

CHAPITRE 1 : RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

A. ESPACES VECTORIELS

1. Les espaces vectoriels de base

L'exemple fondamental d'espace vectoriel réel est l'ensemble des vecteurs de l'espace physique ordinaire, de dimension 3, la base canonique de E est

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tout vecteur s'écrit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ou plus simplement $\vec{v} = (x, y, z)$.

D'où E est identifié à \mathbb{R}^3 , l'ensemble des triplets réels.

Les autres espaces vectoriels usuels sont \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} , voire $\{\vec{0}\}$

Combinaison linéaire

Soient n vecteurs quelconques $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et n réels quelconques a_1, \dots, a_n

L'expression $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$

est appelée combinaison linéaire des n vecteurs \vec{v}_i , et les n réels a_i sont les coefficients.

2. L'espace vectoriel normé $E = \mathbb{R}^3$

Soient $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{u}' = (x', y', z')$ dans E, α et α' des réels.

a) Produit scalaire

Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{u}' est noté $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ ou $\langle \vec{u}, \vec{u}' \rangle$ et défini ici par :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$$

On a :

$$\langle \vec{u}, \alpha v + \alpha' v' \rangle = \alpha \langle \vec{u}, v \rangle + \alpha' \langle \vec{u}, v' \rangle$$

$$\langle \alpha \vec{u}, \alpha' \vec{u}' \rangle = \alpha \alpha' \langle \vec{u}, \vec{u}' \rangle$$

b) Norme d'un vecteur \vec{u}

Elle est noté $\|\vec{u}\|$ et définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

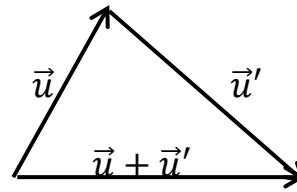
Propriétés

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\| \quad \alpha \text{ réel}$$

$$\|\vec{u} + \vec{u}'\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u}'\| \quad (\text{inégalité du triangle})$$

$$\text{On a : } \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$



c) Orthogonalité

• Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont dits orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{u}'$

• Orthogonal d'un vecteur \vec{d} noté $(\vec{d})^\perp$

$$\text{Par définition } (\vec{d})^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 ; \vec{v} \cdot \vec{d} = 0 \}$$

d) Base orthogonale

Un vecteur \vec{u} est dit normé si $\|\vec{u}\| = 1$

Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est dite orthonormale si $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$ et

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$$

Propriété

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

3. Déterminants, orientation, produit mixte, produit vectoriel

a) Déterminant de 3 vecteurs de \mathbb{R}^3

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; soient les 3 vecteurs : $\vec{u}_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})$, $\vec{u}_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32})$, $\vec{u}_3 = (x_{13}, x_{23}, x_{33})$.

On appelle déterminant des 3 vecteurs \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3 , pris dans cet ordre, dans la base \mathcal{B} et on note :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

le nombre exprimé sous l'une quelconque des deux formes :

$$\sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} x_{ij} M_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} x_{ij} M_{ij}$$

i et j entiers dans $\{1, 2, 3\}$, M_{ij} appelé mineur de x_{ij} est le déterminant d'ordre 2 obtenu par suppression de la ligne i et de la colonne j .

À gauche, on dit que le déterminant est développé suivant la ligne i .

À droite, on dit que le déterminant est développé suivant la colonne j .

Exemples :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -5 & 7 \\ -9 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Développons Δ suivant la 1^{ère} colonne

$$\Delta = 16(19) + 9(-3) + 4(-71) = -7$$

Développons Δ suivant la 3^{ème} ligne

$$\Delta = 4(-71) + 1(111) + 2(83) = -7$$

Déterminant d'une matrice carrée

Le tableau ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

est appelé matrice carrée d'ordre 3 et notée $A = (x_{ij})$ et on admet que A a pour déterminant $\Delta = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Propriétés du déterminant : $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ en abrégé "det"

P1- Le det est nul si deux colonnes sont identiques ou colinéaires

P2- Le det change de signe si on permute deux colonnes

P3- Le det est linéaire par rapport à chaque colonne

P4- Le det ne change pas si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Remarque 1 : les 04 propriétés restent vraies si on remplace le mot colonne par le mot ligne.

Résultat

$\det_{\mathcal{B}} (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0$ si et seulement si les 3 vecteurs sont linéairement dépendants

Remarque 2 : Si tA désigne la transposée de la matrice carrée A , alors $\det ({}^tA) = \det (A)$.

b) Orientation de $E = \mathbb{R}^3$

Soit $b(E)$ l'ensemble des bases de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ de dimension 3, soient la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base canonique de E et \mathcal{B}' une autre base de E avec

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On dit que les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont équivalentes si on a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) > 0$

Les bases de $b(E)$ se répartissent en deux familles

$$b^+(E) = \{ \mathcal{B}' \in b(E) ; \det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) > 0 \}$$

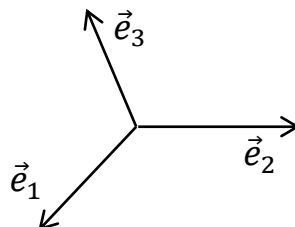
$$b^-(E) = \{ \mathcal{B}' \in b(E) ; \det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) < 0 \}$$

Ces deux familles sont appelées orientations de E .

L'espace vectoriel E est dit orienté si on a choisi l'une des deux familles comme ensemble des bases dites de sens positif ou bases directes, les autres bases sont dites de sens négatif ou bases indirectes.

Généralement, on choisit comme bases de sens direct les bases de la famille $b^+(E)$ contenant la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les Physiciens choisissent la famille des bases définies par "l'observateur d'Ampère"



Remarque :

Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ change de sens chaque fois que :

- soit un des trois vecteurs est multiplié par -1
- soit deux vecteurs permutent

c) Produit mixte dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien et orienté

On suppose que $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté et que $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe orthonormale de E , alors le nombre $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ ne change pas de valeur si \mathcal{B} est remplacé par une autre base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormale de sens positif :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \det_{\mathcal{B}'}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

D'où la finition suivante :

Définition

Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ s'appelle le produit mixte des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ pris dans cet ordre ; on le note souvent $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$.

Remarque : le produit mixte a les mêmes propriétés que le déterminant.

d) Produit vectoriel dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien et orienté

E est orienté et muni de la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Etant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{u}' fixés de E , et \vec{v} un vecteur variable de E , il existe un seul vecteur \vec{x} de E tel que :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}] = \vec{x} \cdot \vec{v}$$

Le vecteur \vec{x} dépend de \vec{u} et \vec{u}' , on le note $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ et on l'appelle le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{u}' pris dans cet ordre.

