Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 1

Examen de rattrapage : Analyse 3

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4.5 Pts)

Suivant les valeurs du paramètre α, étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n\alpha}, \qquad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3}$$

Exercice 2. (6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R.

2) En déduire le domaine de convergence.

3) Calculer la somme de la série entière f.

4) En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 2^{-n}}{(n-1)(n-2)}$

Exercice 3. (5 Pts)

Soit la fonction f, impaire, $2\pi-$périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.

1) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2) Déterminer la série de Fourier associée à f, notée S_f.

3) En déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}.$$

Exercice 4. (4.5 Pts)

Etudier la nature de l'intégrale impropre suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

2ème année MATH - Semestre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 3

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4.5 Pts)

1) On pose $u_n = ne^{-n\alpha}$ et appliquons le critère de Cauchy. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n}e^{-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{ln(n)}{n}}e^{-\alpha}$$

$$= e^{-\alpha} \qquad (\mathbf{1Pt}) \quad (\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0).$$

Si $\alpha < 0$, alors $e^{-\alpha} > 1$ et la série converge. **(0.5 Pt)**
Si $\alpha > 0$, alors $e^{-\alpha} < 1$ et la série diverge. **(0.5 Pt)**
Si $\alpha = 0$, alors on ne peut rien conclure par le critère de Cauchy.
pour $\alpha = 0$, on a $u_n = n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Donc, dans ce cas, la série diverge. **(0.5 Pt)**
2) On remarque que pour $\alpha \neq 0$, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3} \sim \frac{\sqrt{n}}{\alpha n^3} = \frac{1}{\alpha n^{5/2}}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^{5/2}}$ converge (série de Riemann), alors par le critère d'équivalence, la série $\sum \frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3}$ converge. **(0.5 Pt)**
Pour $\alpha = 0$, $\sum \sqrt{n}$ diverge car $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. **(1 Pt)**

Exercice 2. (6 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n(n-1)}.\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right| = 1.$$

Donc, $R = 1$. **(0.5 Pt)**
2) On sait que si $|x| < R$, alors la série entière converge.
Si $|x| > R$, alors la série entière diverge.
Si $|x| = R$, alors soit $x = 1$ ou $x = -1$.
Pour $x = 1$, on a la série numérique $\sum \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$ qui diverge car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = 1 \neq 0$. **(0.25 Pt)**
Pour $x = -1$, on a la série numérique $\sum \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)}$ qui diverge car $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)} \neq 0$. **(0.25 Pt)**

Ainsi, le domaine de convergence est $D_f =]-1, 1[$. **(0.25 Pt)**
3) On remarque que

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = a + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n-2}$$

$$= \frac{an^2 - an + bn - 2an + 2a - 2b + cn - c}{(n-1)(n-2)}.$$

Par identification, on a

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 4. \quad (\mathbf{0.75Pt})$$

Ainsi, pour $x \in D_f$,

$$f(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{4}{n-2}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2}$$

$$= \frac{x^3}{1-x} - x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + 4x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2}$$

$$= \frac{x^3}{1-x} - x\left(-\ln(1-x) - x\right) + 4x^2\left(-\ln(1-x)\right)$$

$$= \frac{x^2}{1-x} + x(1-4x)\ln(1-x) \quad (\mathbf{3Pts})$$

4) On remarque que pour $x \in D_f$,

$$f'(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} x^{n-1}.$$

D'autre part,

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} + (1-8x)\ln(1-x) - \frac{x(4-x)}{1-x}.$$

En remplaçant $x = \frac{1}{2}$, on obtient

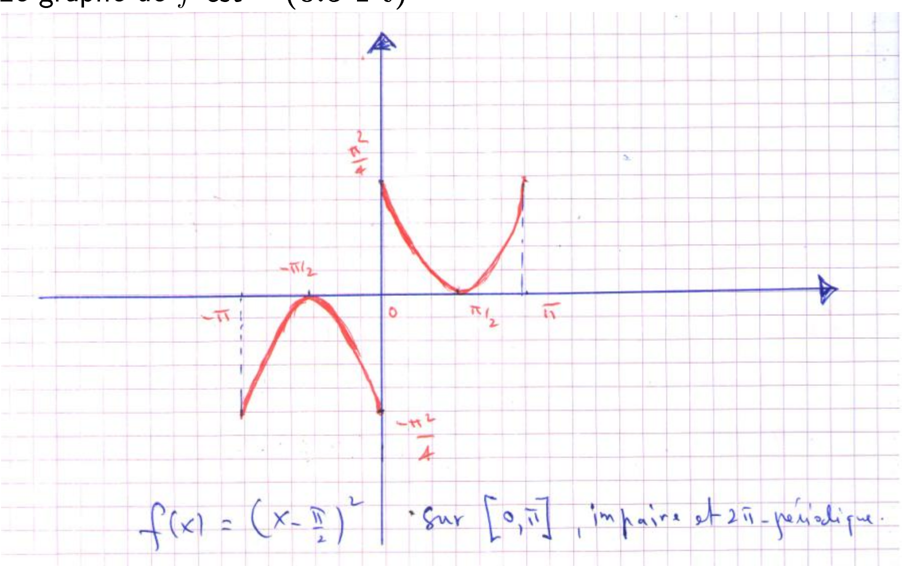
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{13}{2} + 3\ln(2).$$

Ainsi,

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 2^{-n}}{(n-1)(n-2)} = \frac{13}{4} + \frac{3}{2}\ln(2). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 3. (5 Pts)

1) Le graphe de f est **(0.5 Pt)**



2) Puisque f est impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. $\quad$ **(0.25 Pt)**
D'autre part,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)dx \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

On utilise une intégration par parties, ($\int uv' = uv] - \int u'v$). On pose

$$\begin{cases} u = (x-\frac{\pi}{2})^2 & \Rightarrow u' = 2(x-\frac{\pi}{2}), \\ v' = \sin(nx) & \Rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n}. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\cos(nx)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(-\frac{\pi^2}{4n}(-1)^n + \frac{\pi^2}{4n}\right)\right] + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\cos(nx)\right) \quad (\mathbf{1Pt}) \end{aligned}$$

En utilisant une deuxième intégration par parties avec

$$\begin{cases} u = (x-\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow u' = 1, \\ v' = \cos(nx) & \Rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n}(1-(-1)^n) + \frac{2}{n}\left(\left[(x-\frac{\pi}{2})\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}(1-(-1)^n) + \frac{2}{n^3}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right). \quad (\mathbf{1Pt}) \end{aligned}$$

On remarque que si n est pair, alors $b_{2k} = 0$.
Si n est impaire, alors $b_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4(2k+1)} - \frac{2}{(2k+1)^3}\right]$
Ainsi, la série de Fourier associée à f est

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\pi^2}{4(2n+1)} - \frac{2}{(2n+1)^3}\right]\sin((2n+1)x), \quad \text{pour} \quad x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

$$S_f(x) = 0, \quad \text{pour} \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3) En remplaçant $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\pi^2}{4(2n+1)} - \frac{2}{(2n+1)^3}\right](-1)^n = 0.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 4. (4.5 Pts)
On remarque que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx$ est impropre en $+\infty$ et en 0.
Posons

$$I_1 = \int_0^1\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Pour I_1, on sait que $\sin(x) \sim_0 x$. Donc,

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Puisque $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ converge, alors I_1 converge par le critère d'équivalence. $\quad$ **(1 Pt)**
Pour I_2, on remarque que

$$\left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^{5/2}} \quad \textbf{(1Pt)}$$

Sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$ converge, alors I_2 converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx$ $\quad$ **(1 Pt)**