PROGRAMMES

CHAPITRE 1 : GEOMETRIE AFFINE

A. NOTIONS D'ESPACE AFFINE

1. Définitions

d_1.On appelle espace affine un couple ($\mathcal{E}$, E) d'ensembles tels que

$\mathcal{E}$ est non vide, (ses éléments sont appelés points).

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

couple muni d'une loi : $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ notée + et vérifiant les deux axiomes :

i) $\forall A \in \mathcal{E}$, l'application $\vec{v} \mapsto A + \vec{v}$ est une bijection de E sur $\mathcal{E}$.

ii) $\forall M \in \mathcal{E}$ et $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$

d_2. $\forall \vec{u} \in E$, l'application $T_{\vec{u}} : M \mapsto M + \vec{u}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$

Remarques

($\mathcal{E}$, E) peut se noter $\mathcal{E}$

E est appelé "l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$"

Dans ii), le signe + désigne deux lois différentes.

Exemple de base

$\mathcal{E}$ est l'espace physique ordinaire de dimension 3, E l'ensemble des vecteurs de l'espace, $A + \vec{v} = T_{\vec{v}}(A)$

d_3. Par définition, dim $\mathcal{E}$ = dim E

Si dim $\mathcal{E} = n < +\infty$, $\mathcal{E}$ est appelé droite affine, plan affine si n respectivement égal à 1, 2.

d_4. Notation affine d'un vecteur

$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2$, le vecteur x de E tel que $A + x = B$ est noté $\overrightarrow{AB}$ ou encore B - A.

En particulier $A = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Généralisation

$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^n$ et $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, l'expression $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i$ désignera un vecteur de E égal à $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{PA_i}$; $\forall P \in \mathcal{E}$

En effet :

$\sum_{i=1}^{n} a_i A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(P + \overrightarrow{PA_i}) = (\sum_{i=1} a_i)P + \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{PA_i}$

Illustration : $7A - 9B + 2C = -9\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

2. Propriétés

$(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine.

P1. Egalité de Chasles : $\forall(A, B, C) \in \mathcal{E}^3$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

En particulier, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

P2. Structure d'espace affine d'un espace vectoriel.

Le couple (E, E) muni de la loi E x E → E, $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$ est un espace affine.

En particulier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des espaces affines.

P3. Le groupe des translations d'un espace affine.

$T_{\vec{u}}$ est une bijection dont la réciproque est $T_{-\vec{u}}$

L'ensemble $(\mathcal{T}, o)$ des translations de $\mathcal{E}$ muni de la composition des applications, est un groupe commutatif :

$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ $\qquad$ $T_{\vec{0}} = Id_{\mathcal{E}}$

Note : $Id_{\mathcal{E}}$ désigne l'application $\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$, $\vec{v} \longmapsto v$ appelée "identité de $\mathcal{E}$ "

P4. Propriétés de l'application vectorielle de Leibniz $\mathcal{L} : \mathcal{E} \mapsto E$,

$M \longmapsto \sum^n a_i\overrightarrow{MA_i}$

Soient n point $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et n réels $a_1, \dots, a_n$

L'application L : $\mathcal{E} \longmapsto E$, $M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i}$ est :

- Une application constante d'image $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i$ si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$
- Une bijection si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

Preuve

1er cas : $a = \sum_{i+1}^{n} a_i = 0$

$\mathcal{L}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MN} + \sum a_i\overrightarrow{NA_i}$, N quelconque

$= (\sum a_i)\overrightarrow{MN} + \mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N)$

Donc L constante d'image $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i$ d'après d_4 du 1°)

2^e cas : $a \neq 0$

$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N) \Longrightarrow \sum a_i\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Longrightarrow a\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Longrightarrow M = N$

$\forall \vec{w} \in E \quad \exists ?\, P \in \mathcal{E}$ tel que : $\mathcal{L}(P) = \vec{w}$

$\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{PA_i} = \vec{w} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{PA_1} + \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{AA_1} = \vec{w}$

$a\overrightarrow{PA_1} = \vec{w} - \sum_{i=1} a_i\overrightarrow{A_1A_i} \Rightarrow P = A_1 + \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1} a_i\overrightarrow{A_1A_i} - \vec{w}\right)$

3. Sous espace affine

Définitions

d_1. Soient $(\mathcal{E}, E)$, un espace affine, $\mathcal{E}'$ une partie non vide de $\mathcal{E}$ et E' un sous espace vectoriel réel de E.

Le couple $(\mathcal{E}', E')$ est appelé sous espace affine de $(\mathcal{E}, E)$ si la restriction de la loi externe + à $(\mathcal{E}', E')$ satisfait aux critères i) et ii).

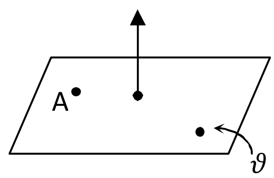
d_2. Dans un espace affine $(\mathcal{E}, E)$ on appelle

droite affine de $\mathcal{E}$

plan affine de $\mathcal{E}$

un sous espace affine de dimension respectivement égale à 1, 2.

Exemple



Dans l'espace physique ordinaire $\mathcal{E}$ avec dim $\mathcal{E} = 3$,

soit A un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{d} \neq \vec{0}$ dans E ; alors

l'ensemble des points $\{M \in \mathcal{E};\ \overrightarrow{AM}.\vec{d} = 0\}$ est sous espace affine $\mathcal{V}$; c'est le plan passant par A et de direction $\{\vec{d}\}^{\perp}$.

4. Variétés affines

Définitions

d1. On appelle variété affine de $(\mathcal{E}, E)$ une partie $\mathcal{V}$ non vide de $\mathcal{E}$ telle que l'ensemble $V = \{\overrightarrow{AB};\ (A, B) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ est un sous espace vectoriel de E.

V est appelé <u>la direction de $\mathcal{V}$</u> et dim $\mathcal{V}$ est la dimension de V.

On note $(\mathcal{V}, V)$ ou tout simplement $\mathcal{V}$ la variété affine de direction V.

Remarques : $\forall (M, N) \in \mathcal{V}^2$, on a $\overrightarrow{MN} \in V$

$\forall M \in \mathcal{V}, \forall \vec{u} \in V,\ M + \vec{u} \in \mathcal{V}$

A fixé dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}' = \{A + \vec{u}; \vec{u} \in V\}$ d'où la notation : $\mathcal{V} = A + V$

Exemples

Si $\mathcal{E} = E$: soit V un sous espace vectoriel de E et $\vec{u}$ un vecteur de E

$\mathcal{V} = \vec{u} + V = \{\vec{u} + \vec{v}; \vec{v} \in V\}$ est une variété affine de E de direction V

$\mathcal{V}$ égal à V si $\vec{u} \in V$, et $\mathcal{V} \neq V$ si $\vec{u} \notin V$, dans ce cas, $\mathcal{V}$ n'est pas un s. e. v. de E

CAS PARTICULIERS

Soit $(\mathcal{V}, V)$ une variété affine de $(\mathcal{E}, E)$ avec $\dim \mathcal{E} = n$

- Si $\dim \mathcal{V} = 1$, $\mathcal{V}$ est appelée droite affine de $\mathcal{E}$, $V = \mathbb{R}\vec{d}$ droite vectoriel.
- Si $\dim \mathcal{V} = 2$, $\mathcal{V}$ est appelée plan affine de $\mathcal{E}$, $V = IR\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$ plan vectoriel
- Si $\dim \mathcal{V} = n - 1$, $\mathcal{V}$ est appelée hyperplan affine , $V = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$ hyperplan vectoriel de E
- Si $\mathcal{V} = \{\Omega\}$ où $\Omega \in \mathcal{E}$, $\mathcal{V}$ est appelée singleton de $\mathcal{E}$ et $V = \{\vec{0}\}$

d_2. Parallélisme, variété supplémentaires

Soient $(\mathcal{V}_1 V_1)$ et $(\mathcal{V}_2 V_2)$ deux variétés affines de $(\mathcal{E}, E)$; on dit que :

- $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont parallèles si $V_1 = V_2$
- $\mathcal{V}_1$ est parallèle à $\mathcal{V}_2$ si $V_1 \subset V_2$
- $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont supplémentaires si $E = V_1 \oplus V_2$

Propriétés

P1. Une variété affine est un sous espace affine de $\mathcal{E}$.

P2. Intersection de variétés affines

L'intersection $\mathcal{V}$ d'une famille $(\mathcal{V})_{i \in I}$ de variétés affines, si elle n'est pas vide, est une variété affine de $\mathcal{E}$ dont la direction est $V = \bigcap_{i \in I} V_i$ l'intersection des directions de ces variétés affines.

P3. Variété affine engendrée

Définition

Soit X une partie non vide de $(\mathcal{E}, \mathrm{E})$, l'intersection des variétés affines contenant X est une variété affine, appelée variété affine engendrée par X ; on la note AFF(X).

Exemple

$\mathcal{E}$ = espace physique ordinaire

Si X = $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ alors AFF(X) = droite (AB)

Si X = $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ alors AFF(X) = droite (AB) si A, B, C alignés ou égal au plan (A, B, C) sinon

Si X = $\{\mathrm{A}, \mathrm{D}\}$ alors AFF(X) = droite $\mathcal{D}$ si A ∈ $\mathcal{D}$, si A ∈ $\mathcal{D}$ ou égal au plan (A, $\mathcal{D}$) si A ∉ $\mathcal{D}$

Propriété

Si A est un point de X, AFF(X) est la variété affine contenant A et de direction vect $\left\{\overrightarrow{\mathrm{AM}};\ \mathrm{M} \in \mathrm{X}\right\}$.

Remarque

AFF(X) = A + Vect $\left\{\overrightarrow{\mathrm{AM}};\ \mathrm{M} \in \mathrm{X}\right\}$

$\mathrm{P} \in \mathrm{AFF}(\mathrm{X})$ alors P = A + $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{AM}_i}$ où $\mathrm{M_i} \in \mathrm{X}$ et λ_i réels ou

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{AM}_i}$

5. Barycentres, parties convexes

$(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ désigne un espace affine.

A. Barycentres

Définitions

d1. On appelle système pondéré toute famille finie

$S = \{(\mathrm{A_i}, a_i) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R};\ 1 \leq i \leq n\}$

De points pondérés (A_i, a_i) ; la somme des coefficients $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$ est appelée le poids du système.

d2. Fonction vectorielle de Leibniz

Soit le système pondéré $S = \{(A_i, a_i); 1 \leq i \leq n\}$ de poids s.

La fonction $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to E, M \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système pondéré S.

- **Cas où s = 0**

L est une application constante, c'est-à-dire qu'il existe $\vec{V} \in E$ tel que

$\forall M \in \mathcal{E} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{V}$

Notation affine d'un vecteur : On pose $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ pour M choisi arbitrairement dans $\mathcal{E}$.

- **Cas où s ≠ 0**

L est une bijection de $\mathcal{E}$ sur E

L'antécédent G de $\vec{o}$ est appelé barycentre du système pondéré S

$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{o} \iff \forall P \in \mathcal{E}, \ \overrightarrow{PG} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{PA_i}$

D'où la notation affine du barycentre de S :

$G = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{A_i}$ ou $G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Remarques

- La notion ordinaire du barycentre G du système S est $G = \text{bar}\{(A_i, a_i), 1 \leq i \leq n\}$
- La somme 9A - 5B - 3C désigne un barycentre, alors que la suivante 9A- 5B - 4C, désigne le vecteur $-5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- Si le poids du système est égal à 1, le système pondéré est dit **normalisé**

d3. On dit qu'un point M de $\mathcal{E}$ est barycentre d'une partie X non vide de $\mathcal{E}$ s'il existe un système pondéré formé de points de X dont le barycentre est M.

d4. On appelle **Segment d'extrémités A et B**, et on note [A, B], l'ensemble des barycentres du système [A, B] affectés de coefficients réels positifs :

a et b positifs, $\frac{1}{a+b}(aA + bB) = \frac{a}{a+b}A + \frac{b}{a+b}B$

Chacun des 2 quotients est dans [0 ; 1] et leur somme est 1, d'où :

$[A; B] = \{ (1-t)A + tB; \quad t \in [0; 1] \}$; on a $[A, B] = [B, A]$

d5. Isobarycentre de n points

Pour tout a réel non nul, le barycentre du système pondéré

$S = \{(A_i; a); \ 1 \leq i \leq n\}$ est appelé isobarycentre des n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$.

Comme $\sum_{i=1}^{n} a\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i$, l'isobarycentre de n points A_i de $\mathcal{E}$ est le barycentre de $\left\{\left(A_i, \frac{1}{n}\right); 1 \leq i \leq n\right\}$.

d6. On appelle **MILIEU D'UN SEGMENT** [A, B] l'isobarycentre des deux points A et B : $G = \frac{1}{2}(A + B)$.

PROPRIETES

P1. Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par le même nombre non nul c'est-à-dire $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors les deux systèmes pondérés $\{(A_i;\ a);\ 1 \leq i \leq n\}$ et $\{(\lambda a_i,\ A_i);\ 1 \leq i \leq n\}$ ont le même barycentre.

Si $\lambda = s^{-1}$, le système obtenu est normalisé.

P2. Associativité du barycentre

Soit $\{(a_i; A_i); i \in I\}$ de poids α non nul.

On suppose [I₁, I₂] être une partition de I telle que les systèmes

$S_1 = \{(a_i; A_i);\ i \in I_2\}$ et $S_2 = \{(a_i;\ A_i); i \in I_2\}$ sont de poids respectifs non nuls α_1 et α_2 ; et on désigne par G, G_1 et G_2 les barycentres respectifs de S, S_1 et S_2

Alors G est aussi le barycentre du système $\{(\alpha_1,\ G_1), (\alpha_2,\ G_2)\}$

Preuve : $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $I_1 \cup I_2 = I$

$G' = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2) = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha_1 \frac{1}{\alpha_1}\sum_{i \in I_1} a_i A_i + \alpha_2 \frac{1}{\alpha_2}\sum_{i \in I_2} a_i A_i\right)$

$= \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{i \in I_1} a_i A_i + \sum_{i \in I_2} a_i A_i\right)$

$= \frac{1}{\alpha}\sum_{i \in I_2} a_i A_i = \frac{1}{\alpha}\sum_{i \in I} a_i A_i = G$

P3. TOUT POINT EST UN BARYCENTRE

Théorème

La variété affine engendrée par une partie non vide X de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des barycentres de X.

<u>Preuve</u>

Soit A un point de X, appelons $\mathcal{V}$ l'ensemble des barycentres de X.

- Hypothèse : $P \in AFF(X) = A + Vect\{\overrightarrow{AM}\ ;\ M \in X\}$ alors on a

$P = A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i} \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM_i})$

$=[(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) - 1]\ \overrightarrow{AP} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PM_i} = \vec{0} \Longrightarrow$ P barycentre de X

- Hypothèse : $P \in \mathcal{V}$ alors $P = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \overrightarrow{M_j}$ avec $\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j = 1$ alors

  $\overrightarrow{AP} = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_i \overrightarrow{AM_j} \Longrightarrow P = A + \sum_{j=1}^{n'} \alpha_i \overrightarrow{AM_j} \Longrightarrow P \in AFF(X)$

B. PARTIES CONVEXES

DEFINITIONS

d1. On dit qu'une partie X de $\mathcal{E}$ est convexe si elle contient les segments dont les extrémités sont des points de X.

C'est-à-dire : X convexe $\Leftrightarrow \forall\ (P, Q) \in X^2 \quad [P,\ Q] \subset X$

Exemples

1. $\mathcal{E}$ est convexe car il contient la droite (AB) et donc [AB].

   Par conséquent les espaces vectoriels réels, munis de leur structure affine naturelle, sont convexes ; ainsi que les variétés affines.
2. Tout segment [A, B] est convexe
3. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles quelconques

4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule $B = \{x \in E;\ \|x - a\| < r\}$ de centre a et de rayon r, et convexe
5. Dans $(\mathcal{E}, E)$, soit le plan affine $\mathcal{P}$ = AFF(X) où $X = \{A, B, C\}$ on a $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}\overrightarrow{AC}$; les demi plans ouverts ou fermés de bord $A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB}$ sont des convexes :

$$A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}^{+}\overrightarrow{AC}, \quad A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}^{+*}\overrightarrow{AC}, \qquad A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}^{-}\overrightarrow{AC}$$

Remarques : $\emptyset$ est convexe

D2. ENVELOPPE CONVEXE D'UNE PARTIE

Intersection de convexes

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$

Alors, l'intersection $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

Enveloppe convexe d'un sous ensemble

Soit X une partie de $\mathcal{E}$

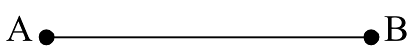
On appelle enveloppe convexe de X l'intersection notée $\widehat{X}$ de la famille des parties convexes de $\mathcal{E}$ contenant X (cette famille contient $\mathcal{E}$, n'est donc pas vide).