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \vec{v}$$

Propriétés du produit vectoriel

P1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} colinéaires

$$\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \forall v \in E$$

P2. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dépend linéairement de \vec{u} et \vec{v}

$$(\alpha\vec{u} + \alpha'\vec{u}') \wedge \vec{v} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \alpha'\vec{u}' \wedge \vec{v}$$

P3. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

P4. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v}

P5. Si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u})$ est une base de sens direct.

P6. Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe

$$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

Soit les vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{u}' = (x', y', z')$, on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$$

P7. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base orthonormale directe, on a :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 ; \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 ; \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

P8. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

P9. Formule du double produit vectoriel

Pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ quelconques dans \mathbb{R}^3 , on a :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

4- Division vectorielle

Soit $E = \mathbb{R}^3$ orienté et muni de la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient \vec{u} et \vec{w} deux vecteurs de E , on veut résoudre dans E l'équation en \vec{x} :

$$(e) \quad \vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{w}$$

appelée **division vectorielle**

- Si \vec{u} et \vec{w} non orthogonaux (i.e $\vec{u} \cdot \vec{w} \neq 0$), alors l'équation (e) n'a pas de solution.
- Si \vec{u} et \vec{w} orthogonaux, l'ensemble des solutions de (e) s'écrit

$$\vec{x} = -\frac{1}{\|\vec{u}\|^2} (\vec{u} \wedge \vec{w}) + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

B- Sous espaces vectoriels

a) Définition

d1. Soit V une partie de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$

On dit que V est un sous espace vectoriel de E (en abrégé s.e.v)

si on a :

V non vide

$$\vec{v} + \vec{v}' \in V \text{ si } \vec{v} \text{ et } \vec{v}' \in V$$

$$\alpha \vec{v} \in V \text{ si } \alpha \text{ réel et } v \in V$$

Remarques : $\{\vec{0}\}$ et \mathbb{R}^3 sont des sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3

Exemple 1 :

$$V = \{ (a, b, 0), a \text{ et } b \text{ réels quelconques} \}$$

$$\vec{0} = (0, 0, 0) \in V \text{ donc } V \neq \emptyset$$

$$\vec{v} = (x, y, 0) \quad \vec{v}' = (x', y', 0) \text{ alors } \vec{v} + \vec{v}' = (x + x', y + y', 0) \in V$$

$$\text{et } \alpha \vec{v} = (\alpha x, \alpha y, 0) \in V$$

Exemple 2 :

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0 \}, a, b, c \text{ non tous nuls}$$

$$\vec{v} = (x, y, z) \Rightarrow ax + by + cz = 0 \quad (1)$$

$$\vec{v}' = (x', y', z') \Rightarrow ax' + by' + cz' = 0 \quad (2)$$

$$\text{Alors (1) + (2) donne : } a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0$$

$$\text{Donc } (x + x', y + y', z + z') = \vec{v} + \vec{v}' \in V$$

$$\text{D'autre part } \alpha \text{ fois (1) donne : } \alpha ax + \alpha by + \alpha cz = 0 \text{ alors } \alpha \vec{v} \in V$$

$$\vec{0} = (0, 0, 0) \in V \text{ évident donc } V \neq \emptyset$$

Exemple 3 :

L'orthogonal $(\vec{d})^\perp$ d'un vecteur $\vec{d} = (a, b, c)$

$$(\vec{d})^\perp = \{ \vec{v} \in E; \vec{v} \cdot \vec{d} = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de E et on a :

$$(\vec{d})^\perp = \{ \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0 \}$$

d2. Sous-espace vectoriel engendré

Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n vecteurs de E ; l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ est un sous espace vectoriel de E , appelé s.e.v engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. On le note $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

• Droite vectorielle

Soit \vec{d} un vecteur non nul de \mathbb{R}^3

On appelle droite vectorielle de base \vec{d} ou engendrée par le vecteur \vec{d} , l'ensemble des vecteurs de la forme $t\vec{d}$, t réel

On le note $\mathbb{R}\vec{d}$ ou $\text{Vect}(\vec{d})$

$\mathbb{R}\vec{d}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 1.

Exemple : $\mathbb{R}\vec{i}$, $\mathbb{R}\vec{j}$, $\mathbb{R}\vec{k}$ sont des droites vectorielles.

•• Plan vectoriel

Soit \vec{d}_1 et \vec{d}_2 deux vecteurs non colinéaires de $E = \mathbb{R}^3$

On appelle plan vectoriel de base (\vec{d}_1, \vec{d}_2) ou engendré par \vec{d}_1 et \vec{d}_2 l'ensemble des vecteurs de la forme :

$$t_1\vec{d}_1 + t_2\vec{d}_2, \quad t_1 \text{ et } t_2 \text{ réels}$$

On le note $\mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$ ou $\text{vect}(\vec{d}_1, \vec{d}_2)$

Exemple :

a, b, c étant trois réels non tous nuls fixés, le sous ensemble de E

$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0 \}$ est un plan vectoriel de E .

En effet supposons $c \neq 0$, alors $z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$

$$(x, y, z) = (x, y, -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y)$$

$$(x, y, z) = (x, 0, -\frac{a}{c}x) + (0, y, -\frac{b}{c}y)$$

$$= \frac{x}{c}\vec{d}_1 + \frac{y}{c}\vec{d}_2, \quad \text{avec } \vec{d}_1 = (c, 0, -a) \text{ et } \vec{d}_2 = (0, c, -b)$$

b) Intersection de deux sous espaces vectoriels

L'intersection de deux sous espaces vectoriels est un s.e.v de E.

c) Somme de deux s.e.v

Soit V_1 et V_2 deux s.e.v de $E = \mathbb{R}^3$

L'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, où $\vec{v}_1 \in V_1$ et $\vec{v}_2 \in V_2$ est un sous espace vectoriel de E.

On l'appelle "la somme de V_1 et V_2 "

On le note $V_1 + V_2$

Remarques :

- $V_1 + V_2$ contient V_1 et V_2 au moins
- Si $V_1 \subset V_2$ alors $V_1 + V_2 = V_2$

Somme directe de deux s.e.v

Si $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$, $V_1 + V_2$ est appelé somme directe de V_1 et V_2

Alors on le note $V_1 \oplus V_2$

d) Sous espaces vectoriels supplémentaires

Les s.e.v V_1 et V_2 de $E = \mathbb{R}^3$ sont dits supplémentaires si

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \quad \text{i.e. } V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\} \text{ et } \mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$$

Exemples :

$V_1 = \mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$ et $V_2 = \text{Vect}(\vec{k})$ sont supplémentaires

e) Sous espaces orthogonaux

V_1 et V_2 sont orthogonaux si

$$\forall \vec{v}_1 \in V_1 \quad \text{et} \quad \forall \vec{v}_2 \in V_2, \text{ on a } \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$$

Exemple : $V_1 = \mathbb{R}\vec{i}$ et $V_2 = \mathbb{R}\vec{j} + \mathbb{R}\vec{k}$

C- APPLICATIONS LINEAIRES

E et E' sont des espaces vectoriels réels chacun égal soit à \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} ou $\{\vec{0}\}$

1- Définition

Une application f de E dans E' est dite linéaire si

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

avec \vec{u}, \vec{v} quelconques dans E, λ réel quelconque.

