Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$2^{ème}$ année Statistiques
Année 2021-2022
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Travaux Dirigés 1
Analyse 3

Exercice 1

En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},\quad b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{5^{n-1}},\quad c)\ \sum_{n\geq 0}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)},\quad d)\ \sum_{n\geq 2}\ln(1-\frac{1}{n^2}),$$
$$e)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\quad f)\ \sum_{n\geq 1}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Exercice 2

Etudier la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\geq 0}\frac{3n+4}{5n+1},\quad 2)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},\quad 3)\ \sum_{n\geq 1}\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right),\quad 4)\ \sum_{n\geq 1}e^{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)},\quad 5)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1}.$$

Exercice 3

En comparant à des série de Riemann, indiquer la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n^2},\quad b)\ \sum_{n\geq 1}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\quad c)\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}},\quad d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{2^n+n}{2^n.n}.$$

Exercice 4

En comparant à des série de Bertrand, déduir la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}},\quad b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}},\quad c)\ \sum_{n\geq 2}\frac{\ln n+(\ln n)^3}{n^3+\sqrt{n}},\quad d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n+3}{n(\ln n)^2+3}.$$

Exercice 5

En utilisant les critères de Cauchy et d'Alembert, étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$a)\ u_n=\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2}(\alpha\in\mathbb{R}),\quad b)\ u_n=\frac{3^{2^n}}{2^{3^n}},\quad c)\ u_n=\frac{\ln(n!)}{n!},\quad d)\ u_n=(\cos(1/n))^{n^3},$$
$$e)\ u_n=\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}(a>0),\quad f)\ u_n=n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{2^k}\right),\quad g)\ u_n=\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

Exercice 6 (Le critère de Leibniz)

Etudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$1)\ u_n=\frac{(-1)^n}{1+n^\alpha}(\alpha\in\mathbb{R}),\quad 2)\ u_n=\sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right),\quad 3)\ u_n=\frac{(-1)^n}{\tanh(n)}.$$

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Exercice 7

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette série soit convergente pour $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (En utilisant le critère d'Abel)
2. Déduire la convergence des séries : $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(n\alpha)}{(\ln n)^3}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n)}{n \ln n}$.

Exercice 8

Utiliser le développement asymptotique pour déterminer la nature des séries suivantes :

$$1) \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}, \quad 2) \sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+2}\right), \quad 3) \sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{n+2\cos n}.$$

Exercice 9 (**La formule de Stiriling**)

On pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

1. Etudier la nature de la série $\sum v_n$.
2. Déduire que la suite (u_n) soit convergente vers un réel $C > 0$.
3. Déterminer C en utilisant la formule de Wallis :
$$\sqrt{\pi} \overset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}{\sqrt{2n+1}(2n)!}.$$
4. Etablir la formule de Stiriling :
$$n! \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$
5. Déduire que :
$$\ln(n!) \overset{+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Exercice 10

Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, déterminer la valeur des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.