Ainsi l'enveloppe convexe de X est le plus petit convexe contenant X.

Illustration

Cas 1 : X = [A, B]

$\widehat{X}$= [A, B]



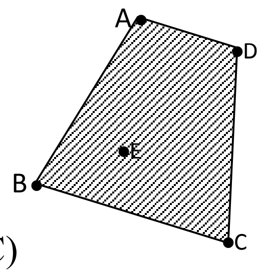
AFF(X) = droite (AB)

Cas 2 :

X = [A, B, C, D, E]

$\widehat{X}$ = Zone hachurée

AFF(X) = plan (A, B, C)



__PROPRIETES__

Le lien entre la notion d'ensemble convexe et celle de barycentre est établi par la propriété suivante.

P1. Caractérisation d'un convexe

Pour qu'une partie non vide X de $\mathcal{E}$ soit convexe, il faut et il suffit que X contienne l'ensemble des barycentres de points de X affectés de coefficients réels positifs.

<u>Preuve</u>

- Montrons que si X contient les barycentres d'éléments de X à coefficients positifs alors X est convexe :

  Soit le segment [A, B] avec A et B dans X, soit le point quelconque de ce segment, $G = (1-t)A + tB,\ t \in [0;1]$ comme G est à coefficients positifs alors $G \in X$, donc $[A,B] \subset X$, et X est convexe.
- Montrons par récurrence sur n que "si X est convexe alors X contient tout barycentre de n éléments de X à coefficients positifs".

Si $n = 2$

$G = \frac{1}{a_1 + a_2}(a_1A + a_2A) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}A_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2}$, $a_1$et a_2 positifs G est de la forme $(1-t)A_1 + tA_1,\ t \in [0;1]$; or X convexe donc $G \in X$

Hypothèse de récurrence : "Si X convexe alors X contient les barycentres de moins de n éléments de X à coefficients positifs."

Montrons qu'il contient ceux de $n + 1$ éléments.

$$G = \frac{1}{a_1 + \cdots + a_{n+1}}\sum_{i=1}^{n} a_iA_i,\ \ a_i \geq 0, \qquad \text{posons } s = a_1 + \cdots + a_{n+1}$$

$$= \frac{1}{s}(s_nG_n + a_{n+1}A_{n+1}) \qquad \text{où} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ \text{ et,} \qquad G_n = \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n} a_iA_i$$

Par hypothèse, $G_n \in X$ et par suite $G \in X$

P2. Conséquence de P1

Soit X une partie de $\mathcal{E}$

L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres des points de X affectés de coefficients réels positifs.

Remarque : X convexe $\Rightarrow \widehat{X} = X$

Si X n'est pas vide, on a $X \subset \widehat{X} \subset \mathrm{AFF}(X)$

6. Applications affines

$(\mathcal{E},\ E)$et $(\mathcal{E}',\ E')$ désignent des espaces affines.

Définitions

d1. On dit que l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est affine s'il existe un point A de $\mathcal{E}$ tel que l'application φ de E dans E' définie par :

$$f(A + \vec{v}) = f(A) + \varphi(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in E$$

est linéaire.

<u>**Remarque :**</u>

f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ affine alors $\forall\, B \in \mathcal{E},\ \forall \vec{v} \in E,\ f(B + \vec{v}) = f(B) + \varphi(\vec{v})$

En effet :

$f(B + \vec{v}) = f\left(A + \overrightarrow{AB} + \vec{v}\right) = f(A) + \varphi\left(\overrightarrow{AB} + \vec{v}\right) = f(A) + \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) + \varphi(\vec{v}) =$
$f\left(A + \overrightarrow{AB}\right) + \varphi(\vec{v}) = f(B) + \varphi(\vec{v})$

d2. f af ine si et seulement si $\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)f(N)} \quad \forall\,(M, N) \in \mathcal{E}^2$

d3. φ est appelée **partie linéaire** de f et notée L(f)

d4. Cas particuliers :

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$

i) Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, f est appelée endomorphisme affine de $\mathcal{E}$
ii) Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ et f bijection f est appelé automorphisme affine de $\mathcal{E}$.
iii) Si $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}'$ et f bijection, f est appelé isomorphisme affine $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$
iv) Si $\mathcal{E}' = \mathbb{R}$, f est appelé forme affine sur $\mathcal{E}$.

Remarques

f affine alors $f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM})$ $\forall M \in \mathcal{E}$ d'où la proposition suivante.

Etant donnés (A, A') de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ et $\varphi \in L$ (E,E'), il existe une et une seule application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ telle que $A' = f(A)$ et $\varphi = L(f)$

En effet : soit g affine telle que g(A)=A' et L(g)= φ, on a :

$$\left.\begin{array}{l} f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) \\ g(M) = g(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) \end{array}\right\} \Longrightarrow g(M) - f(M) = A' - A' + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow g(M) = f(M)$$

PROPRIETES

P1. Si f et g affines et si gof existe alors gof est affine et L(gof) = L(g)oL(f)

P2. Soit f affine

f injective, surjective et bijective ssi respectivement L(f) injective, surjective et bijective.

P3. Soit f : $(\mathcal{E}, E) \to (\mathcal{E}', E')$ affine et $\varphi = L(f)$

1. Si $(\mathcal{V}, V)$ v.a de $\mathcal{E}$ alors $f(\mathcal{V})$ v.a. de $\mathcal{E}'$ de direction $\varphi(V)$
2. Si $(\mathcal{V}', V')$ v.a de $\mathcal{E}'$ et $f^{-1}(\mathcal{V}') \neq \emptyset$, alors
   $f^{-1}(\mathcal{V}')$ v.a. de $\mathcal{E}'$ de direction $\varphi^{-1}(V')$

P4. Soit f endomorphisme affine de $\mathcal{E}$, posons $Inv(f) = \{M \in \mathcal{E};\ M = f(M)\} = \mathcal{V}$

Si $\mathcal{V} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{V}$ est une v.a. de $\mathcal{E}$.

P5. Si f isomorphisme affine alors f^{-1} isomorphisme affine.

P6. APPLICATION AFFINE ET BARYCENTRE

Théorème

Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

f affine ssi l'image du barycentre est le barycentre des images, c'est-à-dire

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(A_i)$$

$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^n$, $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Preuve

1. Supposons f affine avec $\varphi = L(f)$, montrons que si $M = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ avec $\sum \alpha_i = 1$ alors $f(M) = \sum^{n} \alpha_i f(A_i)$

On a, $\forall O \in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow M = O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$; comme f est affine alors $f(M) = f(O) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\overrightarrow{OA_i})$

$f(M) = f(O) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(O)f(A_\imath)}$ car f af ine

D'où $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(O)f(A_\imath)}$ avec $\sum_{1}^{n} \alpha_i = 1$

$\forall O' \in \mathcal{E}'$on a $\overrightarrow{f(O)O'} + \overrightarrow{O'f(M)} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{f(O)O'} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{O'f(A_\imath)}$

D'où $\overrightarrow{O'f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i O'\overrightarrow{f(A_\imath)}$ $\forall O' \in \mathcal{E} \Rightarrow f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(A_i)$

Preuve P6 suite

2. Supposons que l'image d'un barycentre est le barycentre des images, et montrons que l'application $\varphi: E \to E'$ définie par $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$

$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2$, est linéaire, c'est-à-dire $\varphi(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v_2}) = \lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{v}_2)$.

En effet $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^2$, il existe P_1, P_2 et P dans $\mathcal{E}$ tels que

$\overrightarrow{MP_1} = \vec{v_1}$, $\overrightarrow{MP_2} = \vec{v_2}$ et $\overrightarrow{MP} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

D'où $\overrightarrow{MP} = \lambda_1 \overrightarrow{MP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MP_2}$

Alors $(-1 + \lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{PM} - \lambda_1 \overrightarrow{PP_2} - \lambda_2 \overrightarrow{PP_2} = \vec{0}$

Comme la somme des coefficients est 1, P est un barycentre d'où

$P = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)M + \lambda_1 P_1 + = \lambda_2 P_2$

La supposition ci-haut sur l'image d'un barycentre permet d'écrire :

$f(P) = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)f(M) + \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$

D'où $\overrightarrow{f(M)f(P)} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{f(M)f(M)} + \lambda_1 \overrightarrow{f(M)f(P_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(M)f(P_2)}$

$\overrightarrow{f(M)f(P)} = \vec{0} + \lambda_1 \overrightarrow{f(M)f(P_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(M)f(P_2)}$

La définition ci-haut de l'application φ permet d'écrire :

$\varphi(\overrightarrow{MP}) = \lambda_1 \varphi(\overrightarrow{MP_1}) + \lambda_2 \varphi(\overrightarrow{MP_2})$

D'où $\varphi(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{v}_2) \Rightarrow \varphi$ linéaire $\Rightarrow$ f af ine.

Remarque

f: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ affine alors :

$\mathrm{f}(3\mathrm{A} - 6\mathrm{B} + 7\mathrm{C} - 2\mathrm{D} - \mathrm{E}) = 3\mathrm{f}(\mathrm{A}) - 6\mathrm{f}(\mathrm{B}) + 7\mathrm{f}(\mathrm{C}) - 2\mathrm{f}(\mathrm{D}) - \mathrm{f}(\mathrm{E})$

et $\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{N})\right) = \frac{1}{2}\mathrm{f}(\mathrm{M}) + \frac{1}{2}\mathrm{f}(\mathrm{N})$

NOTATION

Soit f un endomorphisme affine de $\mathcal{E}$, $\mathrm{Inv}(\mathrm{f})$ désigne l'ensemble des points fixes de f, c'est-à- dire $\mathrm{Inv}(\mathrm{f}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{E}; \mathrm{f}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$

APPLICATIONS AFFINES ET CONVEXITE

$(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ et $(\mathcal{E}', \mathrm{E}')$ désignent deux espaces affines, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$' des parties convexes respectives de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$

PROPRIETES

P1. L'image par f d'un convexe de $\mathcal{E}$ est un convexe de $\mathcal{E}'$ c'est-à-dire :

f affine et $\mathcal{K}$ convexe de $\mathcal{E}$, alors $\mathrm{f}(\mathcal{K})$ convexe de $\mathcal{E}'$.

P2. L'image par f d'un segment de $\mathcal{E}$ est un segment de $\mathcal{E}'$. Plus précisément :

f affine et [A,B] segment de $\mathcal{E}$ alors $\mathrm{f}[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = [\mathrm{f}(\mathrm{A}), \mathrm{f}(\mathrm{B})]$

P3. L'image réciproque par f d'un convexe de $\mathcal{E}'$ est un convexe de $\mathcal{E}'$, c'est-à-dire f affine et $\mathcal{K}$' convexe de $\mathcal{E}'$ alors $\mathrm{f}^{-1}(\mathcal{K}')$ convexe de $\mathcal{E}$.

P4. L'image par f de l'enveloppe convexe d'une partie de $\mathcal{E}$ est l'enveloppe convexe de l'image par f de cette partie. C'est-à-dire

f affine et $\mathcal{X}$ sous ensemble de $\mathcal{E}$ alors $\mathrm{f}\left(\widehat{\mathcal{X}}\right) = \widehat{\mathrm{f}(\mathcal{X})}$.

P5. L'image réciproque par f de l'enveloppe convexe d'une partie y de $\mathcal{E}'$ contient l'enveloppe convexe de l'image réciproque de cette partie.

Plus précisément :

f affine et $\mathcal{Y}$ une partie de ε alors $\widehat{\mathrm{f}^{-1}(\mathcal{Y})} \subset \mathrm{f}^{-1}(\widehat{\mathcal{Y}})$

Remarques

1. Il n'existe pas de résultat général sur l'image réciproque d'un segment.
2. Dans P5, l'inclusion devient stricte si f est une application constante et si $f^{-1}(\mathcal{Y}) = \emptyset$

Exemple :

Soient A et B deux points distincts et fixes de $\mathcal{E}$ et f: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$

$M \mapsto \frac{1}{2}(A + B)$; prenons $\mathcal{Y} = \{A, B\}$, on a : $f^{-1}(\mathcal{Y}) = \emptyset \Longrightarrow \widehat{f^{-1}(\mathcal{Y})} = \emptyset$

$\widehat{\mathcal{Y}} = [A, B]$ qui contient le milieu $\frac{1}{2}(A + B)$, donc $f^{-1}(\widehat{\mathcal{Y}}) = \mathcal{E}$

<u>Preuves</u>

P1. Soit $\mathcal{K}$ un convexe de $\mathcal{E}$ et A'B' deux points de $f(\mathcal{K})$; alors il existe deux points A et B de $\mathcal{K}$ tels que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

Un point du segment [A',B'] est M' = (1- t)A' + tB', avec $t \in [0; 1]$ ou

$M' = (1-t)f(A) + tf(B)$, or f affine, alors $M' = f[(1-t)A + tB]$ avec $(1-t)A + tB \in \mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ convexe, donc $M' \in f(\mathcal{K})$, d'où $f(\mathcal{K})$ convexe de $\mathcal{E}'$.

P2. Soient A et B dans $\mathcal{E}$; le segment [A, B] est constitué de barycentres de A et B à coefficients positifs 1- t et t avec $t \in [0; 1]$

f affine conserve le barycentre alors $f([A, B])$ est constitué de barycentres de $f(A)$ et $f(B)$ de coefficients 1- t et t, donc on a bien $f([A, B]) = [f(A), f(B)]$.

P3. Soit $\mathcal{K}'$ un convexe de $\mathcal{E}'$et A, B deux points de $f^{-1}(\mathcal{K}')$; tout point de [A,B] s'écrit $M = (1-t)A + tB$, $t \in [0; 1]$ soit

$M' = f(M) = (1 - tf(A) + tf(B)$ car f af ine, $M' \in [f(A), f(B)]$, alors $M' \in \mathcal{K}'$ convexe contenant ses segments, donc $M \in f^{-1}(\mathcal{K}')$ d'où $[A, B] \subset f^{-1}(\mathcal{K}')$.

P4. Soit $\mathcal{X}$ une partie de $\mathcal{E}$ et f affine, montrons que

(1) $\widehat{f(\mathcal{X})} \subset f(\widehat{\mathcal{X}})$ et que (2) $f(\widehat{\mathcal{X}}) \subset \widehat{f(\mathcal{X})}$.

On a: $\mathcal{X} \subset \widehat{\mathcal{X}} \Rightarrow f(\mathcal{X}) \subset f(\widehat{\mathcal{X}})$

$\widehat{\mathcal{X}}$ convexe donc $f(\widehat{\mathcal{X}})$ convexe car f affine

$f(\widehat{\mathcal{X}})$ est un convexe contenant $f(\mathcal{X})$, or par définition $\widehat{f(\mathcal{X})}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant $f(\mathcal{X})$, donc $\widehat{f(\mathcal{X})} \subset f(\widehat{\mathcal{X}})$

Montrons que $f(\widehat{\mathcal{X}}) \subset \widehat{f(\mathcal{X})}$

Soit $M' \in f(\widehat{\mathcal{X}})$ alors $\exists M \in \widehat{\mathcal{X}}$ tel que $M' = f(M)$

$M \in \widehat{\mathcal{X}}$ alors $M = \sum a_i X_i, \quad X_i \in \mathcal{X}, \quad a_i \geq 0, \quad \sum a_i = 1$

$M' = f(M) = f(\sum a_i X_i) = \sum a_i f(X_i)$ car f af ine donc $M' = \sum a_i X_i'$

$X_i' = f(X_i) \in f(\mathcal{X})$ alors $M' \in \widehat{f(\mathcal{X})}$

P5. Montrons que $f^{-1}(\widehat{\mathcal{Y}}) \supset \widehat{f^{-1}(\mathcal{Y})}$ avec f af ine

Soit $M \in \widehat{f^{-1}(\mathcal{Y})}$, M est un barycentre de $f^{-1}(\mathcal{Y})$ à coefficients positifs, i.e.

$M = \sum a_i X_i$ où $a_i \geq 0$, $\sum a_i = 1$ et X_i antécédent de $Y_i \in \mathcal{Y}$.

