

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : Déterminer le terme général de chacune des séries numériques suivantes, dont les premiers termes sont écrits *in extenso* :

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots \quad , \quad 1 + \frac{1.3}{1.4} + \frac{1.3.5}{1.4.7} + \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10} + \dots$$

$$2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \dots \quad , \quad 2 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{5} + 6 + \frac{1}{7} + \dots$$

Exercice 2 : En utilisant le critère convenable de convergence, étudier les séries à termes positifs suivantes :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \frac{2k+1}{3k+2} \quad , \quad v_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n \quad , \quad w_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \quad \theta_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Exercice 3 : Étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence éventuelle des séries suivantes :

$$u_n = (-1)^n n^a b^n \quad , \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \quad , \quad w_n = \sin \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$$

avec a, b deux paramètres réels.

Exercice 4 : Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n} \quad , \quad v_n = \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right).$$

Indication pour la deuxième : calculer d'abord $(\arctan(x+1) - \arctan x)$ en utilisant $\tan(a-b)$. Justifier tous les calculs.

Exercice 5 : (Comportement asymptotique de la série harmonique) Notons

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

la somme partielle de la série harmonique. On sait d'après le cours que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. On veut déterminer un équivalent de S_n à l'infini.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. Posons $\theta_n = S_n - \ln n$. Montrer que la suite (θ_n) est convergente. (On notera γ sa limite, elle s'appelle "constante d'Euler" et vaut approximativement 0.577)

3. En déduire que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 6 : Soit (a_n) une suite réelle décroissante.

1. Montrer que si la série $\sum a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

2. Que peut-on dire de la réciproque ?

Licence 2^{ème} année - Semestre 3 - 2020/2021.
Module: "Analyse III" - Liste de T.D n° 1 - Corrigé.

Exercice 1: Dans cet exercice, on demande de proposer une formule pour le terme général de la série.

* $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$: Les numérateurs 2, 4, 6, 8, ... forment une progression arithmétique de raison 2 puisque la différence de deux termes consécutifs est 2. La forme des numérateurs est donc: $2n+2, n \geq 0$.

Les dénominateurs 5, 8, 11, 14, ... forment aussi une progression arithmétique de raison 3, la forme est donc: $3n+5, n \geq 0$.

Conclusion:
$$\boxed{u_n = \frac{2n+2}{3n+5}, n \geq 0}$$

* $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$: Chaque numérateur est le produit de nombres impairs consécutifs :

$$\prod_{j=0}^n (2j+1), n \geq 0.$$

Les dénominateurs sont aussi le produit de termes d'une progression arithmétique de raison 3 :

$$\prod_{j=0}^n (3j+1), n \geq 0$$

Conclusion:
$$\boxed{u_n = \prod_{j=0}^n \left(\frac{2j+1}{3j+1} \right), n \geq 0}$$

* $2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \dots$: C'est une série alternée (+1 puis -1)
donc les fractions sont multipliées par $(-1)^n$.

Les numérateurs sont les nombres entiers à partir de 2, et les dénominateurs les carrés de nombres entiers à partir de 1. Donc

$$u_n = (-1)^n \frac{n+2}{(n+1)^2}, \quad n \geq 0$$

* $2 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{5} + 6 + \frac{1}{7} + \dots$: Une première manière de faire est de grouper les termes deux par deux :

$$\underbrace{\left(2 + \frac{1}{3}\right)}_{u_1} + \underbrace{\left(4 + \frac{1}{5}\right)}_{u_2} + \underbrace{\left(6 + \frac{1}{7}\right)}_{u_3} + \dots$$

Ainsi si $u_n = 2n + \frac{1}{2n+1}, \quad n \geq 1$

Si on considère que chaque terme est "seul" terme de la série, ce sont les nombres entiers (à partir de 2) une fois avec la puissance 1 et après la puissance -1 (les puissances sont alternées). Ainsi si

$$u_n = (n+1)^{(-1)^{n-1}}, \quad n \geq 1$$

Exercice 2 : * $u_n = \prod_{k=0}^n \frac{(2k+1)}{(3k+2)}, \quad n \geq 0.$

Comme l'expression de u_n est "multiplicative", alors le critère approprié (à première vue) est celui de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \frac{(2k+1)}{(3k+2)}}{\prod_{k=0}^n \frac{(2k+1)}{(3k+2)}} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} < 1$$

Donc la série $\sum u_n$ converge.

* $v_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$; Parfois, avant de s'engager dans l'application d'un critère, on vérifie si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ ou non.

Dans le cas présent on a :

$$v_n = \left(\frac{2n+1-2}{2n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1/2}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1/2}\right)^{n+1/2} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1/2}\right)^{-1/2}}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ 1}}$$

Maintenant la limite bien connue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$$

Permet de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1/e \neq 0$, donc la série diverge car la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite.