Conséquences immédiates

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_{E'}$$

$$f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$$

Cas particuliers

Si $E = E'$ f est appelé endomorphisme de E.

Si $E = E'$ et f bijection, f est appelé automorphisme de E.

Si $E \neq E'$ et f bijection, f est appelé isomorphisme de E dans E'.

Applications linéaires

$E \rightarrow E \quad \vec{v} \rightarrow f(\vec{v}) = \vec{v}'$, \vec{v} quelconque dans E

- $f(\vec{v}) = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in E$, f appelée application linéaire nulle
- $f(\vec{v}) = \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in E$, f appelée identité de E et notée Id_E
- $f(\vec{v}) = \mu\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in E$, μ réel fixé dans $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, f est appelée homothétie de E de rapport μ et notée μId_E

Formes linéaires

Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et f linéaire, f est appelé formé linéaire sur E

Remarque

Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, alors $f(\vec{v}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k})$ ou

$f(\vec{v}) = ax + by + cz$ en posant $a = f(\vec{i})$, $b = f(\vec{j})$, $c = f(\vec{k})$.

2- Expression analytique d'une application linéaire

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. $E' = E$ et f linéaire de E dans E' .

$f: E \rightarrow E'$; $\vec{v} = (x, y, z) \mapsto f(\vec{v}) = \vec{v}' = (x', y', z')$

On obtient $f(v) = f(x\vec{e}_1, y\vec{e}_2, z\vec{e}_3) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3)$

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a_{11}x & a_{12}y & a_{13}z \\ a_{21}x & a_{22}y & a_{23}z \\ a_{31}x & a_{32}y & a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le tableau a 3 lignes et 3 colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dans lequel la j -ième colonne est constituée des coordonnées de $f(\vec{e}_j)$ est appelé matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On le note $A = (a_{ij})$ ou $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Le système

$$f: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

est appelée expression analytique de f dans la base \mathcal{B} .

Cas particulier

Si f est une forme linéaire sur E , ou $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in E$, $f(\vec{v}) \in \mathbb{R}$

l'expression analytique de f devient :

$$f(\vec{v}) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

Résultat

f est linéaire si et seulement si chaque application coordonnée est une forme linéaire sur E .

3- Définition

Noyau, image, rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans E'

- On appelle noyau de f et on note $\text{Ker}(f)$ ou $N(f)$, l'ensemble des vecteurs \vec{v} de E tels que $f(\vec{v}) = \vec{0}_E$.
- On appelle image de f et on note $\text{Im}(f)$ ou $f(E)$, l'ensemble des vecteurs $f(\vec{v})$, \vec{v} décrivant E .
- On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$, l'entier naturel égal à $\dim f(E)$.

Résultat

$\text{Ker}(f)$ est un s.e.v de E

$\text{Im}(f)$ est un s.e.v de E'

Théorème

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Exemple:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x + y, x - z)$$

- $\text{Ker}(f) = ?$

$$\vec{v} = (x, y, z) \in \text{ker}(f) \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \\ x - z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = -x \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow z = x \quad (5)$$

(4) et (5) dans (1) : $0x = 0 \rightarrow x$ quelconque

$$\vec{v} = (x, y, z) = (x, -x, x) = x(1, -1, 1) = x\vec{d} \text{ où } \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(f)$ est la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{d}$ notée aussi $\text{Vect}(\vec{d})$

- $\text{Im}(f) = ?$

$$\vec{v} = x\vec{e}_1, y\vec{e}_2, z\vec{e}_3 \text{ d'où } f(\vec{v}) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3)$$

$$\text{Avec } f(\vec{e}_1) = (2, 1, 1), f(\vec{e}_2) = (1, 1, 0) \text{ et } f(\vec{e}_3) = (-1, 0, -1)$$

Im (f) est engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$; $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ non colinéaires et $\det(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)) = 0$ alors on obtient une base de Im(f) en sélectionnant deux vecteurs non colinéaires parmi les trois générateurs, par exemple $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$.

En conclusion Im(f) est le plan vectoriel $\mathbb{R}f(\vec{e}_1) + \mathbb{R}f(\vec{e}_2)$.

- Rang de f ?

$$\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f) = 2$$

4- Déterminant d'un endomorphisme de E

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ une base quelconque de $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de E.

a- Définition

Soit f un endomorphisme de E. le déterminant de f, noté $\det(f)$, est défini par :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$$

b- Théorème

Le déterminant de f est indépendant de la base choisie, c'est-à-dire

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

c- Conséquence de la définition

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 (x, y, z) \rightarrow (2x + y - z, x + y, x - z)$,

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

d- Théorème

f automorphisme de $E \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

e- Théorème

f et g endomorphisme de E alors : $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$

5- Automorphisme de E et orientation

Soit f un automorphisme de E

Si $\det f > 0$, f transforme toute base en une base de même sens et alors on dit que f conserve l'orientation.

Si $\det f < 0$, f transforme toute base en une base de sens contraire et alors on dit que f change l'orientation.

Remarque

Les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont de sens contraires.

D- PROJECTEURS, SYMETRIES

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel réel de dimension n .

1- Projecteur

a- Définition

On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$

b- Propriétés

Si p est un projecteur de E

P.1 $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

P.2 $\text{Im}(p)$ est égal à $\text{Inv}(p) = \{\vec{v} \in E ; p(\vec{v}) = \vec{v}\}$

Preuve

P.1 $\forall v \in E \quad p[\vec{v} - p(\vec{v})] = p(\vec{v}) - (p \circ p)(\vec{v}) = p(\vec{v}) - p(\vec{v}) = 0$

$\Rightarrow \vec{v} - p(\vec{v}) = \vec{v}_n \in \text{Ker}(p)$ donc $\vec{v} = p(\vec{v}) + \vec{v}_n$

Soit $\vec{w} \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$ d'où $\vec{w} = p(\vec{v})$ et $p(\vec{w}) = \vec{0}$ donc

$p[p(\vec{v})] = \vec{0}$ d'où $p^2(\vec{v}) = \vec{0}$ alors $p(\vec{v}) = \vec{0}$ donc $\vec{w} = \vec{0}$

P.2 Soit $p(\vec{v}) \in \text{Im}(p)$ alors on a $p[p(\vec{v})] = p(\vec{v})$ donc $p(\vec{v})$ est fixe

ou $p(\vec{v}) \in \text{Inv}(p)$.