$f(M) = \sum a_i f(X_i) = \sum a_i Y_i \Rightarrow f(M) \in \widehat{\mathcal{Y}} \Rightarrow M \in f^{-1}(\widehat{\mathcal{Y}})$

7) Formes affines – hyperplans affines

$(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine.

d1. On appelle <u>forme affine sur $\mathcal{E}$</u> toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

<u>**Remarques**</u>

1. IR est un espace affine de dimension 1
2. Si f est une forme affine sur $\mathcal{E}$ alors $L(f)$ est une forme linéaire sur E

- f est constante $(\text{i.e.} \exists c \in \mathbb{R};\ \forall M \in \mathcal{E}\ f(M) = c)$
  ssi $L(f) = 0$ $(\text{i.e. } \vec{v} \mapsto \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in E)$
- f est non constante sur $\mathcal{E}$ si et seulement si $L(f) \neq 0$ si et seulement si f est surjective.

Propriétés

P1. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ et si f, g sont des formes affines, alors $\alpha f + \beta g$ est une forme affine avec $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$.

P2. Equation d'un hyperplan affine

i) Soit f une forme affine sur $\mathcal{E}$ non constante ; le sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$

$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \,; f(M) = 0\} = f^{-1}(0)$

est un hyperplan affine de E de direction $\varphi^{-1}(0) = \ker\varphi$ avec $\varphi = L(f)$ on dit que " $f(M) = 0$ " est une équation de $\mathcal{H}$.

ii) Soient f_1 et f_2 deux formes affines non constantes sur $\mathcal{E}$. Les hyperplans affines $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ d'équations respectives $f_1(M) = 0$ et $f_2(M) = 0$ sont :

- égaux si et seulement si $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f_2(M) = \lambda f_1(M)$
- parallèles si et seulement si $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $L(f_2) = \alpha L(f_1)$

8) Applications affines classiques

($\mathcal{E}$, E) et ($\mathcal{E}$', E') désignent des espaces affines.

8.1. Application constante

f: $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, $M \longmapsto \Omega$ avec Ω fixé dans $\mathcal{E}$

$L(f): E \rightarrow E'$; $\vec{v} \mapsto \vec{0}$

Propriété : f constante si et seulement si $L(f) = 0$

8.2. Application identité, notée $id_{\mathcal{E}}$ ou e

e: $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, $M \mapsto M$, $L(e): E \rightarrow E$ $\quad \vec{v} \mapsto \vec{v}$, notée Id_E

Propriété : $f = id_{\mathcal{E}}$ si et seulement si $L(f) = Id_E$ et $Inv(f) \neq \emptyset$

8.3. Translation de vecteur $\vec{u}$, notée $T_{\vec{u}}$

$T_{\vec{u}}$: $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$; $M \mapsto M + \vec{u}$, $\quad L(T_{\vec{u}}) = Id_E$

Propriété : $\left.\begin{matrix} f = T_{\vec{u}} \\ \vec{u} \neq 0 \end{matrix}\right\}$ si et seulement si $L(f) = Id_E$ et $Inv(f) \neq \emptyset$

8.4. Homothétie de centre Ω et de rapport r, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

f: $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $M \longmapsto M' = \Omega + r\overrightarrow{\Omega M}$

$Inv(f) = \{\Omega\}$

Propriété : f homothétie de rapport r si et seulement si $L(f) = rId_E$, $r \notin \{0; 1\}$

8.5. Transvection d'hyperplan $\mathcal{H}$ et de vecteur $\vec{u}$

Soit h une forme affine sur $\mathcal{E}$ non constante, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'équation h(M) = 0, H la direction de $\mathcal{H}$, $\vec{u}$ un vecteur de H. On appelle transvection d'hyperplan $\mathcal{H}$ et de vecteur $\vec{u}$ une application f : $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $M \longmapsto M'$ telle que

$$M = M + h(M)\vec{u}$$

Propriétés :

1. $\mathrm{Inv}(f) = \mathcal{H}$
2. $\varphi = L(f)$ tel que $\forall\ \vec{v} \in E \quad \varphi(\vec{v}) = \vec{v} + \varphi(\vec{v})\vec{u}$ où $\varphi = L(h)$

8.6. Projection, symétrie, affinité.

($\mathcal{E}$, E) désigne un espace affine, $e = id_{\mathcal{E}}$

Définitions

d1. On appelle **projection** de $\mathcal{E}$ un endomorphisme affine p de $\mathcal{E}$ tel que pop = p

d2. On appelle **symétrie** de $\mathcal{E}$ un endomorphisme affine s de $\mathcal{E}$ tel que l'application $p = \frac{1}{2}(e + s)$ est une projection de $\mathcal{E}$; p est appelée projection associée à s, définie par : $\forall M \in E$; $p(M) = \frac{1}{2}(M + s(M))$

d3. Soit $r \in \mathbb{R}$ et p une projection de $\mathcal{E}$.

On appelle **affinité** de $\mathcal{E}$ de rapport r associée à la projection p, l'endomorphisme affine a de $\mathcal{E}$ tel que

$$a = re + (1 - r)p$$

Autrement dit : $M \longmapsto a(M) = M' = rM + (1 - r)p(M)$

Ou encore $\overrightarrow{p(M)M'} = r\overrightarrow{p(M)M}$

PROPRIETES

P1. Projection

Soit p une projection de $\mathcal{E}$

i) Posons $\pi = L(p)$; π est un projecteur de E, c'est-à-dire $\pi o \pi = \pi$

ii) Posons $\mathcal{V} = Inv(p)$; alors $\mathcal{V} = Im(p) = p(\mathcal{E})$

$\mathcal{V}$ est une variété affine de direction $V = Im(\pi)$

iii) Posons $W = \ker\pi$; alors $E = V \oplus W$

Les variétés affines $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W} = A + \mathcal{W}$; $\forall A \in \mathcal{E}$, sont supplémentaires dans E, d'intersection $\{p(A)\}$

On dit que p est la projection sur $\mathcal{V}$ parallèlement à W.

$\mathcal{V}$ est appelée la base de p et W la direction de p.

P1. Preuve

i) Evident, voir P1 du 6°)

ii) Inv(p) $\subset$ Im(p) ? M fixe => p(M) = M => M $\in$ Imp(p)

Im(p) $\subset$ Inv(p) ?

M $\in$ Imp(p) => $\exists$ $M_o \in \mathcal{E}$ tel que M = $p(M_o)$ (1) $\Rightarrow$ $p(M) = p^2(M_o)$

⇨ $P(M) = p(M_o)$ (2)

(1) et (2) => M = p(M) => M$\in$ Inv(p).

iii) $E = \ker\pi + Im\pi$?

$\forall\vec{u} \in E$ on a $\vec{u} = \left(\vec{u} - \pi(\vec{u})\right) + \pi(\vec{u})$

$\pi[\vec{u} - \pi(\vec{u})] = \pi(\vec{u}) - \pi^2(\vec{u}) = \pi(\vec{u}) - \pi(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{u} - \pi(\vec{u}) \in w$ or $\pi(\vec{u}) \in Im(\pi)$ donc $E = \ker\pi + Im\,\vec{u}$

$\ker\pi \cap Im\pi = \{\vec{0}\}$?

$\ker\pi = E_0(\pi)$ sous espace propre associé à la valeur propre 0.

$\vec{v} \in Im\pi \Longrightarrow \exists\, \vec{v}_0 \in E$ tel que $\vec{v} = \pi(\vec{v}_0) \Rightarrow \pi(v) = \pi^2(v_0) = \pi(v_0) = \vec{v}$

$\pi(\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow \mathrm{Im}\pi = E_1(\pi)$ sous espace propre associé à la valeur propre 1 ; d'où leur intersection est $\{\vec{0}\}$ selon la Réduction des endomorphismes.

Enfin $E = V \oplus W \Rightarrow \mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ supplémentaires (par définition).

CAS PARTICULIERS EXTREMES

1. $\mathcal{V} = \{\Omega\},\ \Omega \in \mathcal{E},\ \mathcal{W} = \mathcal{E}$ avec $V = \{\vec{0}\}$ et $W = E$

alors $p(\mathcal{E}) = \mathrm{Im}(p) = \mathcal{V} = \{\Omega\} \Longrightarrow p$ application constante.

2. $\mathcal{V} = \mathcal{E},\ \mathcal{W}$ singleton, avec $V = E$ et $W = \{\vec{0}\}$

   Alors $p(\mathcal{E}) = \mathcal{V} = \mathcal{E} = \mathrm{Inv}(p)$ donc p est l'identitéde $\mathcal{E}$.

CARACTERISATION

p projection de $\mathcal{E}$ si et seulement si Inv(p) $\neq \emptyset$ et $L(p)$ projecteur.

P2. <u>Symétrie</u>

Soit s une symétrie de $\mathcal{E}$ et $p = \frac{1}{2}(e + s)$ la projection associée.

i) s est automorphisme involutif de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire sos = e.

ii) Posons $\sigma = L(s)$; σ est une symétrie vectorielle de E, c'est-à-dire $\sigma_0\sigma = \mathrm{Id}_E$

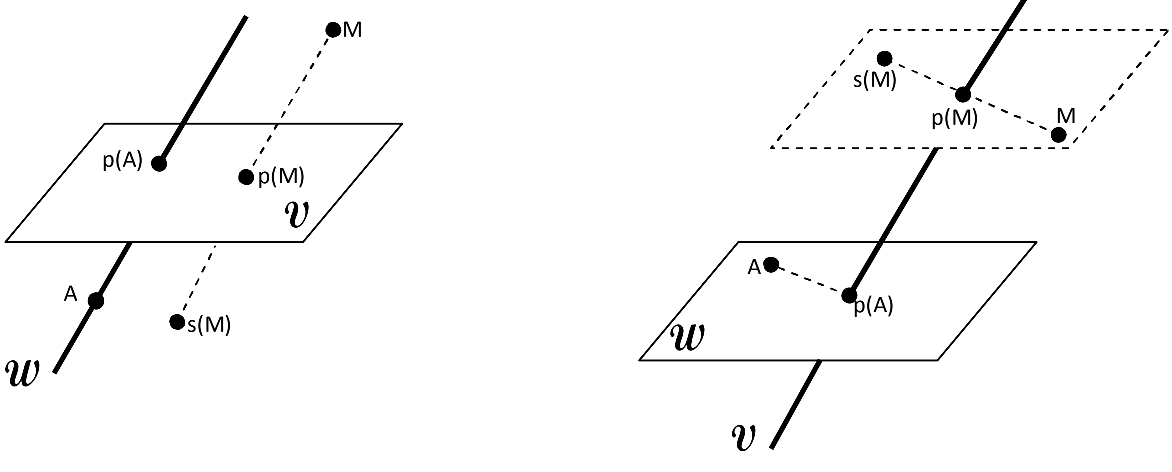
iii) On reprend les notations et les résultats de P1.

$\mathrm{Inv}(s) = p(\mathcal{E}) = \mathcal{V}$.

On dit que p est la symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ parallèlement à W.

Illustration : **dim $\mathcal{E}$ = 3**

$\overrightarrow{Ms(M)} \in W$, $p(M)$milieu de $[M, s(M)]$, $p(M) \in \mathcal{V}$



CARACTERISATIONS

s symétrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\frac{1}{2}(e + s)$ est une projection

s symétrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathrm{Inv}(s) \neq \emptyset$ et $L(s) o L(s) = \mathrm{Id}_E$

P3. Affinité

On revient sur l'affinité a définie au d_3 ; on reprend les notations et les résultats de P1 avec p projection associé à a.

On a : $\mathrm{Inv}(a) = p(\mathcal{E}) = \mathcal{V}$

i) $\text{Si } r = 0$; a est la projection p

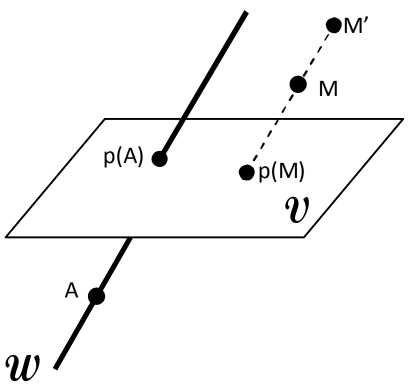
$\text{Si } r = 1$; a est l'identité de $\mathcal{E}$

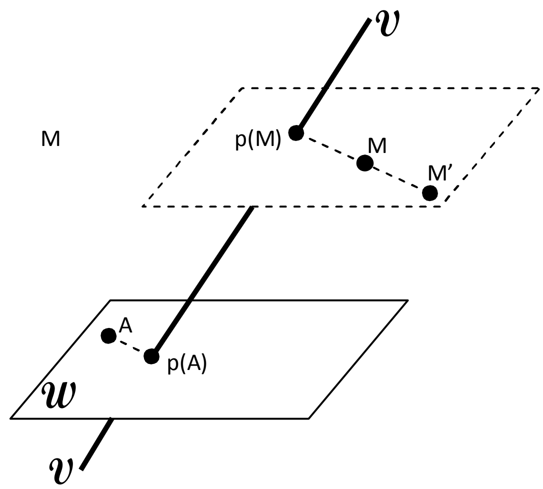
$\text{Si } r = -1$; a est la symétrie associée à p

ii) $L(a) = r\mathrm{Id}_E + (1 - r)\pi$ et $\mathrm{Sp}\big(L(a)\big) = \{1; r\}$

On dit que a est l'affinité de base $\mathcal{V}$, de direction W et de rapport r.

Illustration : $\dim \mathcal{E} = 3$; $a(M) = M'$; $r = \frac{3}{2}$





CARACTERISATION

a affinité de rapport r si et seulement si $\frac{1}{1-r}(a - re)$ projection de $\mathcal{E}$

avec $r \in \mathrm{Sp}(L(a)) \setminus \{1\}$.

REMARQUES

1. Projection

Soit p une projection de base $(\mathcal{V}, V)$, de direction W
Posons $\pi = L(p)$

Si $\vec{v} \in V$, $\pi(\vec{v}) = \vec{v}$ car $\mathcal{V} = \mathrm{Inv}(p)$ donc $V = E_1(\pi)$
Si $w \in W, \pi(w) = \vec{0}$ car $W = \ker(\pi)$ donc $W = E_0(\pi)$

2. **Symétrie**

Soit s une symétrie de $\mathcal{E}$ associée à la projection p ci-dessus.

On a : $p = \frac{1}{2}(e + s)$ d'où $s = 2p - e$

Posons $\sigma = L(s)$, on a $\sigma = 2\pi - Id_E$

Si $\vec{v} \in V$; $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}$ alors $V = E_1(\pi)$

Si $\vec{w} \in W$; $\sigma(\vec{w}) = -\vec{w}$ alors $W = E_{-1}(\pi)$

B. ESPACES AFFINES DE DIMENSION FINIE

$(\mathcal{E}, E)$ et $(\mathcal{E}', E')$ désignent des espaces affines de dimension finie, $\dim \mathcal{E} = n$ et $\dim \mathcal{E}' = n'$.

1. Bases affines – coordonnées barycentriques

Soit $S = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ un système ordonné de $n + 1$ points de $\mathcal{E}$.

Définition

d1. On dit que S est une **base affine** de ε si $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{A_0A_i}; 1 \leq i \leq n\}$ est une base de E

EXEMPLE :

$\mathcal{E}$ = espace physique ordinaire, $\dim \mathcal{E} = 3$; 4 points A, B, C et D non coplanaires forment une base affine de $\mathcal{E}$ car $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ est une base de E.

PROPRIETES

P1. Soit $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ une application affine et S une base affine de $\mathcal{E}$; f est un isomorphisme affine ssi $f(S)$ est une base affine de $\mathcal{E}'$.

P2. Coordonnées barycentriques

Soit $S = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base affine de $\mathcal{E}$. Alors tout point M de $\mathcal{E}$ est barycentre de S, c'est-à-dire $\exists = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$ tel que $M = \sum_{i=0}^{n} a_i A_i$

On dit que les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ pris dans cet ordre sont les <u>coordonnées barycentriques</u> de M dans la base S.

2. Repères cartésiens – coordonnées cartésiennes

$(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine de dimension $n \geq 1$

DEFINITION

d1. On appelle repère cartésien de $\mathcal{E}$ un couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où O est un point de $\mathcal{E}$ appelé origine du repère, $\mathcal{B}$ est une base de E.

d2. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$.
d3. On dit que $\mathcal{E}$ est orienté lorsque E est orienté.

PROPRIETES

Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, un repère de $\mathcal{E}$ où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$, un repère de $\mathcal{E}$ où $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_{n'})$, $n' \geq 1$

P1. Représentation matricielle d'une application affine

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ de partie linéaire φ.

Soient $P = [a_{ij}] = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\varphi)$, Q, X, Y les matrices colonnes des coordonnées des points $f(O)$, M, $f(M)$.