* $w_n = \frac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$. Là aussi, la structure multiplicative de w_n , suggère d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$\text{et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = e^{-1} < 1.$$

Donc la série converge.

* $\theta_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$, $n \geq 2$. On applique la même méthode que dans le cours lors de l'étude de la série de Riemann. On considère ici la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{t \ln^2 t}$ avec $t \in [2, +\infty[$. $\varphi'(t) = \frac{-(\ln^2 t + 2 \ln t)}{t^2 \ln^4 t}$. Comme $t \geq 2$

alors $\ln t \geq \ln 2 > 0$ et donc $\varphi'(t) < 0$ dans $[2, +\infty[$ c'est-à-dire la fonction φ est décroissante. Si $k \leq t \leq k+1$, $k \geq 2$

alors $\frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \frac{1}{t \ln^2 t} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}$, d'où par intégration

dans l'intervalle $[k, k+1]$, on aura :

$$\frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln^2 t} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \left[\frac{-1}{\ln t} \right]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}, k \geq 2}$$

On somme cette double inégalité de $k=2$ à $k=n$ et posons

$$S_n = \sum_{k=2}^n \theta_k; \text{ alors: } \boxed{S_n - \frac{1}{2 \ln^2 2} \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq S_n}$$

Avec l'inégalité de gauche on obtient :

$$S_n \leq \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}$$

Ce qui implique que la suite (S_n) (des sommes partielles) est majorée, comme elle est croissante (car $\theta_n \geq 0$), donc convergente.

La série converge.

Exercice 3: $u_n = (-1)^n n^a \cdot b^n$; $n \geq 1$ (car a peut être < 0).

On a: $|u_n| = n^a \cdot |b|^n = e^{a \ln n + n \ln |b|}$

• Si $|b| > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$, il y a divergence
de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, il y a divergence aussi
de $\sum u_n$.

• Si $|b| = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a \ln n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$

donc il y aura divergence pour $a \geq 0$, car la condition
nécessaire n'est pas satisfaite. Ici $|u_n| = \frac{1}{n^a}$
donc convergence absolue si $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$

• Si $|b| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, et là on peut

faire l'étude de la convergence absolue, par le critère de d'Alembert
par exemple, ou même Cauchy: $|u_n|^{1/n} = e^{a \frac{\ln n}{n} + \ln |b|}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^{1/n} = |b| < 1$, donc il y a convergence absolue.

Conclusion 1: La convergence absolue de la série aura lieu
si et seulement si $\begin{cases} |b| < 1, \forall a \in \mathbb{R} \\ \text{ou bien} \\ |b| = 1 \text{ et } a < -1 \end{cases}$

Les seuls cas où on pourrait avoir la semi-convergence, sont $b = \pm 1$ et selon a .

Pour $b = -1$, $u_n = n^a = \frac{1}{n^{-a}}$ converge si $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$ et elle est absolue
car $u_n > 0$.

Pour $b = 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{-a}}$, la convergence selon Abel si $-a > 0 \Leftrightarrow a < 0$,
(semi-convergence).

On résume tous les cas dans le tableau suivant;

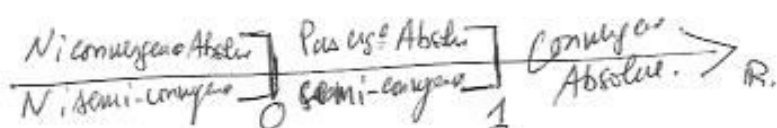
	$ b < 1$	$b = -1$	$b = 1$	$ b > 1$
$a < -1$	Convergence Absolue	Convergence Absolue	Convergence Absolue	Ni Convg. Absolue Ni semi-convergence
$-1 \leq a < 0$	Convergence Absolue	Ni Convg. Absolue Ni semi-convergence	Semi-convergence seulement	Ni Convg. Absolue Ni semi-convergence
$a \geq 0$	Convergence Absolue	Ni Convg. Absolue Ni semi-convergence	Ni Convg. Absolue Ni semi-convergence	Ni Convg. Absolue Ni semi-convergence

$$\boxed{v_n = \frac{(-1)^n}{n^a}, \quad n \geq 1}$$

* $|v_n| = \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$, convergence Absolue.
(critère de Riemann)

* Si $0 < a \leq 1$: il y a semi-convergence selon Abel.

* Si $a \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$, donc pas de convergence.



$$w_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

* $|w_n| = \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc pas de convergence Absolue.

* Avec le critère d'Abel, $\sum w_n$ est convergente (semi-convergence)

car $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \searrow, \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

et $\left|\sum_{k=1}^n (-1)^k\right| \leq 1, \forall n \geq 1$.

Exercice 4: Calcul de $S = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n}$.

Considérons $S(x) = \sum_{n \geq 1} n^2 x^n$, alors $S = S(1/2)$.

