

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen Final.
Jeudi 06/02/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)$$

- Déterminer son développement en série entière centrée en 0. (Indication : on pourra commencer par développer sa dérivée f')
- Déterminer le rayon de convergence de la série de f .
- En déduire la somme S de la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k + 1) 4^{2k+1}}$.

Exercice 2 : (08pts) On considère la fonction g qui est 2π -périodique et telle que sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ on ait $g(x) = x(\pi^2 - x^2)$.

- Tracer le graphe de g sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- Déterminer la série de Fourier de g . Peut-on affirmer que la somme de cette série de Fourier est $g(x)$ pour tout x ? Justifier.
- En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^3}$.
- A l'aide de l'identité de Plancherel, déterminer la somme de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 3 : (06pts) Soit $a > 0$ un paramètre. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$$

- Montrer que I_a est convergente.
- A l'aide du changement de variable $t = 1/s$, montrer que $I_1 = 0$.
- Enfin à l'aide du changement $t = au$, calculer I_a .

2^{ème} année de Licence "Mathématiques" - 2019/2020.

Module: "Analyse III" - Epreuve Finale - Corrigé

Exercice 1: (6pts) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

1/ Développement de f : Calculons f' .

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Le développement en série entière centrée en 0 de f' est immédiat

$$f'(x) = (-2x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^4)^n = (-2) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n+1}$$

Ce développement ayant pour rayon de convergence 1, est valable dans l'intervalle $] -1, 1[$. D'après les propriétés des séries entières on peut intégrer terme à terme dans $] -1, 1[$, d'où

$$f(x) = f(0) - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$$

Or $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$; donc

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

2/ Le rayon est déjà 1 pour f' et donc 1 pour f aussi. Mais on peut le calculer de nouveau, en posant $x^4 = y$ et la série devient $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^n}{2n+1}$ (sans le x^2). Donc $C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

$$\text{d'où } \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \frac{2n+1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{d'où } R = 1$$

1pt

4pt

2pts

1

3° Calcul de S :
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1) 4^{2k+1}}$$

On obtient S en prenant $x = 1/2$ dans la série de f .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^{4k+2}}, \text{ or } 2^2 = 4$$

d'où $S = \frac{\pi}{4} - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - 1/4}{1 + 1/4}\right)$

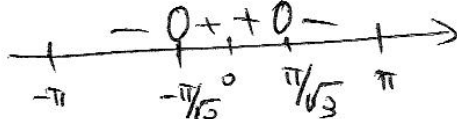
$$S = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)$$

2pts

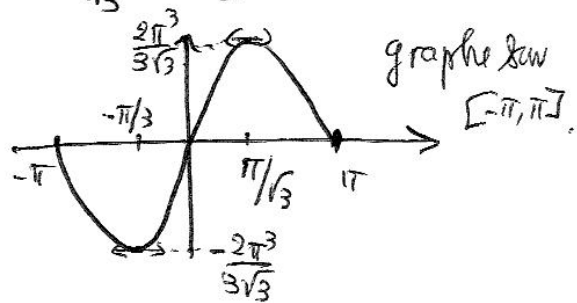
Exercice 2: (08 pts) $g(x) = x(\pi^2 - x^2)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$
est 2π -périodique.

1° Graphes de g dans $[-3\pi, 3\pi]$: Dans $[-\pi, \pi]$, $g'(x) = \pi^2 - 3x^2$

Signe de g' :