L'égalité $f(M) = f(O + \overrightarrow{OM})$ devient $f(M) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM})$ et s'écrit sous forme matricielle :

$Y = PX + Q$ ou $\forall\, i \in \{1, \dots, n'\}$ $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \beta_i$

Inversement les relations ci-dessus déterminent une unique application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

P2. Equation cartésienne d'un hyperplan affine

i) Soit f une forme affine sur $\mathcal{E}$, ici $\dim \mathcal{E}' = 1$, l'égalité $f(M) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM})$ devient avec $a_{1j} = a_j$ et $\beta_1 = \beta$

$$f(M) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \beta$$

L'hyperplan $f^{-1}(0)$ a pour équation : $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \beta = 0$

ii) L'ensemble d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + \beta = 0$ est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $(a_1, \dots a_n) \neq (0, \dots, 0)$, et dans ce cas, sa direction est l'hyperplan vectoriel d'équation.

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

P3. Représentation paramétrique d'une variété affine

La variété affine $\mathcal{V}$ passant par un point A et dont la direction V a pour base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ est notée $\mathcal{V} = A + V$

Tout point M de $\mathcal{V}$ s'écrit.

$M = A + \sum_{i=1}^{p} t_i \vec{v}_i$

Le système des coordonnées de M ci-dessous

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t_1\alpha_{11} + t_2\alpha_{21} + \cdots + t_p\alpha_{p1} \\ \qquad\qquad \dots \\ x_n = a_n + t_1\alpha_{1n} + t_2\alpha_{2n} + \cdots + t_p\alpha_{pn} \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de $\mathcal{V}$.

Exemple

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad \mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), \quad A(2, -1, 1) \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{d'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

- La droite $A + \mathbb{R}\vec{d}$ admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -1 + 9t \\ z = 1 - 7t, \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Le plan $A + \mathbb{R}\vec{d} + \mathbb{R}\vec{d'}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 6t - 2s \\ y = -1 + 9t + 3s \\ z = 1 - 7t + 5s; (s, t) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

3) Droites de $\mathcal{E}$ si $\dim \mathcal{E} = 2$

Le plan affine $(\mathcal{E}, E)$ est muni du repère cartésien$(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les hyperplans de $\mathcal{E}$ sont les droites affines.

Faisceau de droites

Soit A un point de $\mathcal{E}$, l'ensemble des droites de $\mathcal{E}$ passant par A s'appelle le **faisceau de droites de sommet A**.

<u>Remarque</u>

Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites du faisceau de sommet d'équations respectives $f_1(M) = 0$ et $f_2(M) = 0$ alors toute droite de ce faisceau a son équation sous la forme $\lambda_1 f_1(M) + \lambda_2 f_2(M) = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'une droite passant par A.

Equations cartésiennes d'une droite

Voir le livre de mathématiques, classe de 3e des lycées.

4) Droites et plans de $\mathcal{E}$, dim $\mathcal{E} = 3$

$(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ désigne un espace affine de dimension 3, $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les hyperplans de $\mathcal{E}$ sont les plans de $\mathcal{E}$.

Faisceau de plans

Soit une droite de $\mathcal{E}$, l'ensemble des plans de $\mathcal{E}$ contenant la droite $\mathcal{D}$ s'appelle le **faisceau de plans d'axe** $\mathcal{D}$.

Remarque

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de ce faisceau d'équations respectives $f_1(M) = 0$ et $f_2(M) = 0$.

Un plan est dans le faisceau si et seulement si son équation est de la forme

$\lambda_1 f_1(M) + \lambda_2 f_2(M) = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$

Equations cartésiennes d'un plan

i) Une équation cartésienne d'un plan affine $\mathcal{P}$ est de la forme

$ax + by + cz + d = 0 \quad$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$

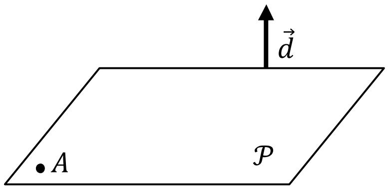
ii) Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dont la direction a pour base $\vec{d} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{d}, \vec{d'}\right) = 0 \qquad \text{soit} \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

iii) Une équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par trois (3) points A, B et C non alignés de $\mathcal{E}$ est : $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$

iv) Une équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par un point A et de vecteur normal $\vec{d}$ est

$\overrightarrow{AM}.\vec{d} = 0$



Système d'équations cartésiennes d'une droite affine

Une droite affine est représentée par un système d'au moins deux équations cartésiennes.

Exemples

$\mathcal{E}$ de dimension 3 est muni du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; dans chacun des cas, le système $S_i, i \in \{1,2\}$, représente la droite $\mathcal{D}_i = A_i + \mathbb{R}d_i$

$$S_i : \begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases} ; \qquad \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$S_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = z + 2 \end{cases} ; \qquad \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 2 :

GEOMETRIE EUCLIDIENNE

A. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

1. Généralités

Définitions

d1. On appelle **espace affine euclidien** un espace affine $(\mathcal{E},\ E)$ dont l'espace vectoriel associé E est un espace vectoriel euclidien.

d2. Soient $(\mathcal{V}_1, V_1)$ et $(\mathcal{V}_2, V_2)$ deux variétés affines de $(\mathcal{E},\ E)$, on dit que $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont orthogonales si V_1 et V_2 sont orthogonaux.

d3. On dit que $\mathcal{E}$ est orienté si E est orienté.

- Désormais, $(\mathcal{E},\ E)$ est un espace affine euclidien de dimension finie, muni du repère cartesien $\mathcal{R} = (O,\ \mathcal{B})$ où $\mathcal{R} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée directe.

E est muni du produit scalaire canonique :

$< \vec{u}, \overrightarrow{u'} > \; = \; \vec{u}.\overrightarrow{u'} = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i$ avec $\vec{u} = \sum_{i=1} x_i \vec{e}_i$; $\overrightarrow{u'} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{e}_i$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$, norme de $\vec{u}$ et pour la distance $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

2. Isométries

Définition

d4. Une isométrie de $\mathcal{E}$ est une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que

$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2\ d\big(f(M), f(N)\big) = d(M, N)$;

"On dit alors que l'isométrie conserve la distance".

Rappel

R1. Une application linéaire φ de E dans E est appelée endomorphisme orthogonal de E si $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in E$

"On dit alors que φ conserve la norme"

R2. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est noté $\mathcal{O}(E)$

R3. $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $< \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) > = < \vec{u}, \vec{v} > \quad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$
"On dit que φ conserve le produit scalaire"

R4. On désigne par $\mathcal{O}^+(E)$ ou par S $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux qui **conserve** l'orientation.

$\mathcal{O}^+(E)$ est constitué de **rotations** vectorielles de E.

R5. On désigne par $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}(E)$ qui **change** l'orientation ; $\mathcal{O}^-(E) = \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{O}^+(E)$.

$\mathcal{O}^-(E)$ est constitué de symétries vectorielles orthogonales par rapport à un hyperplan vectoriel de E.

R6. $\varphi \in \mathcal{O}^+(E)$ ssi $\det(\varphi) = 1$; $\varphi \in \mathcal{O}^-(E)$ ssi $\det(\varphi) = -1$

R7. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ et $P = \text{mat}(\varphi)$; $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ ssi $P^t.P = I_n$ où $n = \dim E$

THEOREMES

t1. Une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une isométrie de $\mathcal{E}$ ssi elle est affine et si $\varphi = \mathcal{L}(f) \in \mathcal{O}(E)$

t2. Une isométrie de $\mathcal{E}$ est une application bijective.

Preuves : Voir page suivante

Remarques

1. φ conserve l'orientation si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, étant la base de référence, $\det(\varphi(\mathcal{B})) = \det(\varphi_{(e_1)}, \dots, \varphi_{(e_n)}) = 1$
2. φ conserve l'orientation ssi $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{mes}(\widehat{\varphi_{(\vec{u})}\, \varphi_{(v)}})$ $\forall (\vec{u},\vec{v}) \in E^2 \setminus \{\vec{0}, \vec{0}\}$

<u>**Preuve de t1**</u>

- Supposons que f est une isométrie et montrons que f est affine.

Pour cela montrons que l'application $\varphi: E \longrightarrow E$ tel que $\varphi(\vec{v}) = f(M + \vec{v}) - f(M)$ conservant la norme, le produit scalaire, est par suite linéaire.

On a $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ (e)

$\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = f(M + \vec{u}) - f(M + \vec{v}) \quad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$

$\|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\| = \|f(M + \vec{u}) - f(M + \vec{v})\| = \|M + \vec{u} - (M + \vec{v})\|$ car f isométrie

d'où $\|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ (1)

(e) et (1), avec $\vec{v} = \vec{0}$ donnent : $\forall\vec{u} \in E \quad \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$ (2)

(2) $\Longrightarrow$ φ conserve la norme

φ conserve le produit scalaire ?

Elevons (1) au carré : $< \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}); \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) > = < \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} >$

Avec (2) élevé au carré ; on a après réduction :

$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \qquad < \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) > = < \vec{u}, \vec{v} > \quad (3)$

Sachant que $\|\vec{W}\|^2 = < \vec{w}, \vec{w} >$, en utilisant (2) et (3), on obtient

$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \ \|\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) - \alpha\varphi(\vec{u}) - \beta\varphi(\vec{v})\|^2 = 0$ d'où φ linéaire, donc f affine, alors (2) dit que $\varphi \in \mathcal{O}(E)$.

- Supposons que f affine et $\varphi = L(f) \in \mathcal{O}(E)$:

$\forall(M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right)$ car f af ine

on a: $\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\| = \left\|\varphi(\overrightarrow{MN})\right\|$ ou $d(f(M), f(N)) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ car $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ d'où $d\big(f(M), f(N)\big) = d(M, N) \Longrightarrow$ f isométrie de $\mathcal{E}$.

<u>Preuve de t2</u>

$\vec{v} \in \ker\varphi \ \Longrightarrow \varphi(v) = \vec{0} \ \Longrightarrow \|\varphi(\vec{v})\| = 0 \ \Longrightarrow \|\vec{v}\| = 0 \ \Longrightarrow \vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \varphi$ injectif, φ injection linéaire de E dans E et dim E finie alors φ bijection d'où f bijection.

DEFINITIONS

d5. On appelle **réflexion** de $\mathcal{E}$ une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine de $\mathcal{E}$.

<u>Remarque</u>

Si dim $\mathcal{E} = 2$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

Si dim $\mathcal{E} = 3$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un plan affine.

d6. On appelle **déplacement** (respectivement **antidéplacement**) une isométrie de $\mathcal{E}$ dont la dont la partie linéaire est un élément de $\mathcal{O}^+(\mathrm{E}) = \mathrm{S}\,\mathcal{O}(\mathrm{E})$ (respectivement $\mathcal{O}^-(\mathrm{E}) = \mathcal{O}(\mathrm{E}) \setminus \mathcal{O}^+(\mathrm{E})$).

Remarque

Les translations, les rotations sont des déplacements ainsi que leurs composées.

Les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan affine sont des antidéplacements.

THEOREMES

t3. L'ensemble $\mathrm{I_s}(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$ est un sous groupe du groupe des bijections affines.

Conséquences : f et g isométries de $\mathcal{E}$ alors gof et f^{-1} isométries de $\mathcal{E}$.

t4. Les déplacements de $\mathcal{E}$ constituent un sous groupe distingué de $\mathrm{I_s}(\mathcal{E})$; il est noté $\mathrm{I_s^+}(\mathcal{E})$.

t5. La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

B. ISOMETRIES DE $\mathcal{E}$

I. Isométries de $\mathcal{E}$, dim $\mathcal{E} = 2$

$(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ désigne un espace affine euclidien de dimension 2, donc un plan affine.

Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$, $\mathrm{Inv(f)}$ désigne l'ensemble des points fixes de f

1. Classification des isométries selon l'ensemble des points fixes

Une isométrie de $\mathcal{E}$ se ramène nécessairement à l'un des cas du tableau ci-dessous :

Nature de f / Inv(f)	**Déplacement**	**Antidéplacement**
$\mathcal{E}$	$id_{\mathcal{E}}$	
Droite $\mathcal{D}$		(1) symétrie $S_{\mathcal{D}}$
Point I	Rotation de centre I et d'angle non nul	
$\emptyset$	Translation (de vecteur non nul)	(2) Composée commutative $S_{\mathcal{D}}oT_{\vec{u}}$ d'une symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$, vecteur directeur de $\mathcal{D}$

(1) $S_{\mathcal{D}}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

(2) $S_{\mathcal{D}}oT_{\vec{u}}$ est appelée symétrie glissée.

2. Composition d'isométries

PROPRIETES

P1. La composée de deux symétries par rapport à des droites parallèles est une translation.

P2. La composée de deux symétries par rapport à des droites sécantes en I est une rotation de centre I.

3. Groupe d'isométrie laissant invariante une partie non vide F de $\mathcal{E}$

Propriétés

P1. L'ensemble Is(F) des isométries de $\mathcal{E}$ laissant F invariante est un sous groupe du groupe Is($\mathcal{E}$) des isométries de $\mathcal{E}$.

P2. Si F est une partie finie de $\mathcal{E}$, l'isobarycentre de F est invariant par tout élément de Is(F).

<u>Preuve</u>

P1. $e = id_{\mathcal{E}} \quad e(F) = F \quad \Longrightarrow Is(F) \neq \emptyset$

$f(F) = F$ et $g(F) = F$ alors $(gof)(F) = g(f(F)) = g(F) = F$

Alors $gof \in Is(F)$

$f(F) = F \quad \Longrightarrow f^{-1}\big(f(F)\big) = f^{-1}(F) \Longrightarrow (f^{-1}of)(F) = f^{-1}(F) \Rightarrow F = f^{-1}(F)$

Alors $f^{-1} \in Is(F)$

P2. $F = \{A_1, \dots, A_n\}$, $I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow \quad f(I) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(A_i)$ car f af ine

$\big(f \in Is(F)\big)$, $f_{|F}$ permutation d'ordre n, que nous notons σ

$f(I) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_j = I$

EXEMPLES

- e_1 - F est un triangle équilatéral. Déterminer Is(F)

Réponse

Soit O le centre du triangle équilatéral ABC.

Les éléments de $Is^{-}(F)$ sont des symétries d'axes passant par O, ce sont :

$s_{(OA)}$; $s_{(OB)}$ et $s_{(OC)}$

Leurs composés sont les éléments de $Is^{+}(F)$, des rotations de centre O :

$id_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{R}(O, \frac{2\pi}{3})$, et $\mathcal{R}(O, \frac{4\pi}{3})$

- e_2 - F ensemble de deux droites parallèles distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

  Réponse

  Les symétries laissant les deux droites invariantes sont : s_Δ et les $s_{\delta i}$ où Δ axe équidistant de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, parallèle aux deux. δi est une droite quelconque perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, leurs composées sont…

II. ISOMETRIES DE $\mathcal{E}$, dim $\mathcal{E} = 3$

Définitions

d1. Mesure de l'angle orienté de deux vecteurs

Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls de E.

1^er cas : les deux vecteurs sont colinéaires c'est-à-dire $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$

- Si $k > 0$ mes $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = 0$
- Si $k < 0$ mes $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \pi$

2^{e} cas : $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ linéairement indépendants

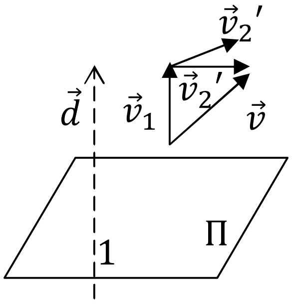
Soit Π un plan vectoriel de E contenant les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2, \vec{d}$, un vecteur orthogonal à Π, donc $\Pi = \vec{d}^{\perp}$

Π est dit orienté par $\vec{d}$ signifie que :

$\mathrm{mes}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) > 0$ si et seulement si $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \alpha\vec{d}$ avec $\alpha > 0$

d2. Rotation vectorielle

On appelle rotation vectorielle de E d'axe $\mathbb{R}\vec{d}$ et d'angle θ dans le plan vectoriel $\Pi = \vec{d}^{\perp}$, orienté par $\vec{d}$, l'endomorphisme φ de E qui à $\vec{v}$ associé $\vec{v'}$ tel que :



- Si $\vec{v} \in \mathbb{R}\vec{d}$ $\quad \varphi(\vec{v}) = \vec{v}$
- Si $\vec{v} \notin \mathbb{R}\vec{d}$: on a $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ où $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}\vec{d}$ et $\vec{v}_2 \perp \vec{d}$ alors $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ où $\vec{v}_2{}'$ est l'image de v_2 par la rotation de Π d'angle θ.

Attention : θ est l'angle $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, deux vecteurs orthogonaux à $\vec{d}$ tels que $\varphi(\vec{v}_2) = \vec{v}_2{}'$.

Remarque : $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \implies \varphi \in \mathcal{O}(E)$

ROTATION VECTORIELLE

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\vec{d}$ un vecteur de E de norme 1, $\mathcal{R}$ la rotation de E d'axe $\mathbb{R}\vec{d}$ et d'angle θ.