Soit $\vec{v} \in \text{Inv}(p)$, donc $\vec{v} = p(\vec{v})$ alors $\vec{v} \in \text{Im}(p)$

c) Proposition

Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E , pour tout \vec{v} de E , il existe un couple unique (\vec{v}_1, \vec{v}_2) dans $E_1 \times E_2$ tel que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

L'endomorphisme p de E tel que :

$$\text{Im}(p) = E_1 \text{ et } \text{Ker}(p) = E_2$$

On dit que p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2

c) Conséquence

Si p est un projecteur de E alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

$\text{Im}(p)$ est appelé la **base de p** , $\text{Ker}(p)$ la **direction de p** .

2- Symétrie

a) Définition

On appelle symétrie de E tout endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \text{Id}_E$.

b) Propriétés

s un endomorphisme si et seulement si $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur.

La symétrie s et le projecteur p sont dits **associés** et on a :

$$p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \Leftrightarrow s = 2p - \text{Id}_E.$$

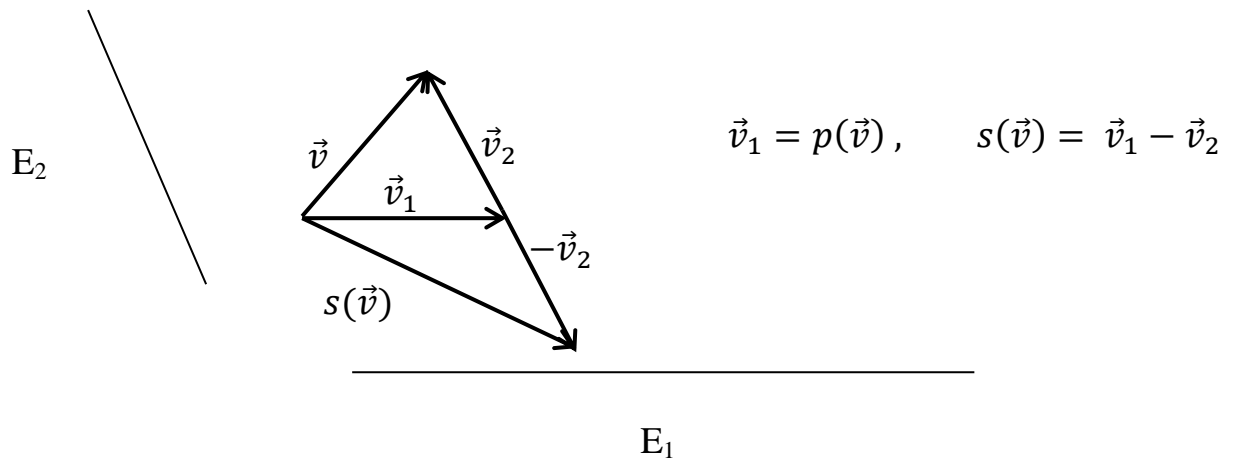
c) Proposition

Soient E_1 et E_2 deux s.e.v de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$; alors $\forall \vec{v} \in E, \exists ! (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. L'endomorphisme s de E tel que :

$s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ est une symétrie de E , appelée **symétrie de E associée** au projecteur p de E tel que $p: \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_2$.

On dit que s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Illustration ; p et s sont dits associés.



d) Conséquence

Soit s une symétrie de E, posons :

$$E_1 = \text{Inv}(s) = \{ \vec{v} \in E; s(\vec{v}) = \vec{v} \}$$

$$E_2 = \text{Inv}(s) = \{ \vec{v} \in E; s(\vec{v}) = -\vec{v} \}$$

On a $E = E_1 \oplus E_2$ et s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

E_1 est appelé la **base de s**, E_2 la **direction de s**.

e) Résultat

La symétrie et la projection associées ont la base et la même direction.

CHAPITRE 2 : ESPACES AFFINES

A. Notion d'espaces affines

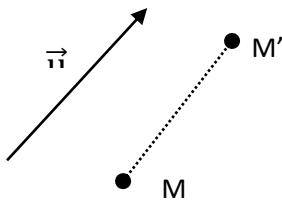
Introduction

Soit \mathcal{E} l'espace physique ordinaire et E l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Soit \vec{u} un vecteur de E et M un point quelconque de \mathcal{E} .

La translation de vecteur \vec{u} est l'application notée $T_{\vec{u}}$ et telle que :

$$T_{\vec{u}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, M \rightarrow M' \text{ avec } \overline{MM'} = \vec{u}$$



$$\text{Nous écrivons } M' = T_{\vec{u}}(M) \quad \text{ou } \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \vec{u}$$

Soit O l'origine d'un repère de \mathcal{E} , alors par l'égalité $\overline{OM} = \vec{v}$, le vecteur \vec{v} et le point M sont en relation exclusive.

On a de façon équivalente $M = O + \vec{v}$

1) Définitions

d1- Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R}

On appelle espace affine de direction E un ensemble non vide \mathcal{E} , à éléments appelés points, tel que si A est un point, on a :

a1- L'application $\vec{v} \mapsto A + \vec{v}$ de E dans \mathcal{E} , est une bijection

a2- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$

d2- La dimension de \mathcal{E} est celle de E , $\dim \mathcal{E} = \dim E$

d3- Le vecteur \vec{x} tel que $A + \vec{x} = B$ est noté \overline{AB} ou $\mathbf{B} - \mathbf{A}$

2) Propriétés

P1- Egalité de Chasles : $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

P2- Tout espace vectoriel E est un espace affine de direction E . En particulier,

$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ sont des espaces affines.

P3- La translation est une bijection et $(T_{\vec{u}})^{-1} = T_{-\vec{u}}$

P4- On a : $T_{\vec{0}} = \text{Id}_{\mathcal{E}} \quad T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$

Exemples :

- L'espace physique ordinaire \mathcal{E} est un espace affine de direction E , E étant l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- \mathbb{R}^3 est un espace affine de direction \mathbb{R}^3
- De façon générale, tout espace vectoriel E sur \mathbb{R} est un espace affine de direction E .

B- Variétés affines

(\mathcal{E}, E) désigne un espace affine

1) Définitions

d4- On appelle variété affine de \mathcal{E} une partie \mathcal{V} non vide de \mathcal{E} telle que l'ensemble $V = \{\overrightarrow{AB}, (A, B) \in \mathcal{V}^2\}$ est un sous espace vectoriel de E .