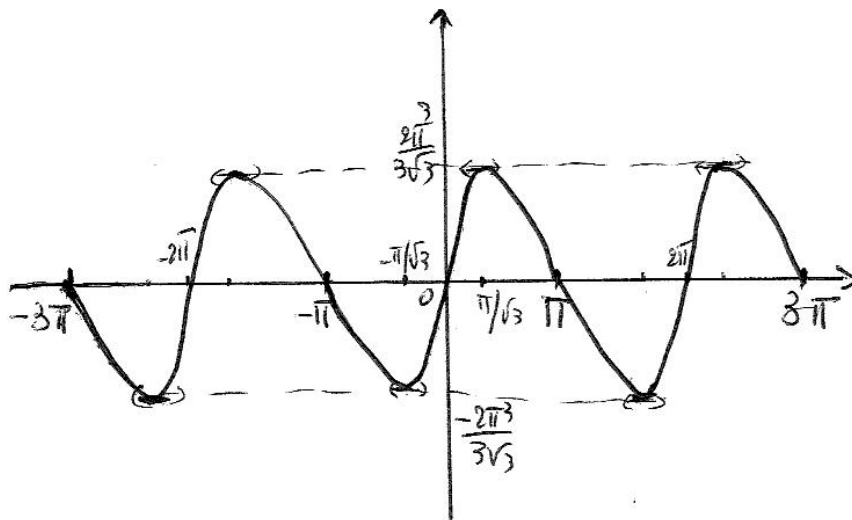


x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	π
g'	-	0	+	0
g	0	$-\frac{2\pi^3}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2\pi^3}{3\sqrt{3}}$	0



graphes sur $[-\pi, \pi]$.

2pts



2°/ Série de Fourier de g : g vérifie manifestement les conditions de Dirichlet. En plus g est impaire, donc les $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Calculons les b_n ($n \geq 1$): $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx$

($g(x) \sin nx$ est paire), $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi^2 - x^2) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi^2 - x^2) d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cancel{x(\pi^2 - x^2) \frac{\cos nx}{n}} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3x^2) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3x^2) d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{2}{n^2\pi} \left\{ \left[\cancel{(\pi^2 - 3x^2) \frac{\sin nx}{n}} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 6x \sin nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{12}{n^2\pi} \int_0^{\pi} x d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{12}{n^3\pi} \left\{ \left[-x \cos nx \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{12}{\pi n^3} \left\{ (-1)^{n+1} \pi + \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\} ; \quad \boxed{b_n = 12 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}}$$

Comme tous les points sont des points de continuité de g alors la somme de la série de Fourier est bien $g(x)$:

$$\boxed{g(x) = 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3°/ Il suffit de prendre $x = \pi/2$. $\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

Donc $g(\pi/2) = 12 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^3} \cdot (-1)^k = +12 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

or $g(\pi/2) = \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{3\pi^3}{8}$ et donc

$$\boxed{\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = +\frac{\pi^3}{32}}$$

2pts

2pts

4° L'identité de Plancherel s'écrit :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 12^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \quad (\text{car les } a_n = 0)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx &= 2 \int_0^{\pi} x^2 (\pi^2 - x^2)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)^2 d\left(\frac{x^3}{3}\right) \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 (\pi^2 - x^2)^2 \right]_0^{\pi} + \frac{8}{3} \int_0^{\pi} x^4 (\pi^2 - x^2) dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{8}{3 \cdot 5} \left[x^5 (\pi^2 - x^2) \right]_0^{\pi} + \frac{16}{3 \cdot 5} \int_0^{\pi} x^6 dx \\ &= \frac{16}{3 \cdot 5 \cdot 7} \pi^7 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \pi^6 \frac{16}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 12^2} = \frac{\pi^6}{945}}$$

Exercice 3: (6 pts) $a > 0$. $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$

1°/ Convergence de I_a : Notons $h(t) = \frac{\ln t}{a^2 + t^2}$

On a: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} |h(t)| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t} |\ln t|}{a^2 + t^2} = 0$

d'où la convergence en 0, car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} |h(t)| = 0$, $|h(t)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{t}}$.

On a aussi $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{3/2} \ln t}{a^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$

et donc pour t assez grand, $0 < h(t) \leq \frac{C_2}{t^{3/2}}$ d'où la convergence en $+\infty$.

2°/ $I_a = 0$: $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, si $t = 1/s$

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln s}{1 + \frac{1}{s^2}} \frac{1}{s^2} ds = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln s}{1+s^2} ds = -I_a$$

d'où $2I_a = 0 \Rightarrow \boxed{I_a = 0}$

30/ Calcul de I_a : $t = au$, d'où

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{a^2 + a^2 u^2} a \, du$$

$$= \frac{1}{a} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{1+u^2} \, du + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} \, du}_{= I_1 = 0} \right]$$

$$= \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\ln a}{a} \left[\arctan u \right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi \ln a}{2a}}$$

qds