Alors pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, on a :

$$\mathcal{R}(\vec{v}) = (\vec{d}.\vec{v})\vec{d} + \cos\theta\left[(\vec{d} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{d}\right] + \sin\theta\left[\vec{d} \wedge \vec{v}\right]$$

<u>Preuve</u>

Le plan vectoriel Π orthogonal à $\vec{d}$ est orienté par la donnée de $\vec{d}$.

Calculons d'abord les projections orthogonales $q(\vec{v})$ et $p(\vec{v})$ de $\vec{v}$ respectivement sur $\mathbb{R}\vec{d}$ et sur Π, d'où $\vec{v} = q(\vec{v}) + p(v)$.

On a $q(\vec{v}) = (\vec{d}.\vec{v})\vec{d}$ d'où $p(\vec{v}) = \vec{v} - q(\vec{v})$ ou

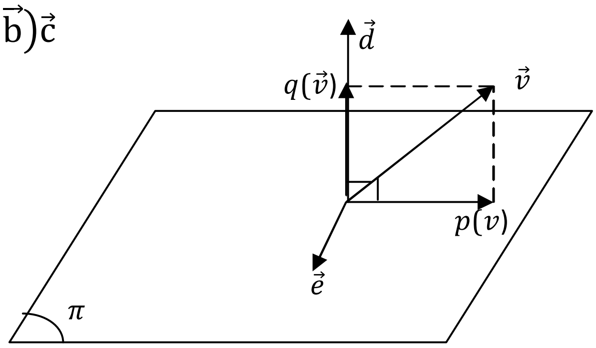
$p(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v}.\vec{d})\vec{d}$

$= (\vec{d}^2).\vec{v} - (\vec{d}.\vec{v})\vec{d}$ car $\vec{d}^2 = \|\vec{d}\|^2 = 1$

$= \vec{d} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{d})$ car $\vec{d}^2 = \|\vec{d}\|^2 = 1$

$= \vec{d} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{d})$ car $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$p(\vec{v}) = (\vec{d} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{d}$ associativité de $\wedge$



Posons

$\vec{e} = \vec{d} \wedge \vec{v}$ et $\vec{e}' = \vec{e} \wedge \vec{d}$

Notons que $\vec{e}' = p(\vec{v})$

Si $\vec{e} \neq \vec{0}$ alors $(\vec{e}, \vec{d}, \vec{e}')$ est une base orthogonale directe de E, donc $(\vec{e}, \vec{e}')$est une base orthogonale directe du plan Π telle que $\|\vec{e}'\| = \|\vec{e}\| = \|p(v)\|$

$\mathcal{R}(q(\vec{v})) = q(\vec{v})$ car $q(\vec{v}) \in IR\vec{d}$ axe de la rotation $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}(p(\vec{v})) = q(\vec{e'}) = \cos\theta.\vec{e}' + \sin\theta.\vec{e}$ d'où le résultat annoncé.

SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UN PLAN

E est un espace vectoriel euclidien muni de la base orthonormée

$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$; tout vecteur $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$ est identifié à $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Définitions et propriétés

d1. Le plan vectoriel Π d'équation $ax + by + cz = 0$ est tel que le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal à Π

Autrement dit, Π est l'orthogonal de $\vec{d}$; on écrit $\Pi = (\vec{d})^{\perp}$

d2. On appelle matrice de Householder une matrice H de la forme $= I_3 - 2uu^t$.

où $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, est un vecteur de E de norme 1 et $u^t = (x \ \ y \ \ z)$

P1. Toute matrice Householder $H = I_3 - 2uu^t$ est symétrique et orthogonale.

Preuve

$H^t = I_3 - 2(uu^t)^t = I_3 - 2(u^t)^t u^t = I_3 - 2uu^t = H$

$H^t.H = H.H = H^2 = I_3 - 4uu^t + 4(uu^t)^2 = I_3 - 4uu^t + 4uu^t uu^t$

$H^t.H = I_3 + 0$ car $u^t u = \|u\|^2 = 1$ par hypothèse

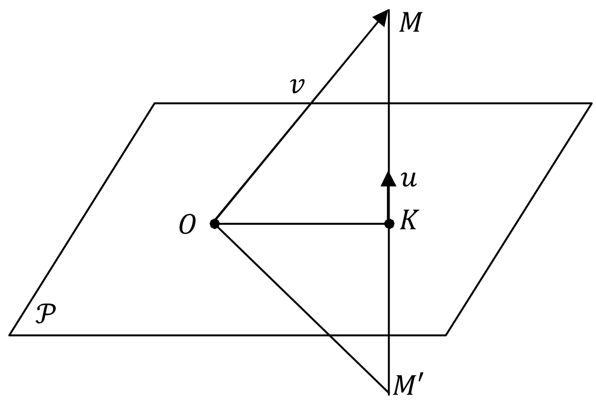
P2.

La matrice de Householder $H = I_3 - 2uu^t$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $(u)^{\perp}$.

Preuve

On identifie la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $\Pi = (\vec{u})^{\perp}$ à la réflexion du plan O + Π, où O est l'origine du repère ; montrons que H est sa matrice.

Soit $v = \overrightarrow{OM}$ et $\mathcal{P} = O + \Pi$, M' symétrique de M par rapport à $\mathcal{P}$



$Hv = (I_3 - 2uu^t)v$

$= v - 2uu^t v$

$= v - 2(u^t v)u$

On a d'une part :

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM'}$

$= \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KM}$

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{KM'}$

D'autre part :

Comme $\|u\| = 1$, $KM = \overrightarrow{OM}.u = u^t v$ alors $\overrightarrow{KM} = (u^t v)u$

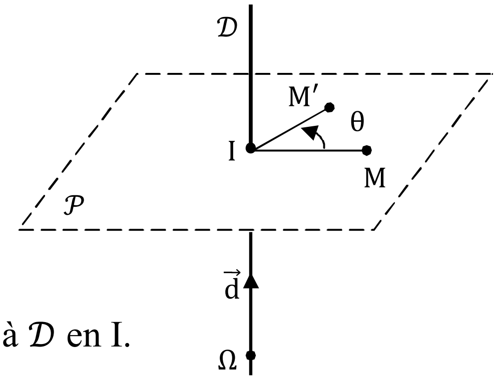
D'où $\overrightarrow{KM} = uu^t v$

Donc : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{KM} = v - 2uu^t v = (I_3 - 2uu^t)v = Hv$

d3. Rotation affine

On appelle rotation affine de $\mathcal{E}$ d'axe $\mathcal{D} = \Omega + \mathbb{R}\vec{d}$ et d'angle θ dans le plan vectoriel $\Pi = (\vec{d})^{\perp}$ orienté par $\vec{d}$ l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui à M associé M' tel que :

- Si $M \in \mathcal{D}$ $f(M) = M$
- Si $M \notin \mathcal{D}$:



Soit le plan affine $\mathcal{P}$ passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en I.
$M' = f(M)$ est pris égal à l'image de M par la rotation affine du plan $\mathcal{P}$ de centre I et d'angle θ.

d4. Vissage

On appelle vissage de $\mathcal{E}$ d'axe $\mathcal{D} = \Omega + \mathbb{R}\vec{d}$, de vecteur $\vec{u} = \lambda\vec{d}$ et d'angle θ dans le plan vectoriel $\Pi = (\vec{d})^{\perp}$ orienté par $\vec{d}$, l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ composé de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ dans le plan vectoriel Π orienté par $\vec{d}$.

Remarques

1. Le vissage est une composée commutative : $f = \mathcal{R} o T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} o \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ
2. Si $\vec{u} \neq 0$ $\operatorname{Inv}(f) = \emptyset$
3. L'axe $\mathcal{D}$ est globalement invariante
4. $L(f) = L(\mathcal{R} o T_{\vec{u}}) = L(\mathcal{R})$

Cas particulier :

Si le vissage f est tel que $\theta = \pi$ et $\vec{u} = \vec{0}$, on dit que f est le demi-tour d'axe $\mathcal{D}$; c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

PROPRIETES

P1. Matrice d'une rotation vectorielle

Soit φ une rotation de E d'axe $\mathbb{R}\vec{d}$ et d'angle θ. Dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que :

$\vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{d}\|}\vec{d}$, $\vec{e}_1$ un vecteur normé et orthogonal à $\vec{e}_3$, et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$,

la matrice de φ est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Preuve

$\varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$ car $\vec{e}_3 \in \text{l'axe } \mathbb{R}\vec{d}$; comme $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ orthogonaux à $\vec{d}$ on a : $\varphi(e_1) = \cos\theta.\vec{e}_1 + \sin\theta.\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = -\sin\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2$ d'où la matrice annoncée.

P2. Soit f une rotation de $\mathcal{E}$ d'angle θ et d'axe $\mathcal{D} = \Omega + \mathbb{R}\vec{d}$, alors $\varphi = L(f)$ est une rotation de E d'angle θ et d'axe $\mathbb{R}\vec{d}$.

CLASSIFICATION DES ISOMETRIES SELON L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES

$\text{Inv}(f)$ désigne l'ensemble des points fixes de l'isométrie f de $\mathcal{E}$.

Nature de f / **Inv(f)**	**Déplacement**	**Antidéplacement**
$\mathcal{E}$	$id_{\mathcal{E}}$	
Plan $\mathcal{P}$		Réflexion du plan $\mathcal{P}$
Droite $\mathcal{D}$	Rotation d'axe $\mathcal{D}$	
Singleton {I}		(2) Composée de rotation et de réflexion (en particulier, symétrie de centre I)
$\emptyset$	(1) $T_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou vissage de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et d'angle $\theta \neq 0$	(3) Composée de translation et de réflexion

- **<u>Additif au tableau</u>**

1) f est la composée commutative d'une rotation $\mathcal{R}$ d'axe $\mathcal{D} = \Omega + \mathbb{R}\vec{d}$ et d'angle θ, et d'une translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ telle que f = $\mathcal{R}oT_{\vec{u}} = T_{\vec{u}}o\mathcal{R}$

Posons $\varphi = L(f)$ et $\rho = L(\mathcal{R})$, on a : $\varphi = \rho$ et $\varphi(\vec{d}) = \vec{d}$.

2) f est la composée commutative d'une rotation $\mathcal{R}$ d'axe $\mathcal{D} = I + \mathbb{R}\vec{d}$ d'angle θ et d'une réflexion s d'un plan $\mathcal{P}$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ perpendiculaire en I telle que f = $\mathcal{R}os = so\mathcal{R}$

Posons $\varphi = L(f)$ et $\rho = L(\mathcal{R})$ et $\sigma = L(s)$, on a :

$\varphi = \rho o\sigma = \sigma o\rho$

$\varphi(\vec{d}) = -\vec{d}$

Cas particulier

Si $\mathcal{R}$ rotation d'angle $\theta = \pi$, alors $\mathcal{R} = s_{\mathcal{D}}$ symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ (ou demi-tour d'axe $\mathcal{D}$), la composée f = $s_{\mathcal{D}}$ o s est, d'après l'exercice 1,4) vu en TD, une symétrie de centre I, point d'intersection des deux variétés affines, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$, supplémentaires.

<u>Remarque</u>

Le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$ ci-haut n'est pas unique, comme on s'en rend rapidement à l'évidence en étudiant comme isométrie, une symétrie centrale

$M(x, y, z) \longmapsto M'(-x + 2a, -y + 2b, -z + 2c)$ de centre $\Omega(a, b, c)$.

3) f est la composée commutative d'une réflexion s d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ avec $\vec{u}$ appartenant à la direction de $\mathcal{P}$ telle que f = $soT_{\vec{u}} = T_{\vec{u}}os$

Posons $\varphi = L(f)$ et $L(s) = \sigma$, on a: $\varphi = \sigma$

<u>Remarques</u>

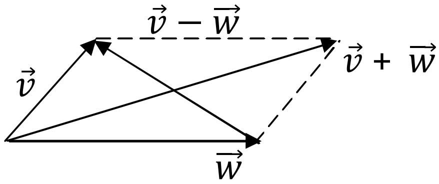
1. Une symétrie de $\mathcal{E}$ de base $(\mathcal{V}, V)$ et de direction W telle que V et W ne sont pas orthogonaux, n'est pas une isométrie en général.

En effet :

Soit σ la partie linéaire de dette symétrie, soit $\vec{u} \in E = V \oplus W$ alors $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in V$ et $\vec{w} \in W$.

$\sigma(\vec{u}) = \sigma(v) + \sigma(w) = \vec{v} - \vec{w}$

Les longueurs des vecteurs $\vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont les diagonales d'un parallélogramme, de mesures différentes, donc $\|\sigma(\vec{u})\| \neq \|\vec{u}\|$ alors $\sigma \notin \mathcal{O}(E) \Longrightarrow s$ n'est pas une isométrie.



2. Une projection de $\mathcal{E}$, ne conserve pas en général la distance donc n'est pas une isométrie de $\mathcal{E}$.

C. COORDONNEES POLAIRES, dim $\mathcal{E} = 2$

$(\mathcal{E}, E)$ désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

d1. Soit M un point de $\mathcal{E}$ différent de l'origine O du repère.

Un couple (r, θ), où θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et r un réel tel que $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ est un système de coordonnées polaires de M relatives à l'axe polaire $(O; \vec{i})$.

Posons $\vec{u}_\theta = \cos\theta . \vec{i} + \sin\theta . \vec{j}$; on a $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_\theta$

d2. Les systèmes de coordonnées polaires de M sont les couples (r', θ') tels que $\overrightarrow{OM} = r'\vec{u}_{\theta'}$.

Remarque

On dit souvent que (r, θ) sont des coordonnées polaires de M au lieu de dire un système de coordonnées polaires.

PROPRIETES

P1. Les systèmes de coordonnées polaires de M sont les couples

$(r, \theta), \quad (r, \theta + 2k\pi), \quad (-r, \theta + (2k + 1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$.

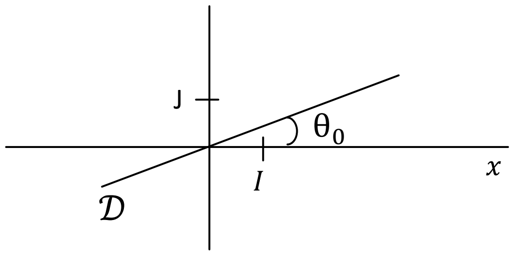
Remarque

Si M = 0, tous les couples $(0, \theta), \theta \in \mathbb{R}$, sont les coordonnées polaires de M.

Équation polaire d'une droite passant par o

La droite $\mathcal{D}$ passant par O et d'angle polaires θ_0 a pour équation polaire

$\theta = \theta_0 \quad [\pi]$.



D. Distance d'un point à une droite, un plan

I. $\dim \mathcal{E} = 2$

Soit $ax + by + c = 0$ une équation de droite $\mathcal{D}$, $(a, b) \neq (0,0)$ pour tout $M(x, y)$ de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = ax + by + c$; soit $\vec{n}$ le vecteur (a, b).

La distance $d(M, \mathcal{D})$ du point M à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

II. $\dim \mathcal{E} = 3$

a. Distance d'un point à une droite

Soit la droite affine $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{d}$; la distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

b. Distance d'un point à un plan

Soit M un point de $\mathcal{E}$ appartenant ou non à un plan $\mathcal{P}$ d'équation

$f(M) = ax + by + cz + d = 0$; la distance de M à $\mathcal{P}$ est :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

CHAPITRE 3 :
COURBES PARAMETREES

A. GENERALITES

$(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ désigne un espace affine de dimension n ; le choix d'un repère $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ permet d'identifier $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et E à $\mathbb{R}^n$, le point $\mathrm{M}(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$ au vecteur $\vec{\mathrm{u}} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$. Très souvent, n sera égal à 2 ou 3.

1. Courbe paramétrée

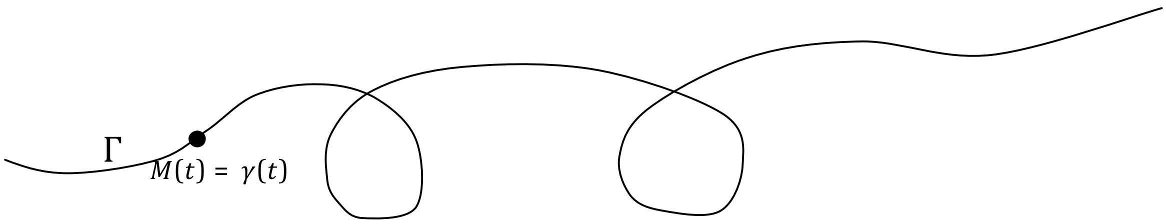
Définitions

d1. On appelle courbe paramétrée de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ un triplet $\boldsymbol{\mathcal{C}} = (\Gamma, \mathrm{D}, \gamma)$ où :

Γ est une partie de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (appelée « courbe », trajectoire,…)

D est une union d'intervalle de $\mathbb{R}$

γ est une application de D dans Γ de classe C^k, $k \geq 1$



On dit que γ est une **paramétrisation** de la classe Γ.

