Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen.
Jeudi 04/03/2021 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08pts) On considère la suite réelle définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, et qu'elle n'est pas absolument convergente. On notera S sa somme.
2. On considère à présent la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n x^n$. Déterminer son rayon de convergence, puis son domaine de convergence. On notera $S(x)$ sa somme.
3. Calculer $S(x)$ en précisant le domaine de validité des calculs.
4. En déduire la valeur de S en justifiant tous les passages.

Exercice 2 : (08pts) Soit a un paramètre réel tel que $0 < 2a < \pi$. On définit la fonction f_a impaire et 2π-périodique par sa restriction à $[0, \pi]$:

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2a \\ 0 & \text{si} \quad 2a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f_a dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f_a sous sa forme réelle, notée $S_{f_a}(x)$. Où converge-t-elle vers $f_a(x)$?
3. En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}$.

Exercice 3 : (04pts) Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

2ème année licence de "Mathématiques". S3 - 2020/2021.

Module: "Analyse III" - Examen - Corrigé.

Exercice 1: (08pts)

1°/ Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on peut faire appel au critère d'Abel.

En effet $u_n = a_n \cdot b_n$ où $\begin{cases} a_n = \frac{1}{n+3} \\ b_n = (-1)^n. \end{cases}$

On a bien $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3} = \frac{-1}{(n+4)(n+3)} \leq 0$, qui signifie que (a_n) est décroissante. Aussi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (et $a_n \geq 0$). D'autre part: $\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ — 1pt

donc $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq 1$. D'après le critère d'Abel, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Par contre elle n'est pas absolument convergente.

En effet $|u_n| = \frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$, $n \to +\infty$, qui est une série de Riemann divergente $\left(\frac{1}{n^a}, a = 1\right)$. — 1pt

Notons alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

2°/ On examine à présent la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n \cdot x^n$.

Calculons son rayon de convergence: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n+4} = 1 = \frac{1}{R}$. — 1pt

Donc $\boxed{R = 1}$. Le domaine de convergence absolue est $]-1,1[$.

Pour $x = 1$, la série converge ($1^{\text{ère}}$ question) et pour $x = -1$ — 1pt

$u_n(-1)^n = \frac{1}{n+3}$ diverge. Donc son domaine de convergence est $\boxed{D =]-1,1]}$

3°/ Calcul de $S(x)$: Dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ on peut effectuer la dérivation et l'intégration terme à terme.

On a $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+3} x^n \Longrightarrow x^3 S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+3} x^{n+3}$

$$\Longrightarrow \left(x^3 S(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{n+2} = x^2 \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$$

$$= x^2 \sum_{n\geq 0} (-x)^n = \frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

Ainsi $x^3 S(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x) + C$ 2pts

En remplaçant par $x=0$, on obtient $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

D'où $\boxed{S(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+x)}{x^3}}$, $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$

4°/ Pour pouvoir calculer S, qui a l'air d'être $S(1)$, il faut utiliser le théorème d'Abel (compléments dans le chapitre 3). Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge (1ère question) 2pts

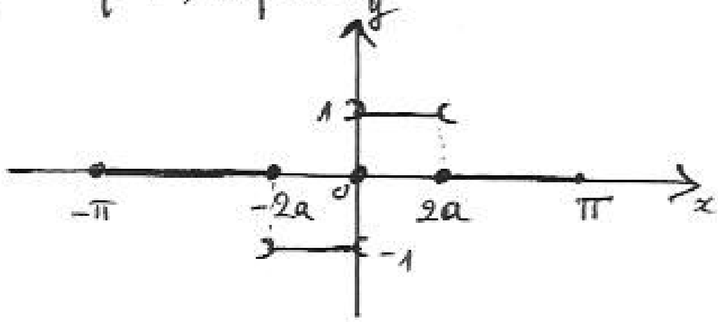
alors $\sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} S(x) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{\ln(2)}{1}$

D'où $\boxed{S = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+3} = -\frac{1}{2} + \ln 2}$

Exercice 2 : (4pts) $0 < 2a < \pi$. $f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2a \\ 0 & \text{si } 2a \leq x \leq \pi \end{cases}$

f_a 2π-périodique, impaire.

1°/



2pts

2°/ Il est clair que f_a est continue par morceaux. Elle est aussi C^1 par morceaux car par intervalle, elle est constante. Donc vérifie les conditions du théorème de Dirichlet. Comme elle est impaire, alors tous les $a_n = 0$. Reste à calculer les b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_a(x)\sin nx\, dx$$ 3pts

$n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2a} \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2a}$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$b_n = \frac{2(1-\cos 2na)}{n\pi} \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{4\sin^2 na}{n\pi}}$$

D'où $\boxed{S_{f_a}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^2 na}{n}\sin nx}$

D'après le théorème de Dirichlet, $S_{f_a}(x) = f_a(x)$ en chaque point x différent des points de Discontinuité, càd $x \neq 2k\pi$ et $x \neq 2a + 2k\pi$. 1pt

3°/ Comme $x = a$ est un point de continuité, alors on aura :

$$S_{f_a}(a) = f_a(a) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^3 na}{n}, \text{ d'où}$$ 2pts

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^3 na}{n} = \pi/4}$$

Exercice 3 : (04 pts) $\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

Posons $f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

- La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable. De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$, alors l'intégrale est impropre en 0, elle est aussi impropre en $+\infty$. 1 pts

- Comme $f(x) \geq 0$, $\forall x \in]0,+\infty[$, on peut procéder par le critère de comparaison.

  * On a $\frac{1}{1+x} \leq 1$, $\forall x \geq 0$

  $\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$. 1,5 pt

  Comme $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (Riemann, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

  alors $\int_0^1 f(x)dx$ converge aussi.

  * On a $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$, $\forall x > 0$

  Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge (Riemann, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) 1,5 pts

  alors $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi.

En définitive I est convergente.

Rque : On peut utiliser les équivalents :

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, $(x \to 0)$ et $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$, $(x \to +\infty)$.

$\boxed{4}$