V est appelé la direction de \mathcal{V} .

d5- On appelle droite affine, plan affine, singleton affine une variété affine de E dont la direction est respectivement une droite vectorielle, un plan vectoriel, le singleton vecteur nul $\{\vec{0}\}$.

2) Propriétés

P5- Soit \mathcal{V} une variété affine de direction V

a) $\forall A \in \mathcal{V}$, on a $V = \{\overrightarrow{AM}; M \in \mathcal{V}\}$

$$b) \forall A \in \mathcal{V}, \text{ on a } V = \{A + \vec{v}; \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

On note alors $\mathcal{V} = A + V$

Une variété affine (en abrégé v.a) est caractérisée par un point et sa direction.

P6- Sous espace affine

Une variété affine satisfait les deux axiomes a1 et a2 de d1 qui fondent un espace affine, alors une variété affine est appelée sous espace affine de \mathcal{E} .

EXEMPLES ET EQUATIONS ASSOCIEES

- Une droite \mathcal{D} passant par les points distincts A et B est une variété affine de direction $V = \mathbb{R}\vec{d}$ où $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ d'où l'écriture

$$\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{d}$$

- Un plan \mathcal{P} passant par trois points non alignés est une variété affine de direction $V = \mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$ où $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d}_2 = \overrightarrow{AC}$, d'où l'écriture

$$\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$$

Supposons que $\dim \mathcal{E} = 3$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{d} = \vec{0}$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2 \Rightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{d}_1, \vec{d}_2) = 0$$

REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES

a) D'une droite $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{d}$ où $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (x = x_a + t\alpha, y = y_a + t\beta, z = z_a + t\gamma)$$

b) D'un plan $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, t') \mapsto (x = x_a + t\alpha + t'\alpha', y = y_a + t\beta + t'\beta', z = z_a + t\gamma + t'\gamma')$$

Chaque application est appelée représentation paramétrique ; dans le cas d'une droite, un seul paramètre t correspond à un point ; dans le second cas, on a un couple de paramètres pour chaque point du plan.

CHAPITRE 3 :

COURBES PARAMETRÉES

A. GENERALITES

(\mathcal{E}, E) désigne un espace affine de dimension n ; le choix d'un repère

$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ permet d'identifier \mathcal{E} et E à \mathbb{R}^n , le point $M(x_1, \dots, x_n)$ au vecteur

$\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$. Très souvent, n sera égal à 2 ou 3.

1. Courbe paramétrée

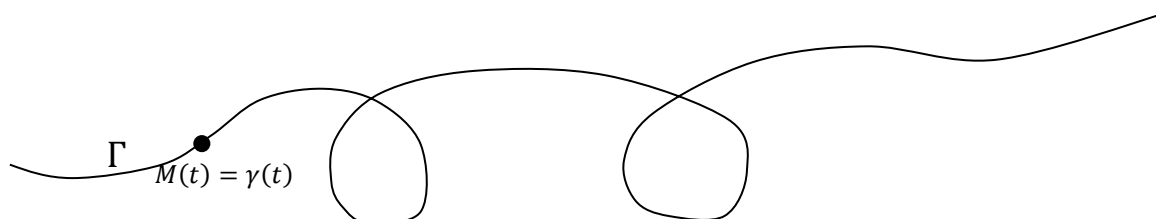
Définitions

d1. On appelle courbe paramétrée de \mathcal{E} un triplet $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ où :

Γ est une partie de \mathcal{E} (appelée « courbe », trajectoire,...)

D est une union d'intervalle de \mathbb{R}

γ est une application de D dans Γ de classe C^k , $k \geq 1$



On dit que γ est une **paramétrisation** de la classe Γ .

Remarque : $\gamma(t) = M(t) = (M, t) = \overrightarrow{OM}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

On peut se représenter un point M se déplaçant le long d'un chemin Γ ; à l'instant t , sa position et sa vitesse vectorielle sont données respectivement par $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$.

EXEMPLES

(a) - Courbe rectiligne

Soient deux points fixes P et Q de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$; posons $\gamma(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$, $t \in \mathbb{R}$

La courbe Γ est ici la droite (PQ) ou $P + \mathbb{R}\overrightarrow{PQ}$

Notons que $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ et si $t \in [0; 1]$, $\gamma(t) \in [P, Q]$

(b)-Courbe circulaire, elliptique

Paramétrisation d'un cercle de centre origine et de rayon a

$$\gamma(t) = a(\cos t, \sin t) = (a \cos t, a \sin t), t \in [0; 2\pi]$$

Paramétrisation de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

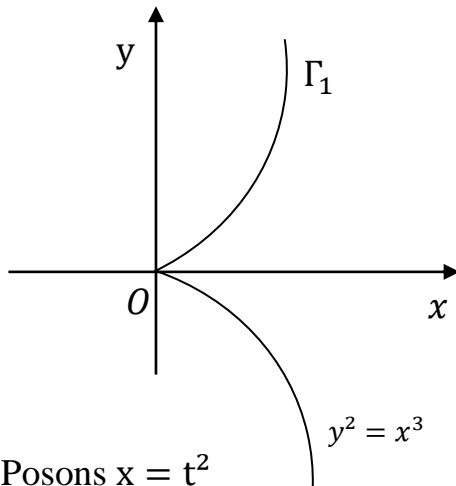
$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

(c) -Cubiques

Ce sont des courbes d'équation $y^2 = x^3 + px + q$; $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ (admettant ox pour axe de symétrie)

Considérons les deux courbes cubiques figurées ci-dessous.

A droite la cubique à nœud d'équation $y^2 = x^3 + x^2$

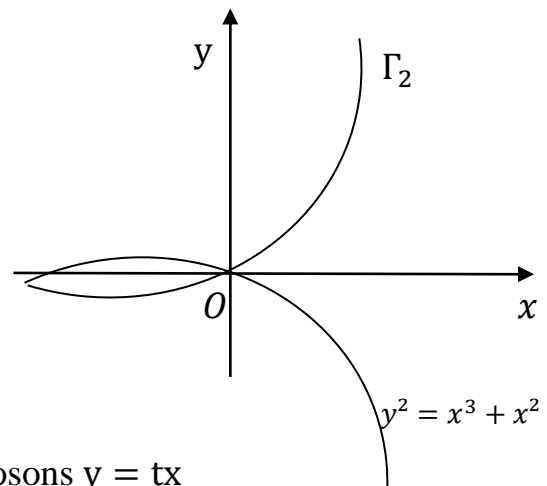


Posons $x = t^2$

Alors $y^2 = x^3 = t^6 \Rightarrow y = t^3$

D'où la paramétrisation de Γ_1

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$



Posons $y = tx$

l'équation de Γ_2 devient

$$t^2 x^2 = x^3 + x^2 \Rightarrow t^2 = x + 1$$

$$x = t^2 - 1$$

D'où la paramétrisation de Γ_2

$$\gamma(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$$

(d)-Cubique torsadée

Ainsi appellerons nous la courbe non plane paramétrisée par :