Remarque : $\gamma(\mathrm{t}) = \mathrm{M}(\mathrm{t}) = (\mathrm{M}, \mathrm{t}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}_1(\mathrm{t}), \dots, \mathrm{x}_n(\mathrm{t}))$

On peut se représenter un point M se déplaçant le long d'un chemin Γ ; à l'instant t, sa position et sa vitesse vectorielle sont données respectivement par $\gamma(\mathrm{t})$ et $\gamma'(\mathrm{t})$.

EXEMPLES

(a) -Courbe rectiligne

Soient deux points fixes P et Q de $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^3$; posons $\gamma(\mathrm{t}) = \mathrm{P} + \mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$

La courbe Γ est ici la droite (PQ) ou $\mathrm{P} + \mathbb{R}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

Notons que $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\gamma(1) = \mathrm{Q}$ et si $\mathrm{t} \in [0; 1]$, $\gamma(\mathrm{t}) \in [\mathrm{P}, \mathrm{Q}]$

(b)-Courbe circulaire, elliptique

Paramétrisation d'un cercle de centre origine et de rayon a

$$\gamma(t) = a(\cos t, \sin t) = (a\cos t, a\sin t), t \in [0; 2\pi]$$

Paramétrisation de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

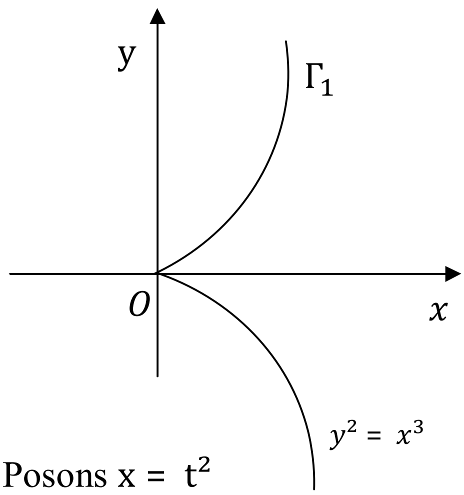
$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

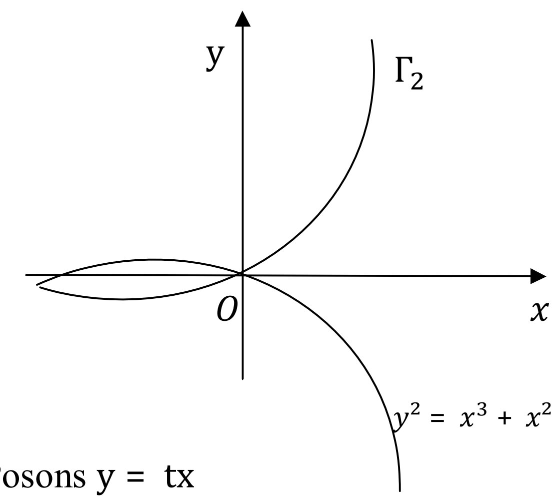
(c) -Cubiques

Ce sont des courbes d'équation $y^2 = x^3 + px + q$; $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ (admettant ox pour axe de symétrie)

Considérons les deux courbes cubiques figurées ci-dessous.

A gauche la cubique à nœud d'équation $y^2 = x^3 + x^2$





Posons $x = t^2$

Alors $y^2 = x^3 = t^6 \Longrightarrow y = t^3$

D'où la paramétrisation de Γ_1

$\gamma(t) = (t^2, t^3)$

Posons $y = tx$

l'équation de Γ_2 devient

$t^2x^2 = x^3 + x^2 \Longrightarrow t^2 = x + 1$

$x = t^2 - 1$

D'où la paramétrisation de Γ_2

$\gamma(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$

(d)-Cubique torsadée

Ainsi appellerons nous la courbe non plane paramétrisée par :

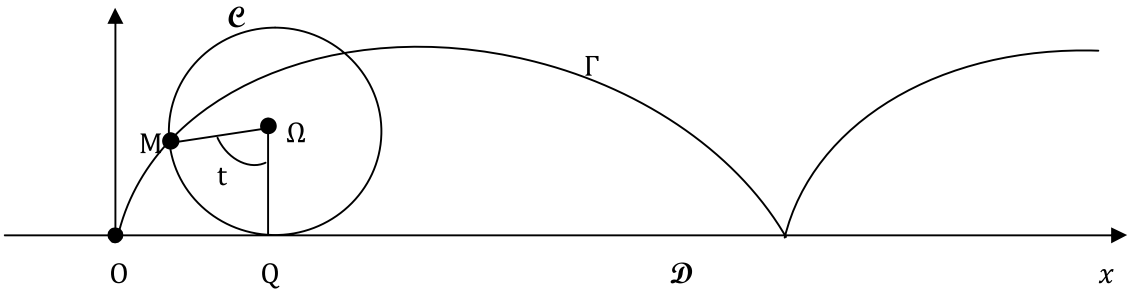
$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$; $t \in \mathbb{R}$

dont les projections sur les plans xOy, xOz et yOz sont respectivement d'équations $y = x^2$, $z = x^3$ et $z^2 = y^3$.

(e) -Cycloïde

C'est la trajectoire d'un point fixe sur un cercle $\mathcal{C}$ qui roule sans glisser sur une droite $\mathcal{D}$.

Cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R > 0 ; soit M le point fixe du cercle $\mathcal{C}$.



Au cours du mouvement de $\mathcal{C}$, il arrive que M soit sur $\mathcal{D}$, soit O l'un des points de $\mathcal{D}$ ainsi obtenus ; choisissons O comme origine et prenons une base orthonormale telle que 0x soit porté par $\mathcal{D}$ et que les points de $\mathcal{C}$ soient d'ordonnées positives, soit Q le point de contact de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. on suppose que $\mathcal{C}$ tourne dans le sens négatif avec la vitesse angulaire 1 et que M soit en O à l'instant t = 0.

A chaque instant t quelconque, on a :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega Q}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) = -t \quad ; \quad \overline{OQ} = Rt$$

Car OQ = longueur de l'arc $\widetilde{QM}$

Quelles sont les coordonnées de M ou de $\overrightarrow{OM}$?

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{Q\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (Rt, 0) + (0, R) + \overrightarrow{\Omega M}$$

On a :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0y}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{0y}, \overrightarrow{\Omega Q}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega Q}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) = -\frac{\pi}{2} - t$$

Donc les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega M}$ sont :

$$R\cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = -R\sin t \quad \text{et} \quad R\sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = -R\cos t$$

Les coordonnées de M sont :

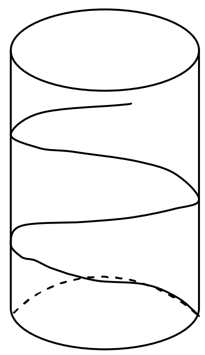
$\overrightarrow{OM} = (x, y) = (Rt, 0) + (0, R) + (-R\sin t, -R\cos t)$

D'où une représentation paramétrique de la cycloïde :

$\gamma(t) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t) \quad t \in \mathbb{R}$

Ou $\gamma(t) = R(t - R\sin t, 1 - R\cos t) \; t \in \mathbb{R}$

(f)- Hélice circulaire



C'est la courbe non plane figurée ci-contre et dont une paramétrisation est

$\gamma(t) = (a\cos t,\; a\sin t,\; bt)$ avec $a > 0$ et $b \neq 0$.

Bref rappel sur les fonctions hyperboliques

Nous noterons ch, sh, th, les fonctions respectives cosinus hyperbole, sinus hyperbole, tangente hyperbole.

Avec $\text{ch}t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $\text{sh}t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\text{th}t = \frac{\text{sh}t}{\text{ch}t}$

On pose $\text{sech}t = \frac{1}{\text{ch}t}$

On a les formules :

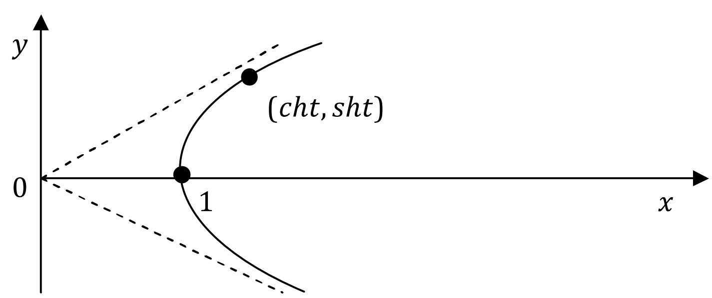
$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ $\qquad$ $\text{th}^2 t + \text{sech}^2 t = 1$

$\text{ch}'(t) = \text{sh}t$ $\qquad$ $\text{sh}'(t) = \text{ch}t$

$\text{th}'(t) = \text{sech}^2 t$ $\qquad$ $\text{sech}'(t) = -\text{th}t\,\text{sech}t$

(f)- La partie de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ figurée ci-dessous est paramétrisée par

$\gamma(t) = (\text{ch}t,\; \text{sh}t)$



(h)- L'hyperbole, entière, d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la paramétrisation

$x = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{1}{t}\right) \qquad y = \frac{1}{2}b\left(t - \frac{1}{t}\right)$

En effet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$ alors on pose $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = t$ et $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}$ d'où le résultat ci-dessous.

d2. Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée.

On dit que $\mathcal{C}$ est simple si γ est injective.

On dit que le point $M = \gamma(t)$ est

régulier si $\gamma'(t) \neq \vec{O}$

stationnaire si $\gamma'(t) = \vec{O}$

simple, double, triple ou de multiplicité n si $\mathrm{card}\{\gamma^{-1}(M)\}$ est respectivement égal à 1, 2, 3 ou n.

d3. Tangente

Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée de classe C^k, $k \geq 1$. On suppose que $\forall t \in D, \ \exists n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq k$ tel que $\gamma^{(n)}(t) \neq \vec{O}$

Alors on note $p = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \gamma^{(n)}(t) \neq \vec{O}\}$

la droite C passant par $M = \gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma^{(p)}(t)$, est appelée tangente en (M, t) à C.

Exemple :

$\gamma(t) = (1 - t^4, \ t^5 - t^2 + 3)$

$\gamma'(t) = (-4t^3, -2t + 5t^4)$

$\gamma'(0) = \vec{0} \Longrightarrow \gamma(0) = (1; 3)$ point stationnaire

$\gamma''(t) = (-12t^2, \ 20t - 2)$

$\gamma''(0) = (0; \ -2) \neq \vec{0}$ alors $p = 2$

B. COURBES PARAMETREES PLANES

Dans tout ce paragraphe, $(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine de dimension 2 muni du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Classification des points

Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée de classe $C^k, k \geq 2$. On suppose dans la suite que pour tout $t \in D, \exists n \in \mathbb{N}, p < n \leq k$, tel que les deux vecteurs

$\gamma^{(p)}(t)$ et $\gamma^{(n)}(t)$ de E sont linéairement indépendants.

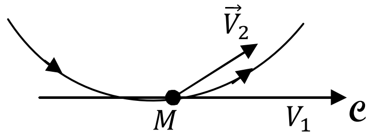
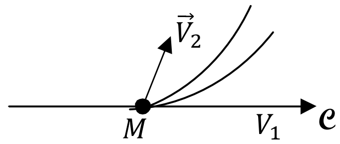
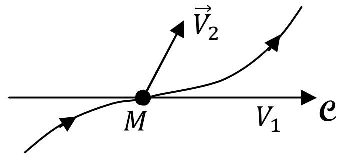
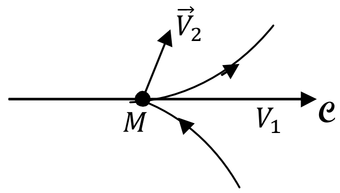
On note q le plus petit des entiers n ayant cette propriété.

Le développement de Taylor – Young de γ en t permet d'écrire :

$$\gamma(t + h) = \gamma(t) + \frac{h^p}{p!}[1 + 0(1)]\gamma^{(p)}(t) + \frac{h^q}{q!}\gamma^{(q)}(t) + O(h^q)$$

Posons $\vec{V}_1 = \frac{1}{p!}\gamma^{(p)}(t)$ et $\vec{V}_2 = \frac{1}{q!}\gamma^{(p)}(t)$

D'où $\gamma(t + h) = \gamma(t) + h^p\overrightarrow{V_1} + h^q\vec{V}_2 + O(h^q)$

	p impair	**p pair**
q pair	 Point ordinaire	 Point de rebroussement de 2e espace
q impair	 Point d'inflexion	 Point de rebroussement de 1e espace

Remarque : La flèche indique le sens de parcours de Γ au voisinage de $M = \gamma(t)$ quand h varie de -1 à 1 dans $\gamma(t+h)$.

Illustration

$\gamma(t) = (1 - t^4, t^5 - t^2 + 3)$

Point stationnaire $\gamma(0) = (1;3), p = 2$ et $q = 4$

Point de rebroussement de 2e espace.

2°) Résultats de substitution à p et q

Lorsque les dérivées de $\gamma(t)$ sont lourdes à calculer et rendent l'obtention de p et q difficiles, voici des résultats sur la tangente et la nature du rebroussement.

Soient $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée avec $\gamma(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$;

On pose: $m(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

PROPRIETES

P1. On suppose qu'il existe un voisinage $V(t_0) \subset D$ de t_0 tel que f' ne s'annule pas sur $V(t_0) \setminus \{t_0\}$.

- Si $\lim_{t \to t_0} m(t) = \ell$, alors le réel ℓ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{C}$ en (M_0, t_0) à $\mathcal{C}$.
- Si $\lim_{t \to t_0} m(t) \in \{-\infty, +\infty\}$, la tangente en (M_0, t_0) à $\mathcal{C}$ est la droite $(M_0; \vec{j})$

P2. On suppose (M_0, t_0) point de rebroussement $(p \text{ pair})$ à tangente non parallèle aux axes.

- Si m présente un entrêmum local en t_0 ; on a un rebroussement de 2e espace.
- Sinon, on a un rebroussement de 1e espace.

P3. On suppose (M_0, t_0) avec p impair et à tangente non parallèle aux axes

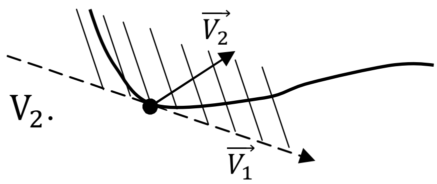
- Si m présente un extrêmum local en t_0 , on un point d'inflexion
- Sinon, on a un point ordinaire.

2°) Concavité

Soient $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée où $\gamma(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath}$ et les entiers p et q définis en tout point $M = \gamma(t)$ suivis de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

Définition

La concavité de C en M_0 est le demi-plan bordé par la tangente $\mathcal{T}$ en M_0 à $\mathcal{C}$ et contenant le point $M_0 + V_2$.



Propriété

Soit (M_0, t_0) un point régulier de $\mathcal{C}$(i. e. $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$

M_0 est un point d'inflexion si et seulement si la fonction

$t \longmapsto f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)$ s'annule en changeant de signe en t_0.

Illustration

$\gamma(t) = (t, t^3)$

$\gamma'^{(t)} = (1, 3t^2),\ \gamma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, tout point est régulier.

$f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) = 6t$ s'annule en 0 en changeant de signe, alors $M_0 = \gamma(0) = 0$ est un point d'inflexion.

4°) Branches infinies

On continue avec les notations des paragraphes précédents.

Définitions

d1. Branche infinie

Soit t_0 une borne finie ou infinie de D.

On dit que $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ présente une branche infinie en t_0 lorsque l'une des deux coordonnées au moins, $f(t)$ ou g(t), a une limite infinie en t_0.

d2. 1er cas : $\lim_{t_0} f \in \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim_{t_0} g = y_0$

La droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à Γ

2e cas : $\lim_{t_0} f = x_0$ et $\lim_{t_0} g \in \{-\infty, +\infty\}$

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à Γ

3e cas : $\lim_{t_0} f \in \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim_{t_0} g \in \{-\infty, +\infty\}$

On étudie alors la direction asymptotique.

d3. Direction asymptotique

Définition

Soit $\vec{d} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $M = \gamma(t) \in \Gamma$; on dit que la branche infinie admet $\mathbb{R}\vec{d}$ pour direction asymptotique si la droite $(OM(t))$ tend vers la droite $O + \mathbb{R}\vec{d}$ quand t tend vers t_0.

