

1^{ère} année M.I - Semestre 1
 Contrôle continu : Analyse 1
 Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
 L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Questions de cours : (3 Pts)

- 1) Donner la définition d'une suite bornée.
- 2) Donner un exemple d'une suite bornée qui converge.
- 3) Donner un exemple d'une suite bornée qui diverge.

Exercice 1. (8 Pts)

Partie 1)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ avec $u_0 > 0$ par la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

- 1) Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$.
- 2) Montrer que si $n \geq 1$, alors $u_n \geq \sqrt{a}$.
- 3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

Partie 2)

Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + \sin(n)}{5n^2 + n + 1}, \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}, \quad \alpha > 1.$$

Exercice 2. (5 Pts)

On considère le nombre complexe

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- 1) Calculer les racines carrées de z .
- 2) Donner le module et l'argument de z et écrire z sous la forme exponentielle.
- 3) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 3. (4 Pts)

- 1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$.
- 2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
- 3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$.
 - a) En déduire que $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$ est irrationnel.
 - b) En déduire qu'entre deux rationnels distincts, il y a au moins un irrationnel.

Puisque $l > 0$, alors on a $l = \sqrt{a}$. (1 Pt).

Partie 2)

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + \sin(n)}{5n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2})}{n^2(5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{5} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0. \quad (1 \text{ Pt})$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e}{\pi\alpha} \right)^n = ?$$

Remarquons que puisque $\alpha > 1$, alors $\pi\alpha > \pi \Rightarrow \frac{e}{\pi\alpha} < \frac{e}{\pi} \Rightarrow \frac{-e}{\pi\alpha} > \frac{-e}{\pi} > -1$.

Ainsi, $-1 < \frac{-e}{\pi\alpha} < 0$. Ceci implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e}{\pi\alpha} \right)^n = 0. \quad (1.5 \text{ Pts})$$

Exercice 2. (5 Pts)

1) On a $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x + iy)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

En plus, on a

$$|x + iy|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right|^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Ainsi, nous avons le système suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & (E1), \quad (0.5 \text{ Pt}) \\ x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, & (E2) \quad (0.5 \text{ Pt}) \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}, & (E3). \quad (0.5 \text{ Pt}) \end{cases}$$

La somme des équations (E1) et (E2) implique que $2x^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Donc, $x = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. (0.5 Pt)

La différence de (E1) et (E2) implique que $2y^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Donc, $y = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. (0.5 Pt)

D'après l'équation (E3), x et y sont de même signe, alors on conclut que les racines carrées de z sont

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (0.25 \text{ Pt} + 0.25 \text{ Pt})$$

2) Le module de z est 1 (déjà calculé) (0.25 Pt) et l'argument de z est $\pi/4$. (0.5 Pt)

Remarquons que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $z = e^{i\pi/4}$ (0.25 Pt)

3) Les racines carrées de z sont

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) (0.25 \text{ Pt} + 0.25 \text{ Pt})$$

Comme $\cos(\pi/8) > 0$ (0.25 Pt) et $\sin(\pi/8) > 0$, (0.25 Pt) alors par identification, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Ainsi, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (0.25 Pt + 0.25 Pt)

Exercice 3. (4 Pts)

1) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$, alors il existe deux entiers p', q' tels que

$$r + x = \frac{p'}{q'}. \quad \text{Donc,} \quad x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q - q'p}{qq'} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$. (1 Pt)

2) Supposons que $r.x \in \mathbb{Q}$, ($r \neq 0$). Alors $rx = \frac{p'}{q'} \Rightarrow x = \frac{p'q}{q'p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$. (1 Pt).

3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$, alors $r_2 - r_1$ est encore rationnel.

a) Remarquons que $r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc, d'après la question 2, $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$.

D'autre part, $r_1 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$, alors d'après la question 1, $r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$. (1 Pt)

4) Il suffit de remarquer que $x \in]r_1, r_2[$. En effet, on a $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) > r_1$ et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) < r_2 - r_1 \\ &\Rightarrow x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) < r_2. \end{aligned}$$

Ainsi, entre deux rationnels r_1 et r_2 , il y a au moins un irrationnel x . (1 Pt)