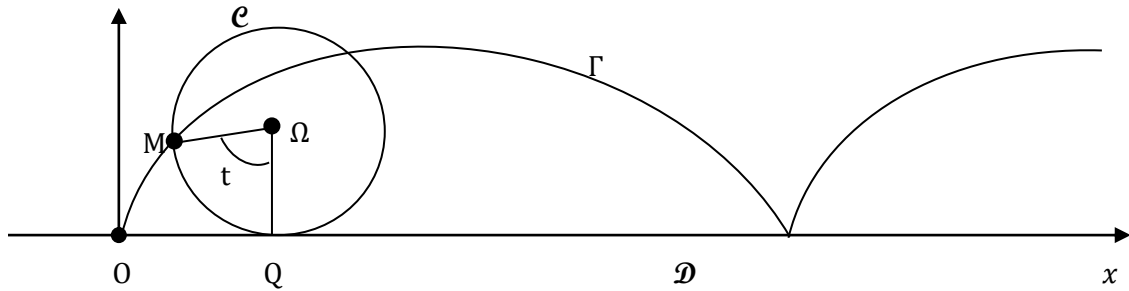
$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3); \quad t \in \mathbb{R}$$

dont les projections sur les plans xOy , xOz et yOz sont respectivement d'équations $y = x^2$, $z = x^3$ et $z^2 = y^3$.

(e) -Cycloïde

C'est la trajectoire d'un point fixe sur un cercle \mathcal{C} qui roule sans glisser sur une droite \mathcal{D} .

Cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon $R > 0$; soit M le point fixe du cercle \mathcal{C} .



Au cours du mouvement de \mathcal{C} , il arrive que M soit sur \mathcal{D} , soit O l'un des points de \mathcal{D} ainsi obtenus ; choisissons O comme origine et prenons une base orthonormale telle que Ox soit porté par \mathcal{D} et que les points de \mathcal{C} soient d'ordonnées positives, soit Q le point de contact de \mathcal{C} et \mathcal{D} . on suppose que \mathcal{C} tourne dans le sens négatif avec la vitesse angulaire 1 et que M soit en O à l'instant $t = 0$.

A chaque instant t quelconque, on a :

$$\left(\overrightarrow{\Omega Q}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = -t \quad ; \quad \overline{OQ} = Rt$$

Car $OQ =$ longueur de l'arc \widetilde{QM}

Quelles sont les coordonnées de M ou de \overrightarrow{OM} ?

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{Q\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (Rt, 0) + (0, R) + \overrightarrow{\Omega M}$$

On a :

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right) + \left(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{\Omega Q}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega Q}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = -\frac{\pi}{2} - t$$

Donc les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega M}$ sont :

$$R \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = -R \sin t \quad \text{et} \quad R \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = -R \cos t$$

Les coordonnées de M sont :

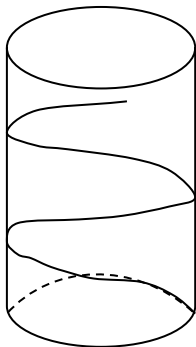
$$\overrightarrow{OM} = (x, y) = (Rt, 0) + (0, R) + (-R\sin t, -R\cos t)$$

D'où une représentation paramétrique de la cycloïde :

$$\gamma(t) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ou $\gamma(t) = R(t - R\sin t, 1 - R\cos t) \quad t \in \mathbb{R}$

(f)- Hélice circulaire



C'est la courbe non plane figurée ci-contre et dont une paramétrisation est

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \text{ avec } a > 0 \text{ et } b \neq 0.$$

Bref rappel sur les fonctions hyperboliques

Nous noterons ch, sh, th, les fonctions respectives cosinus hyperbole, sinus hyperbole, tangente hyperbole.

Avec $\text{cht} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $\text{sht} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\text{tht} = \frac{\text{sht}}{\text{cht}}$

On pose $\text{secht} = \frac{1}{\text{cht}}$

On a les formules :

$$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$$

$$\text{th}^2 t + \text{sech}^2 t = 1$$

$$\text{ch}'(t) = \text{sht}$$

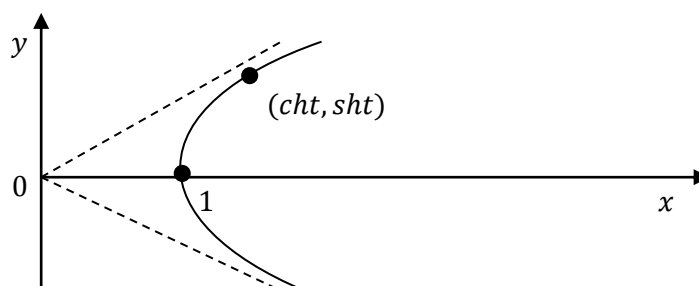
$$\text{sh}'(t) = \text{cht}$$

$$\text{th}'(t) = \text{sech}^2 t$$

$$\text{sech}'(t) = -\text{tht secht}$$

(f)- La partie de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ figurée ci-dessous est paramétrisée par

$$\gamma(t) = (\text{cht}, \text{sht})$$



(h)- L'hyperbole, entière, d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la paramétrisation

$$x = \frac{1}{2}a \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad y = \frac{1}{2}b \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

En effet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 1$ alors on pose $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = t$ et

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}$ d'où le résultat ci-dessous.

d2. Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée.

On dit que \mathcal{C} est simple si γ est injective.

On dit que le point $M = \gamma(t)$ est

régulier si $\gamma'(t) \neq \vec{0}$

stationnaire si $\gamma'(t) = \vec{0}$

simple, double, triple ou de multiplicité n si $\text{card}\{\gamma^{-1}(M)\}$ est respectivement égal à 1, 2, 3 ou n .

d3. Tangente

Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée de classe C^k , $k \geq 1$. On suppose que

$\forall t \in D, \exists n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq k$ tel que $\gamma^{(n)}(t) \neq \vec{0}$

Alors on note $p = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \gamma^{(n)}(t) \neq \vec{0}\}$

la droite C passant par $M = \gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma^{(p)}(t)$, est appelée tangente en (M, t) à C .