Remarque

La pente de la droite (OM(t)) est $\frac{g(t)}{f(t)}$ et OM(t) est inifini.

a) Si $\lim\limits_{t_0} \frac{g}{f} = 0$

$\mathcal{C}$ admet $\mathbb{R}\vec{i}$ pour direction asymptotique en t_0 et présente une branche parabolique de direction $\mathbb{R}\vec{i}$.

b) Si $\lim\limits_{t_0} \frac{g}{f} \in \{-\infty, +\infty\}$

$\mathcal{C}$ admet $\mathbb{R}\vec{j}$ pour direction asymptotique en t_0 et présente une branche parabolique de direction $\mathbb{R}\vec{j}$.

c) Si $\lim\limits_{t_0} \frac{g}{f} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$

$\mathcal{C}$ admet $\mathbb{R}(\vec{i} + \alpha\vec{j})$ pour direction asymptotique en t_0 et dans ce cas, on a deux sous cas :

- Si lim(g - αf) $\in \{-\infty, +\infty\}$, $\mathcal{C}$ présente en t_0 une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = \alpha x$
- Si lim(g- αf) $= \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à Γ en t_0.

Remarques

1. L'étude des positions relatives de Γ et $\mathcal{D}$ en t_0 est donnée par le signe de g(t)-$[\alpha f(t) + \beta]$
2. Si nécessaire on peut recourir aux développements limités pour étudier cette différence.

5°) Construction du support Γ d'une courbe paramétrée $\boldsymbol{\gamma(t) = (f(t), g(t))}$

<u>Plan</u>

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\gamma$ de γ
- Réduire le domaine d'étude si γ périodique ou si Γ présente des éléments de symétrie
- Construire un tableau des variations commun à f et g.
- Etudier les branches infinies
- Etudier les points stationnaires éventuels
- Donner les tangentes à Γ en certains points particuliers (M, t) tels que $\gamma'(t) = \vec{0}$, $f'(t) = 0$ et $g'(t) \neq 0, f'(t) \neq 0$ et $g'(t) = 0$
- Courbe Γ.

C) COURBE PLANE DEFINIE PAR UNE EQUATION POLAIRE, $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{\mathcal{E} = 2}$

$(\mathcal{E}, E)$ désigne le plan affine orienté muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{V}_\theta = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$

1) Courbe paramétrée définie par une équation polaire

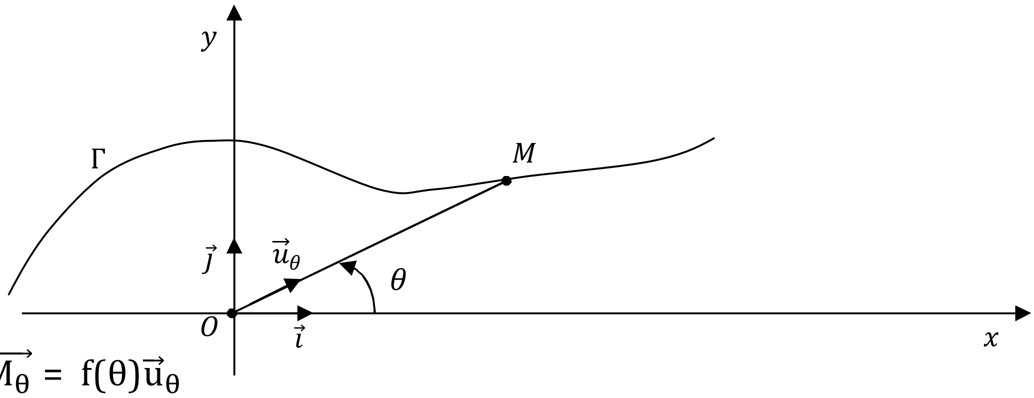
Définition

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$, f une application de classe C^1 de D dans $\mathbb{R}$.

On appelle **courbe d'équation polaire r = $\mathbf{f(\theta)}$** la courbe paramétrée $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ définie par :

$\gamma: D \longmapsto \mathbb{R}^2$

$\theta \longmapsto \gamma(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_\theta} = f(\theta)\vec{u}_\theta$

Remarque

$\gamma(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta \quad \Longrightarrow \gamma'(\theta) = f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta$

Propriété

Le point (M, θ_0) de $\mathcal{C}$ est **régulier** si et seulement si $f(\theta_0) = 0$ et $f'(\theta_0) = 0$

Preuve

$\gamma(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta$ et $\gamma'(\theta) = \vec{0} \Longrightarrow f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta = \vec{0}$ alors

$f(\theta) = 0$ et $f'(\theta) = 0$ car $\{\vec{u}_\theta , \vec{v}_\theta\}$ est un système libre.

Conséquence immédiate

L'origine O du repère est le seul point de $\mathcal{C}$, s'il appartient à $\mathcal{C}$, qui peut être stationnaire.

En effet $f(\theta_0) = 0 \quad \Longrightarrow M_0 = 0$

2) Construction du support

a) Réduction de l'ensemble d'étude de la fonction f

a.1

Si $T > 0$ est une **période** de f, i.e. $\forall\theta \in D, \ \theta + T \in D$ et $f(\theta + T) = f(\theta)$

- Si $T = n.2\pi, n \in \mathbb{N}^*$, alors on obtient toute la courbe Γ en se limitant à $[a,\ a + T[\cap D$, avec a réel quelconque.
- Sinon, on trace la partie de Γ correspondant à $[a,\ a + T[\cap D$; on applique alors à cette partie la rotation de centre O et d'angle T, composée plusieurs fois jusqu'à retrouver une partie déjà faite.

a.2

Si $T > 0$ est **antipériode** de f, $\text{i.e.} \forall\theta \in D, \theta + T \in D$ et $f(\theta + T) = -f(\theta$

- Si $T = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{N}$, on obtient toute la courbe en se limitant à $[a, a + T[\cap D$, avec a réel quelconque.
- Sinon, on trace Γ_0 la partie de la courbe correspondant à $[a,\ a + T[\cap D$, et on applique à Γ_0 la rotation de centre O et d'angle $T + \pi$ composée plusieurs fois jusqu'à retomber sur Γ_0

Exemple

$f(\theta) = \sin(\omega\theta), \omega > 0; D = \mathbb{R}$, $\frac{2\pi}{2\omega}$ est la période, $\frac{\pi}{\omega}$ est l'antipériode qui sera retenu car donne lieu à un intervalle d'étude plus petit.

a.3

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\theta \in D, \alpha - \theta \in D$ et $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$ alors la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha}{2}$ est un **axe de symétrie**.

Exemple

$f(\theta) = \sin(\omega\theta), \omega > 0$, la droite $\theta = \frac{\pi}{2\omega}$ est un axe de symétrie de Γ

a.4

S'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\theta \in D, \beta - \theta \in D$ et $f(\beta - \theta) = -f(\theta)$, alors la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\beta + \pi}{2}$ est un **axe de symétrie**.

Exemple

$f(\theta) = \cos(\omega\theta), \omega > 0$; ici $\beta = \frac{\pi}{\omega}$, la droite $\theta = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{\omega} + \pi)$ est un axe de symétrie.

Cas particuliers

f fonction paire, $\alpha = 0$, alors Ox axe de symétrie

f fonction impaire, $\beta = 0$, alors Oy axe de symétrie

b) Etude des variations de f

Faire un tableau des variations de f

c) Tangente en un point M de la courbe Γ

- Si $O = (M, \theta)$, la tangente à l'origine O est dirigée par $\vec{u}_\theta$
- Si $O \neq (M, \theta)$, la tangente en M est dirigée par $f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta$

d) Nature du point stationnaire $\mathbf{O = (M, \theta)}$

On suppose qu'on a: $f(\theta) = 0$ et $f'(\theta) = 0$

Soit $p = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(\theta) \neq 0\}$

- Si p pair, O est un point de rebroussement de 1^{e} espèce
- Si p impair, O est un point ordinaire.

Remarque

L'étude du signe de f suffit pour préciser la nature de O.

e) Points doubles

Ce sont les points (M, θ) tels que

$f(\theta) = f(\theta + k2\pi)$ ou $f(\theta) = -f[\theta + (2k + 1)\pi]; (k \in \mathbb{Z})$

Remarque

On peut tracer la courbe sans faire cette recherche.

f) Branches infinies

f1. θ au voisinage d'une borne finie θ_0 de D et $\lim_{\theta_0} f \in \{-\infty, +\infty\}$

- Si $\lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = a,\ a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $Y = a$ dans le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \overrightarrow{u_{\theta_0}}, \overrightarrow{v_{\theta_0}})$ est **asymptote** à Γ
- Si $\lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) \in \{-\infty, +\infty\}$, Γ présente une **branche parabolique** de direction celle de la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.

f2. θ au voisinage de l'infini et $\lim_{|\theta| \to +\infty} |f| = +\infty$

On dit qu'on a une branche infinie **en spirale.**

f3. θ au voisinage de l'infini et $\lim_{|\theta| \to +\infty} f(\theta) = a, (a \in \mathbb{R})$

On dit que le cercle de centre O et de rayon $|a|$, (éventuellement a = 0), est **cercle asymptote** à la courbe Γ.

CHAPITRE 4 :

CONIQUES, QUADRIQUES

I. CONIQUES

$(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ désigne un espace affine euclidien de dimension 2 muni du repère orthonormé direct $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'où l'identification de $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^2$.

A. Définition

d1. Conique

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$

F un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$

e un réel strictement supérieur à 0

On appelle **conique de foyer F, de direction $\mathcal{D}$ et d'excentrité e**, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathcal{E}$ tels que

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F})}{\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{D})} = \mathrm{e} \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Si $0 < e < 1$ $\quad \mathcal{C}$ est appelé **ellipse** (figure 1)

Si $e = 1$ $\quad \mathcal{C}$ est appelé **parabole** (figure 2)

Si $e > 1$ $\quad \mathcal{C}$ est appelé **hyperbole** (figure 3)

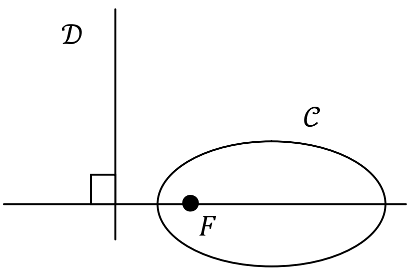


Figure 1

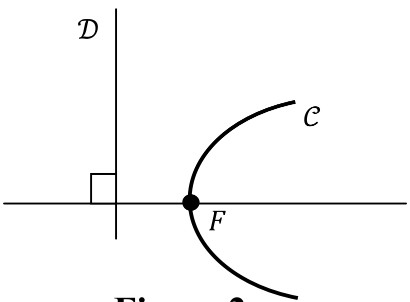


Figure 2

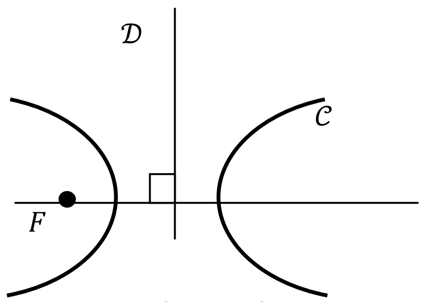


Figure 3

d2. Représentation cartésienne d'une conique $\mathcal{C}$.

En passant aux coordonnées, avec $M(x, y)$, l'égalité (E_0) devient

(E) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + h = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$

On dit que (E) est l'équation de la conique $\mathcal{C}$.

d3. Courbes du second degré

- L'expression

$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + k$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

est appelée polynôme de degré 2.

- Si une courbe C du plan $\mathcal{E}$ admet dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ une équation de la forme (E) $f(x, y) = 0$, il en est de même dans tout autre repère.

On note :

- $ax^2 + 2bxy + cy^2 = q(\overrightarrow{OM})$où $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$, q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, appelée **partie quadratique** de l'équation.
- $dx + ey = \ell(\overrightarrow{OM})$
  ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, appelée **partie linéaire** de l'équation
- k est le **terme constant** de l'équation, c'est-à-dire indépendant de x et y.

Ecriture matricielle de l'équation

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

On a alors $q(\overrightarrow{OM}) = {}^tXAX$; $\ell(\overrightarrow{OM}) = {}^tLX$ et l'équation $f(x, y) = 0$ s'écrit sous forme matricielle ${}^tXAX + {}^tLX + k = 0$; (E_M)

B. Réduction de l'équation d'une conique

Réduire l'équation d'une conique consiste grâce à un ou plusieurs changements de repère, à l'écrire soit sans partie linéaire, soit sans terme rectangle βXY.

1. Première réduction : équation au centre

Soit dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}$ la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$ où $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0$ (E)

a- Effet du changement d'origine

Soit le point $\Omega(x_0, y_0)$ de $\mathcal{E}$, on a dans $\mathcal{R}$,

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (x_0 + x')\vec{i} + (y_0 + y')\vec{j}$

(E) devient $f(x_0 + x', y_0 + y') = 0$ c'est-à-dire

$$f(x_0 + x', y_0 + y') = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2(ax_0 + by_0 + d)x' +$$

$$+ 2(bx_0 + cy_0 + e)y' + ax_0{}^2 + 2bx_0y_0 + cy_0{}^2 + dx_0 + ey_0 + k$$

D'où sous une forme plus facile à mémoriser

$f(x_0 + x', y_0 + y') = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + x' \frac{df}{dx}(x_0, y_0) + y' \frac{df}{dx}(x_0, y_0) +$
$+ f(x_0, y_0)$

Conclusion

La partie quadratique est invariante par changement d'origine.

b- Détermination d'un centre de symétrie

$\Omega(x_0, y_0)$ centre de symétrie de $\mathcal{C}$, alors $M(x', y')$et $M(-x', -y') \in \mathcal{C}$ d'où $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, f(x_0 + x', y_0 + y') = f(x_0 - x', y_0 - y')$

Conséquence

$\Omega(x_0, y_0)$ centre de symétrie de $\mathcal{C}$ si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Théorèmes

t1. Si $\text{dét}(A) \neq 0, \mathcal{C}$ admet un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ et un seul.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ a pour équation :

$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f(x_0, y_0) = 0$ (E_1)

t2. Si $\text{dét}(A) = 0$, $\mathcal{C}$ peut ne pas avoir de centre de symétrie, ou en avoir une infinité.

Définition

d1. Lorsque le centre existe, l'équation (E_1) est appelée **équation au centre** de $\mathcal{C}$.

2. **Deuxième réduction : réduction de la partie quadratique**

La matrice A = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associé à la forme quadratique q est symétrique réelle, le cours d'algèbre dit qu'il existe une matrice de rotation P telle que

${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D$ avec λ et μ dans $\text{Sp}(A)$.

P matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$ de E, P composée de vecteurs propres normés de A et orthogonaux.

Les formules de changement de repère de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ s'écrivent :

$X = PX_1$ ou $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ avec $det(P) = 1$

(E_M) : ${}^tXAX + {}^tLX + k = 0$ devient :

${}^t(PX_1)A(PX_1) + {}^tL(PX_1) + k = 0$ d'où ${}^tX_1D\,X_1 + {}^tLPX_1 + k = 0$ donnant l'équation ci-dessous de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$:

(E_2) : $\lambda x_1{}^2 + \mu y_1{}^2 + d_1x_1 + e_1y_1 + k = 0$

Où ${}^tLP = (d_1, e_1)$

Remarques

1. La 2^e réduction « efface » le terme rectangle de q dans $f(x, y)$

2. Le terme constant k est invariant par la 2e réduction
3. La 1ère réduction où l'origine change efface la forme linéaire $\ell(x, y)$ dans $f(x, y)$ et remplace k par $f(x_0, y_0)$ avec $\Omega(x_0, y_0)$ comme nouvelle origine (du nouveau repère).
4. Si $\det(A) > 0$

   λ et μ non nuls et de même signe, $\mathcal{C}$ est dit du **type ellipse**

   Si $\det(A) < 0$

   λ et μ non nuls et de signe contraire, $\mathcal{C}$ est dit du **type hyperbole**

   Si $\det(A) = 0$

   $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, $\mathcal{C}$ est dit du **type parabole**

   5- dans le repère $(\Omega, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$, l'équation de $\mathcal{C}$ est :

   $\lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + f(x_o, y_o) = 0$

3. **Pratique de la réduction**

a) **Classification des coniques**

Suite à la réduction de l'équation d'une conique, à l'aide de quelques changements de repère légers, il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit sous l'une des trois formes suivantes, appelées équations réduites canoniques :

1er cas : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$; $\mathcal{C}$ est une ellipse

2e cas : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$; $\mathcal{C}$ est une hyperbole

3e cas : $X^2 - 2pY = 0$; $\mathcal{C}$ est une parabole

Les coefficients a, b et p sont des réels supérieurs à 0.

