\right) = 4e^{2x}\left(1+x+y^2+2y\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^{2x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

D'où : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2};-1\right) = 4e\left(1+\frac{1}{2}+1-2\right) = 2e$

$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y}\left(\frac{1}{2};-1\right) = 2e$

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2};-1\right) = 0$

$\delta\left(\frac{1}{2};-1\right) = rt - s^2 = 4e^2 > 0$ et $r > 0$ d'après monge f admet un minimum local au point $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

EXERCICE 2 : limite

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x.y)}{xy^2} \quad \text{en } (0;0).$$

en Coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$f(r\cos\theta; r\sin\theta) = \frac{1-\cos(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r^3\cos\theta\sin^2\theta}$$

$$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1-\frac{x^2}{2}$$

$$\cos(r^2\cos\theta\sin\theta) \underset{0}{\sim} 1-\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{2}$$

$$f(r\cos\theta; r\sin\theta) = \frac{1-\left(1-\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{2}\right)}{r^3\cos\theta\sin^2\theta}$$

$$= \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{2r^3\cos\theta\sin^2\theta}$$

$$f(r\cos\theta; r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta}{2}$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2} = 0$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

Autre Methode

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(1-\cos(xy))}{x^2y^2}$$

posons : $t = xy$; qd $(x,y) \to (0,0)$; $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-(1-\frac{t^2}{2})}{t^2} = \frac{1}{2}$$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$

donc : $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 .}$

Exercice 3

Soit E un ensemble non vide.

1. Mq E muni de l'application d definie sur $E\times E$ par :
$d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x,x) = 0$ est un espace metrique.

$d(x,y) \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall (x,y) \in E \times E$

soit $(x,y) \in E^2$

- Si $d(x,y) = 1 \Rightarrow x \neq y$ et $y \neq x$

$$d(x,y) = 1 = d(y,x)$$

- si $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

$$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x) = 0$$

<u>Donc</u>: $\forall x,y \in E^2 \Rightarrow x = y$.

<u>par definition</u>:

- $\forall x,y,z \in E^2 \; ; \; d(x,y) \leq ? \; d(x,z) + d(z,y)$

  * si $x = y$; $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$

    Car $d(x,z) \geq 0$ et $d(z;y) \geq 0$

  * si $x \neq y$; $d(x,y) = 1$ et si $z = x \Rightarrow z \neq y$

    $d(x,z) = 0$ et $d(z,y) = 1$

    $d(x,y) \leq 1 \leq d(x,z) + d(z;y) = 1$

  * si $z \neq x \Rightarrow d(x,z) = 1$

    $d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + d(z,y)$

Car $d(z,y) \geq 0$ par Consequent d est une distance sur E^2 d'où (E,d) est un espace métrique.

2/ Determinons la boule Fermée de centre x et de rayon $\frac{1}{3}$ notée $B_f(x, \frac{1}{3}) = \{ y \in E / d(x,y) < r \}$

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME
DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

on a : $r = \frac{1}{3} < 1$.

donc : $y \in B_f(x, \frac{1}{3}) \Leftrightarrow d(x,y) < r < 1$

$d(x,y) < \frac{1}{3} < 1$

$d(x,y) < 1$

$d(x,y) = 0$

Alors : $x = y$

Conclusion : $\boxed{B_f(x, \frac{1}{3}) = \{x\}}$

Exercice 4

$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(z^2 - x^2) ; \sin x \sin y\right)$

On admet que f est differentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$.

• Calculons $df_a(h)$ avec

$a = (0 ; \frac{\pi}{2} ; 1)$ et $h = (1;0;1)$

Siège social : Abidjan - Cocody, près de l'Ecole de Gendarmerie, Carrefour CHU à droite - 01 BP 1375 Abidjan 01
Tél. : (225) 22 48 21 35 - Fax (225) 22 48 21 39 - Mail : info@cndhci.net - Site web : www : cndhci.ci - Numéro Vert : 800 00 888

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto (f_1(x,y,z) ; f_2(x,y,z))$ avec

$f_1(x,y,z) = \frac{1}{2}(z^2 - x^2)$ et $f_2(x,y,z) = \sin x \sin y$.

Rappel: df est une application lineaire Continue de $\mathbb{R}^3$ Vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $J_f(a)$.

Il vient que $df_a(h) = J_f(a)\, h$.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(X) \end{pmatrix}$$ avec: $X = (x,y,z)$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x & 0 & z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_f(a) = J_f(0; \tfrac{\pi}{2}; 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $df_{(a)}(h)$.

$$\boxed{df_{(a)}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Abidjan, le..................................

Le Secrétaire Exécutif,

EXAMEN : ANALYSE 4 / ECUE 1 – 2016 (2e session)

Exercice 1

$$f_m(x,y) = 4\ln x + x^2 - 6x + m(xy - y)$$

1/ D_{f_m} ?

$$\boxed{D_{f_m} = \mathbb{R}\setminus\{0\}} \times \mathbb{R}$$

2/ Points critiques suivants les valeurs de m.

$$\frac{\partial f_m}{\partial x}(x,y) = (4\ln x + x^2 - 6x + mxy - my)'$$
$$= \frac{4}{x} + 2x - 6 + my$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial y}(x,y) = mx - m = m(x-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{4 + 2x^2 - 6x + myx}{x} = 0 \\ m(x-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 + 2x^2 - 6x + myx = 0 \quad (1) \\ x - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+2-6+my=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

- point critique : $(x,y)=(1;0)$

3/ $m=1$; Nature du point critique $(x,y)=(1,0)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{4}{x^2}+2 \Rightarrow r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -2 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Rightarrow t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 0 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = m = 1 \Rightarrow s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} rt - s^2 = -1 < 0 \\ \text{pas d'extremum} \\ \text{local.} \end{array}$$

<u>Exercice 2</u> : limite

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2} \quad \text{en } (0;0)$$

en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

$$f(r\cos\theta ; r\sin\theta) = \frac{r^4 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2(r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta)} = \frac{r^2 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r \to 0} \frac{r^2\cos^3\theta \sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} = 0$$

COMMISSION NATIONALE DES DROITS DE L'HOMME DE CÔTE D'IVOIRE

CNDHCI

Loi n° 2012-1132 du 18 décembre 2012 portant création de la CNDHCI.

Abidjan, le.................................

Le Secrétaire Exécutif,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

Siège social : Abidjan - Cocody, près de l'Ecole de Gendarmerie, Carrefour CHU à droite - 01 BP 1375 Abidjan 01
Tél. : (225) 22 48 21 35 - Fax (225) 22 48 21 39 - Mail : info@cndhci.net - Site web : www : cndhci.ci - Numéro Vert : 800 00 888