

Centre Universitaire de Mila

Année universitaire 2020/2021

Institut des Sciences et de la Technologie

Domaine: LMD-MI (1^{er} année)

Analyse I

Série d'exercices N° 03

Semestre I

Exercice 1:

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{1 - |x|} ; f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} ; f(x) = \ln(4x+3) ; f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin 2x}.$$

Exercice 2:

Etudie la parité (paire ou impaire) des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{tgx - x}{x^3 \cos x} ; g(x) = \frac{\sin^2 2x - \cos 3x}{tgx}$$

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par:

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1- Montrer que f est majorée et minorée sur \mathbb{R} .

2- Déterminer $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 4:

Par définition, Montrer que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2 ; \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 3 ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty (*) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 (*).$$

Exercice 5:

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes:

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}; \\ & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} E(x); \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{x^4}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}; \\ & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|\sin x|}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}. \end{aligned}$$

Exercice 6:

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point x_0 . Sont-elles prolongeables par continuité sur \mathbb{R} ?

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0 \quad ; \quad 2) f(x) = \sin(x+1) \ln|x+1|, x_0 = -1$$

$$3) f(x) = \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|}, x_0 = 0 \quad ; \quad 4) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, x_0 = 0.$$

Exercice 7:

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} - 1 & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ x^2 + x - a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1- Déterminer les nombres réels a, b pour que f soit continue sur \mathbb{R} , en particulier au point $x_0 = 0$.

2- Dans ce cas, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 8:

Soit f une fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a, b pour que f soit continue sur \mathbb{R} .

N B: Les exercices (*) sont laissés aux étudiants