La convergence de $\sum n^2 x^n$ s'étudie par le critère de d'Alembert.

$u_n(x) = n^2 x^n \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} x \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$, donc si $|x| < 1$

la convergence est assurée. Partons de $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

ou encore:
$$\sum_{n \geq 0} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} n^2 x^n - \sum_{n \geq 0} n x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Et donc
$$S = S(1/2) = \frac{\frac{1}{2}(1+1/2)}{(1-1/2)^3} = \frac{3/4}{1/8} = 6$$

$w_n = \arctg\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right); n \geq 0$. Calcul de $K = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

On sait que $\arctg t = t + t o(t)$, $t \rightarrow 0$ d'où $w_n \sim \frac{1}{n^2}$.
La convergence de la série s'en déduit.

On a $\arctg(a-b) = \frac{\arctg a - \arctg b}{1 + \arctg a \arctg b}$; d'où

$$\arctg(x+1) - \arctg(x) = \frac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{x^2+x+1}$$

à condition de montrer que $\forall x, \arctg(x+1) - \arctg x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Notons $\varphi(x) = \arctg(x+1) - \arctg x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$.

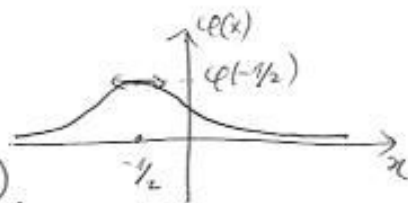
$$\text{On a } \varphi'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x-1}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \varphi(x) \leq \varphi(-1/2)$.

$$\varphi(-1/2) = \arctg(1/2) - \arctg(-1/2) = 2\arctg(1/2).$$

Un calcul approché donne: $\varphi(-1/2) \approx 0,93$ et $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

Donc on a bien $\varphi(x) \in]0, \pi/2[$.



D'après ce qui précède :

$$\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

Donc $w_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n.$

$$\Rightarrow W_n = \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{k=0}^n (\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k)$$

$$W_n = \operatorname{arctg}(n+1) \Rightarrow \boxed{K = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(n+1) = \pi/2}$$

Exercice 5 : 1°/ Montrez que $\forall x > 0, \frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$

On peut montrer cette double inégalité à l'aide du théorème des accroissements finis (par exemple). Considérons $\varphi(t) = \ln t, t \in [x, x+1]$ ($x > 0$ fixé).

D'après l'th. A.F on a : $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \varphi'(c), x < c < x+1$

$$\Rightarrow \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}. \text{ Or } \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}, \text{ d'où le résultat.}$$

2°/ d'application de la double inégalité donne :

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{1+k} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

Par sommation de 1 à $n-1$ on trouve :

$$S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$$

ou $S_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq S_n.$

Considérons $\theta_n = S_n - \ln n$. Alors $\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0$

Donc la suite (θ_n) est décroissante. De plus

$0 \leq \ln(n+1) - \ln n \leq S_n - \ln n = \theta_n$ montre que θ_n est minorée. Donc (θ_n) est convergente. Notons γ sa limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \ln n) = \gamma.$

3°/ Posons $\tau_n = S_n - \ln n - \gamma$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = 0 \Rightarrow \tau_n = o(1)$

$$\text{cf } \boxed{S_n = \ln n + \gamma + \tau_n}$$

Exercice 6: Hypothèses: (a_n) décroissante.

$\sum a_n$ converge.

Problème: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$?

1^o. Remarquons d'abord que la convergence de la série $\sum a_n$, implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Mais comme (a_n) est décroissante, alors

forçément $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0}$. Car sinon, $\exists n_0$ tq $a_{n_0} < 0$.

Mais alors $\forall n > n_0, a_n \leq a_{n_0} < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq a_{n_0}$, ce qui contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

• Rappelons un (petit) résultat sur les suites, facile à établir.

Si (b_n) est une suite telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{2k} = l = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_{2k+1}$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$.

• Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe, donc

la suite (S_n) est de Cauchy. Or on a:

$$S_{2k} - S_k = \sum_{j=k+1}^{2k} a_j \geq k a_{2k} \text{ (par la décroissance)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (2k) a_{2k} \leq 2(S_{2k} - S_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Aussi: } S_{2k+1} - S_k = \sum_{j=k+1}^{2k+1} a_j \geq (k+1) a_{2k+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (2k+1) a_{2k+1} \leq \frac{(2k+1)}{k+1} (S_{2k+1} - S_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{En définitive } \lim_{k \rightarrow +\infty} 2k a_{2k} = 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} (2k+1) a_{2k+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0.$$

2^o La réciproque. Hypothèses: (a_n) décroissante + $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$

Problème: $\sum a_n$ converge?

La réponse est non en général. Contre-exemple: $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, $\sum a_n$ divg et pourtant $a_n \searrow$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

⑨