Les autres cas auxquels peut déboucher l'équation (E) de $\mathcal{C}$ sont :

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$, $(\mathcal{C} = \{\Omega\})$; $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$ $(\mathcal{C} = \phi)$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0, \ (\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2); \quad \frac{X^2}{a^2} - 1 = 0 \ \ (\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}')$$

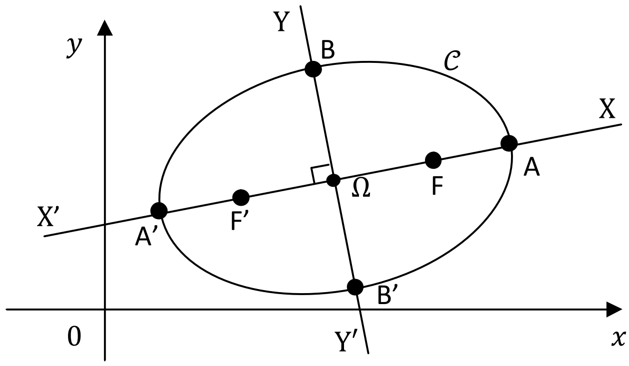
$$\frac{X^2}{a^2} + 1 = 0, \ (\mathcal{C} = \phi); \quad \frac{X^2}{a^2} = 0 \ \ (\mathcal{C} = \mathcal{D})$$

Les lettres $\mathcal{D}, \ \mathcal{D}', \mathcal{D}_i$ désignent des droites, ces derniers cas sont de faible intérêt et dits **dégénérés**.

b) **Représentation géométrique**

Appelons $\mathcal{R}_f = (\Omega, \ X'X, \ Y'Y)$ le repère final dans lequel l'équation réduite canonique est obtenue.

1er cas : $\boldsymbol{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1}$



Ω est le centre de l'ellipse $\mathcal{C}$, A, A', B, B', intersections de $\mathcal{C}$ avec les axes de $\mathcal{R}_f$, sont les **sommets** de $\mathcal{C}$.

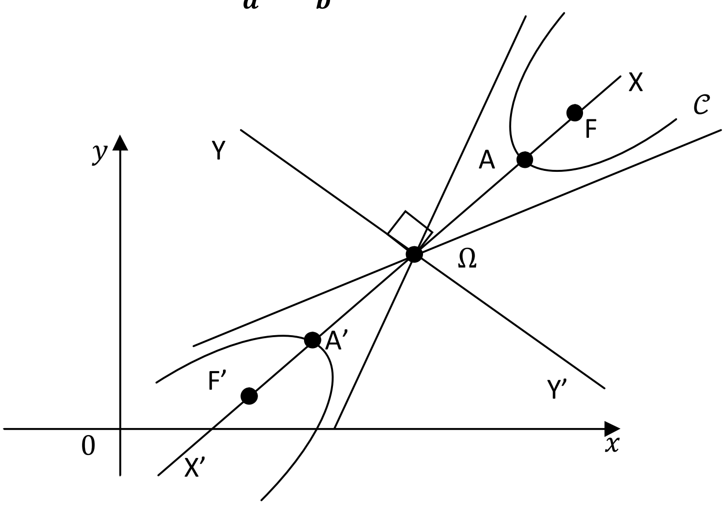
Les axes de $\mathcal{R}_f$ sont les axes se symétrie de $\mathcal{C}$

$\Omega A = \Omega A' = a, \quad \Omega B = \Omega B' = b, \quad$ avec $a > b > 0$

F et F' sont les deux foyers de $\mathcal{C}$ positionnés sur l'axe X'X, ainsi appelé **axe focal.**

Les tangentes à $\mathcal{C}$ en A, A', B, B' sont perpendiculaires aux axes de symétrie.

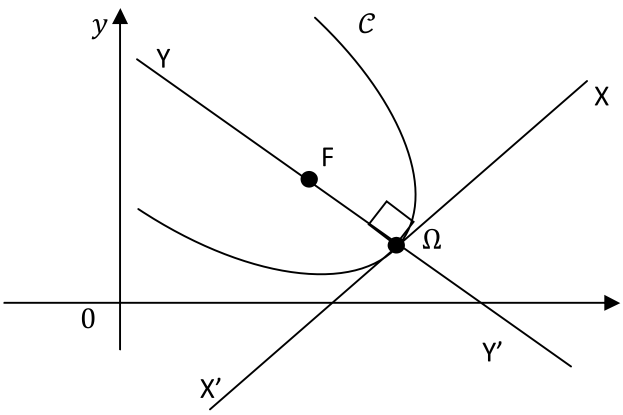
2e cas : $\boldsymbol{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1}$



Ω est le centre de symétrie de $\mathcal{C}$, les droites X'X et Y'Y sont les 2 axes de symétrie de $\mathcal{C}$. L'axe X'X porte les deux foyers F et F' et coupe $\mathcal{C}$ en A et A', on l'appelle axe transverse

Les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et A' sont perpendiculaires aux axes de $\mathcal{R}_f$; $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes d'équations $\frac{X}{a} \pm \frac{Y}{b} = 0$

3^{e} cas : $\mathbf{X^2 - 2pY = 0}$



Ω est le sommet de la parabole $\mathcal{C}$.

l'axe $Y'Y$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$, portant le foyer F tel que $F(0, \frac{1}{2}p)$

La courbe est tangente en Ω à l'axe XX'.

C. Foyers et directrices

Dans le cas des coniques à centre, ellipse et hyperbole, il existe deux foyers, deux directrices, symétriques par rapport au centre.

1er cas : Ellipse

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$, on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Excentricité $e = \frac{c}{a}$, foyer F tel que $\Omega F = c$

La directrice $\mathcal{D}$ d'équation $X = \frac{a}{c}$

2^{e} cas : Hyperbole

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Excentricité $e = \frac{c}{a}$, $\Omega F = c$, $\mathcal{D}$ d'équation $X = \frac{a^2}{c}$

3^e cas : Parabole

$X^2 - 2pY = 0$, excentricité e, foyer F et de direction $\mathcal{D}$ telle que :

$e = 1, \ F\left(0, \frac{1}{2}p\right), \ \mathcal{D}$ d'équation $Y = -\frac{1}{2}p$

II. QUADRIQUES

$(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3 muni du repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k})$ est une base orthonormale directe de E, $\mathcal{E}$ est donc identifié à $\mathbb{R}^3$, tout comme E.

A. Définitions

d1. L'expression

$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1xy + 2b_2yz + 2b_3zx + c_1x + c_2y + c_3z + k$

où les a_i, b_i, c_i et k sont des constantes réelles, est appelée polynôme du second degré.

Avec $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on a:

$q(\vec{v}) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1xy + 2b_2yz + 2b_3zx$, q est une forme quadratique

$\ell(\vec{v}) = c_1x + c_2y + c_3z$, ℓ est une forme linéaire.

k est une constante.

d2. L'ensemble $\mathscr{S}$ des points $M(x, \ y, \ z)$ de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation

$f(x, y, z) = 0$ est appelée surface du second degré ou **quadrique**.

d3. Ecriture matricielle de l'équation $f(x, y, z) = 0$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ b_3 & b_2 & a_3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, alors on a :

$q(\vec{v}) = {}^tXAX$, $\ell(\vec{v}) = {}^tLX$ et l'équation de $\mathscr{S}$ s'écrit :

$$ {}^tXAX + {}^tLX + k = 0 $$

B. REDUCTION DE L'ÉQUATION D'UNE QUADRIQUE

On reprend mot à mot, en ajoutant une 3e coordonnée z, le paragraphe B de I, ce texte reprend aussi les notations du A.

1. Equation au centre

Le point Ω de $\mathcal{E}$ est appelé centre de symétrie de la quadrique $\mathscr{S}$ d'équation $f(x,\ y,\ z)\ =\ 0$ si $f\left(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \implies f\left(\Omega - \overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \quad \forall\, M \in \mathscr{S}$

- Détermination du centre

Les coordonnées $(x,\ y,\ z)$ d'un centre de $\mathscr{S}$ vérifient le système

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

- Equation au centre de la surface $\mathscr{S}$

Dans le repère $\mathcal{R}_1\ =\ (\Omega,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, l'équation de la quadrique $\mathscr{S}$ est :

$$q\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + f(\overrightarrow{O\Omega})) = 0$$

- Discussion des solutions du système de détermination du centre.

Si $\mathrm{rg}(A) = 3$ $\mathscr{S}$ a un centre unique

Si $\mathrm{rg}(A) = 2$ l'ensemble des centres est l'ensemble vide ou une droite affine.

Si $\mathrm{rg}(A) = 1$ l'ensemble des centres est l'ensemble vide ou un plan affine.

2. Réduction de la partie quadratique

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ composée de vecteur propres de A telle que la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ est une matrice de rotation.

Dans le repère $(O,\ \mathcal{B}_1)$ où $\mathcal{B}_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, la quadrique $\mathscr{S}$ a pour équation :

$$\lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {y_1}^2 + \lambda_3 {z_1}^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + k = 0$$

où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}$, $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ sont les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

Remarque pratique

Dans le repère $(\Omega, \mathcal{B}_1)$ l'équation de la quadrique $\mathscr{S}$ est :

$\lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {y_1}^2 + \lambda_3 {z_1}^2 + f(\overrightarrow{O\Omega}) = 0$

Après un ou deux légers changements de repère, l'équation de $\mathscr{S}$ prend l'une des formes présentées ci-dessous, appelées équations réduites canoniques.

C. Classification

Les neuf quadriques intéressantes avec leurs équations sont :

Ellipsoïde	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$
Hyperboloïde à une nappe	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$
Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0$
Cône du second degré	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$
Paraboloïde elliptique	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z}{c} = 0$
Paraboloïde hyperbolique	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z}{c} = 0$
Cylindre elliptique	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$
Cylindre hyperbolique	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$
Cylindre parabolique	$X^2 - 2pY = 0$

Tous les coefficients a, b, c et p restent des réels strictement positifs.

Dans les autres cas ci-dessous auxquels peut dériver l'équation de la quadrique $\mathscr{S}$, on dit que $\mathscr{S}$ est **dégénérée** :

$X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$ $\mathscr{S} = \phi$

$X^2 + Y^2 + 1 = 0$ $\mathscr{S} = \phi$

$X^2 + 1 = 0$ $\mathscr{S} = \phi$

$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ $\mathscr{S} = \{\Omega\}$

$X^2 + Y^2 = 0$ $\mathscr{S}$ est la droite $\Omega + \mathbb{R}\vec{v}_3$

$X^2 = 0$ $\mathscr{S}$ est le plan $\{(0, s, t); (s, t) \in \mathbb{R}\}$

$X^2 - Y^2 = 0$ $\mathscr{S}$ est l'union des deux plans d'équations X – Y = 0 , X + Y= 0

$X^2 - 1 = 0$ $\mathscr{S}$ est l'union des deux plans d'équations X = 1 , X = -1

Quadriques à centre unique

(Cas où rg(A) = 3)

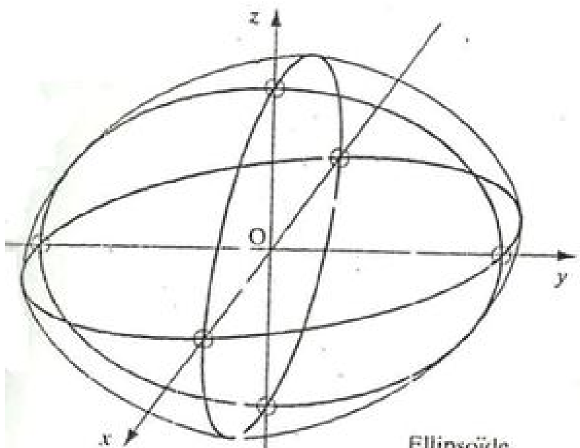
Ellipsoïde, hyperboloïde à une ou deux nappes.

Quadriques dont les centres forment une droite : cylindres elliptiques et hyperboliques.

Illustration géométrique

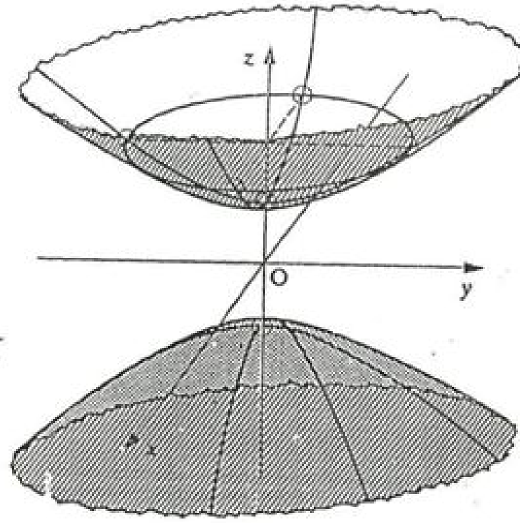
Voir les figures présentées dans les pages suivantes.

Les 3 derniers quadriques du tableau de classification sont obtenues par empilement vertical de courbes isométriques à celles dont les équations sont données dans le plan xoy.



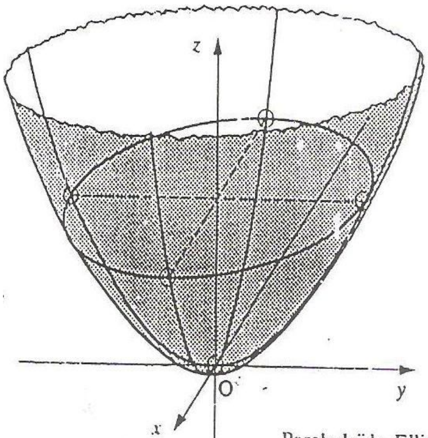
Ellipsoïde

Fig. 1



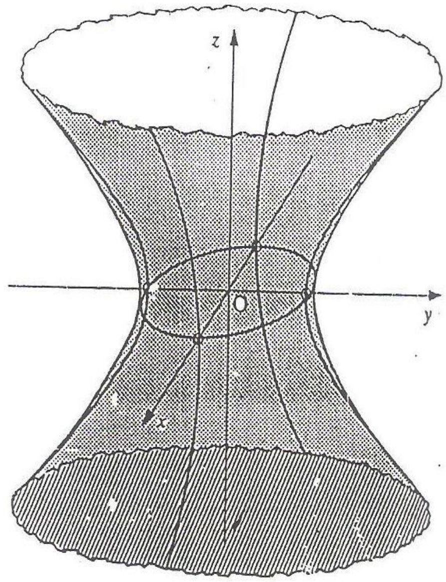
Hyperboloïde à 2 nappes

Fig. 2



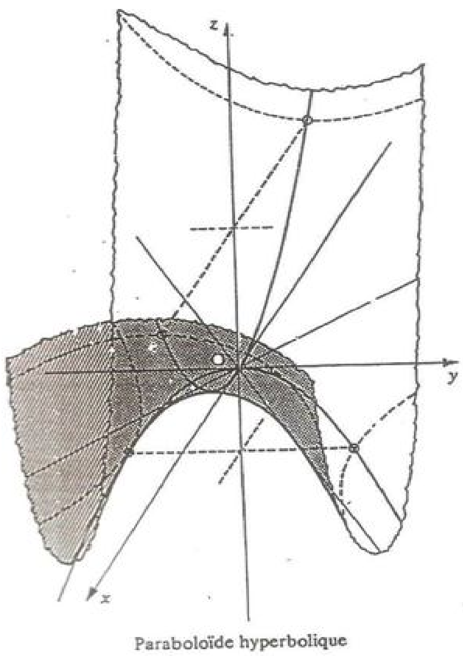
Paraboloïde Elliptique

Fig. 3



Hyperboloïde à 1 nappe

Fig. 4.



Paraboloïde hyperbolique

Fig. 5

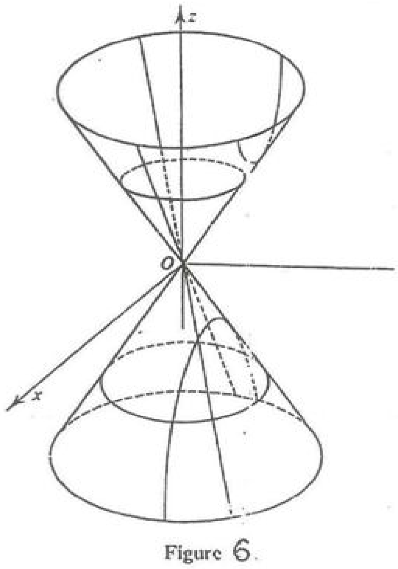


Figure 6.

Cône du second degré