Exemple :

$$\gamma(t) = (1 - t^4, t^5 - t^2 + 3)$$

$$\gamma'(t) = (-4t^3, -2t + 5t^4)$$

$$\gamma'(0) = \vec{0} \implies \gamma(0) = (1; 3) \text{ point stationnaire}$$

$$\gamma''(t) = (-12t^2, 20t - 2)$$

$$\gamma''(0) = (0; -2) \neq \vec{0} \quad \text{alors } p = 2$$

B. COURBES PARAMETREES PLANES

Dans tout ce paragraphe, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine de dimension 2 muni du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Classification des points

Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée de classe $C^k, k \geq 2$. On suppose dans la suite que pour tout $t \in D, \exists n \in \mathbb{N}, p < n \leq k$, tel que les deux vecteurs $\gamma^{(p)}(t)$ et $\gamma^{(n)}(t)$ de E sont linéairement indépendants.

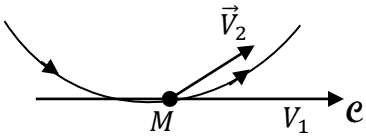
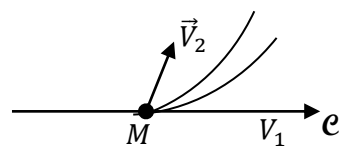
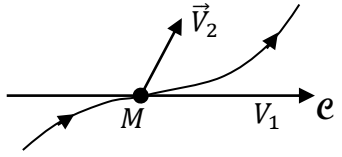
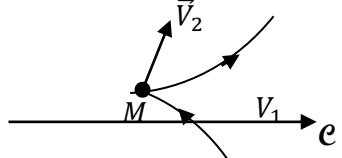
On note q le plus petit des entiers n ayant cette propriété.

Le développement de Taylor – Young de γ en t permet d'écrire :

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + \frac{h^p}{p!} [1 + o(1)] \gamma^{(p)}(t) + \frac{h^q}{q!} \gamma^{(q)}(t) + O(h^q)$$

$$\text{Posons } \vec{V}_1 = \frac{1}{p!} \gamma^{(p)}(t) \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \frac{1}{q!} \gamma^{(q)}(t)$$

$$\text{D'où } \gamma(t+h) = \gamma(t) + h^p \vec{V}_1 + h^q \vec{V}_2 + O(h^q)$$

	p impair	p pair
q pair	 <p>Point ordinaire</p>	 <p>Point de rebroussement de 2^e espèce</p>
q impair	 <p>Point d'inflexion</p>	 <p>Point de rebroussement de 1^e espace</p>

Remarque : La flèche indique le sens de parcours de Γ au voisinage de $M = \gamma(t)$ quand h varie de -1 à 1 dans $\gamma(t + h)$.

Illustration

$$\gamma(t) = (1 - t^4, t^5 - t^2 + 3)$$

Point stationnaire $\gamma(0) = (1; 3)$, $p = 2$ et $q = 4$

Point de rebroussement de 2^e espace.

2°) Résultats de substitution à p et q

Lorsque les dérivées de $\gamma(t)$ sont lourdes à calculer et rendent l'obtention de p et q difficiles, voici des résultats sur la tangente et la nature du rebroussement.

Soient $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée avec $\gamma(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$;

On pose: $m(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

PROPRIETES

P1. On suppose qu'il existe un voisinage $V(t_0) \subset D$ de t_0 tel que f' ne s'annule pas sur $V(t_0) \setminus \{t_0\}$.

- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = \ell$, alors le réel ℓ est le coefficient directeur de la tangente \mathcal{C} en (M_0, t_0) à \mathcal{C} .
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} m(t) \in \{-\infty, +\infty\}$, la tangente en (M_0, t_0) à \mathcal{C} est la droite $(M_0; \vec{j})$

P2. On suppose (M_0, t_0) point de rebroussement (p pair) à tangente non parallèle aux axes.

- Si m présente un extrémum local en t_0 ; on a un rebroussement de 2^e espace.
- Sinon, on a un rebroussement de 1^e espace.

P3. On suppose (M_0, t_0) avec p impair et à tangente non parallèle aux axes

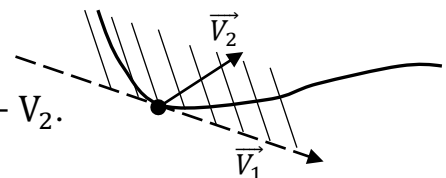
- Si m présente un extrémum local en t_0 , on a un point d'inflexion
- Sinon, on a un point ordinaire.

2°) Concavité

Soient $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ une courbe paramétrée où $\gamma(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ et les entiers p et q définis en tout point $M = \gamma(t)$ suivis de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

Définition

La concavité de \mathcal{C} en M_0 est le demi-plan bordé par la tangente \mathcal{T} en M_0 à \mathcal{C} et contenant le point $M_0 + \vec{V}_2$.



Propriété

Soit (M_0, t_0) un point régulier de \mathcal{C} (i. e. $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$)

M_0 est un point d'inflexion si et seulement si la fonction

$t \mapsto f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)$ s'annule en changeant de signe en t_0 .

Illustration

$$\gamma(t) = (t, t^3)$$

$$\gamma'(t) = (1, 3t^2), \quad \gamma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ tout point est régulier.}$$

$f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) = 6t$ s'annule en 0 en changeant de signe, alors $M_0 = \gamma(0) = 0$ est un point d'inflexion.

4°) Branches infinies

On continue avec les notations des paragraphes précédents.

Définitions

d1. Branche infinie

Soit t_0 une borne finie ou infinie de D .

On dit que $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ présente une branche infinie en t_0 lorsque l'une des deux coordonnées au moins, $f(t)$ ou $g(t)$, a une limite infinie en t_0 .

d2. 1^{er} cas : $\lim_{t_0} f \in \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim_{t_0} g = y_0$

La droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à Γ

2^e cas : $\lim_{t_0} f = x_0$ et $\lim_{t_0} g \in \{-\infty, +\infty\}$

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à Γ

3^e cas : $\lim_{t_0} f \in \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim_{t_0} g \in \{-\infty, +\infty\}$

On étudie alors la direction asymptotique.

d3. Direction asymptotique

Définition

Soit $\vec{d} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $M = \gamma(t) \in \Gamma$; on dit que la branche infinie admet $\mathbb{R}\vec{d}$ pour direction asymptotique si la droite $(OM(t))$ tend vers la droite $O + \mathbb{R}\vec{d}$ quand t tend vers t_0 .

Remarque

La pente de la droite (OM(t)) est $\frac{g(t)}{f(t)}$ et OM(t) est infini.

a) Si $\lim_{t_0} \frac{g}{f} = 0$

\mathcal{C} admet $\mathbb{R}\vec{i}$ pour direction asymptotique en t_0 et présente une branche parabolique de direction $\mathbb{R}\vec{i}$.

b) Si $\lim_{t_0} \frac{g}{f} \in \{-\infty, +\infty\}$

\mathcal{C} admet $\mathbb{R}\vec{j}$ pour direction asymptotique en t_0 et présente une branche parabolique de direction $\mathbb{R}\vec{j}$.

c) Si $\lim_{t_0} \frac{g}{f} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$

\mathcal{C} admet $\mathbb{R}(\vec{i} + \alpha\vec{j})$ pour direction asymptotique en t_0 et dans ce cas, on a deux sous cas :

- Si $\lim(g - \alpha f) \in \{-\infty, +\infty\}$, \mathcal{C} présente en t_0 une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = \alpha x$
- Si $\lim(g - \alpha f) = \beta, \beta \in \mathbb{R}$, la droite \mathcal{D} d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à Γ en t_0 .

Remarques

1. L'étude des positions relatives de Γ et \mathcal{D} en t_0 est donnée par le signe de $g(t) - [\alpha f(t) + \beta]$
2. Si nécessaire on peut recourir aux développements limités pour étudier cette différence.

5°) Construction du support Γ d'une courbe paramétrée $\gamma(t) = (f(t), g(t))$

Plan

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_γ de γ

- Réduire le domaine d'étude si γ périodique ou si Γ présente des éléments de symétrie
- Construire un tableau des variations commun à f et g .
- Etudier les branches infinies
- Etudier les points stationnaires éventuels
- Donner les tangentes à Γ en certains points particuliers (M, t) tels que $\gamma'(t) = \vec{0}$, $f'(t) = 0$ et $g'(t) \neq 0$, $f'(t) \neq 0$ et $g'(t) = 0$
- Courbe Γ .

Complément à la réduction du domaine d'étude

On suppose la courbe $\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et D est l'ensemble de définition de γ ; le plan $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- S'il existe $T > 0$ tel que $\forall t \in D, t + T \in D$ et $\gamma(t + T) = \gamma(t)$, on obtient toute la courbe Γ en se limitant à $[a, a + T[$, a réel arbitraire.
- S'il existe $T > 0$ tel que $\forall t \in D, t + T \in D$ et $\gamma(t + T) = -\gamma(t)$, on construit la partie de la courbe correspondant à $[a, a + T[$, a réel arbitraire, et on complète la courbe Γ par symétrie de centre O .
- Si $\forall t \in D, -t \in D$ et $\gamma(-t) = \gamma(t)$, on obtient toute la courbe Γ en se limitant à $D \cap \mathbb{R}^+$.
- Si $\forall t \in D, -t \in D$ et $\gamma(-t) = -\gamma(t)$, on construit la partie de la courbe correspondant à $D \cap \mathbb{R}^+$, et on complète la courbe Γ par symétrie de centre O .
- Si $\forall t \in D, -t \in D$ et $\gamma(-t) = (x(t), -y(t))$, alors on construit la partie de la courbe correspondant à $D \cap \mathbb{R}^+$ et on complète la courbe Γ par symétrie d'axe (O, \vec{i}) .
- Si $\forall t \in D, -t \in D$ et $\gamma(-t) = (-x(t), y(t))$, alors on construit la partie de la courbe correspondant à $D \cap \mathbb{R}^+$ et on complète la courbe Γ par symétrie d'axe (O, \vec{j}) .

- Si $\forall t \in D, \frac{1}{t} \in D$ et $\gamma(\frac{1}{t}) = (y(t), x(t))$, alors on construit la partie de la courbe correspondant à $D_1 = ([-1; 0[\cup]0; 1]) \cap D$, et on complète la courbe obtenue par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- Si $\forall t \in D, a - t \in D$ et $\gamma(a - t) = (y(t), x(t))$, $a > 0$, alors on construit la partie de la courbe correspondant à $D_1 = (\frac{a}{2}; +\infty[\cap D$, et on complète la courbe obtenue par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarques

Dans chacun des deux derniers cas, si $\gamma(\frac{1}{t}) = (-y(t), -x(t))$, $\gamma(a - t) = (-y(t), -x(t))$, alors la symétrie se fait par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

C) COURBE PLANE DEFINIE PAR UNE EQUATION POLAIRE, $\dim \mathcal{E} = 2$

(\mathcal{E}, E) désigne le plan affine orienté muni du repère orthonormé direct

$$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_\theta = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}$ et $\vec{V}_\theta = \vec{u}_{\theta + \frac{\pi}{2}}$

1) Courbe paramétrée définie par une équation polaire

Définition

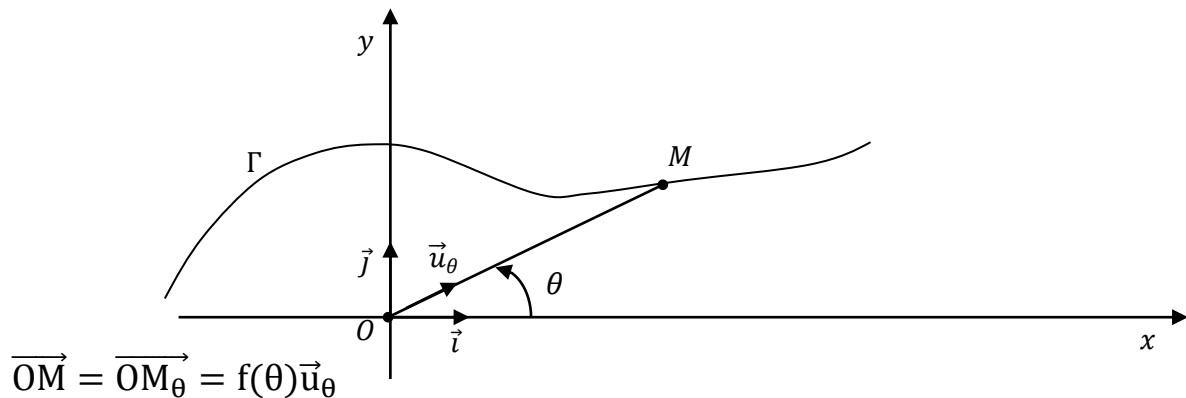
Soit D un intervalle de \mathbb{R} ou une union d'intervalles de \mathbb{R} , f une application de classe C^1 de D dans \mathbb{R} .

On appelle **courbe d'équation polaire** $\mathbf{r} = \mathbf{f}(\theta)$ la courbe paramétrée

$\mathcal{C} = (\Gamma, D, \gamma)$ définie par :

$$\gamma: D \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$\theta \mapsto \gamma(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$$



Remarque

$$\gamma(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta \Rightarrow \gamma'(\theta) = f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta$$

Propriété

Le point (M, θ_0) de \mathcal{C} est **stationnaire** si et seulement si $f(\theta_0) = 0$ et $f'(\theta_0) = 0$

Preuve

$$\gamma(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta \text{ et } \gamma'(\theta) = \vec{0} \Rightarrow f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta = \vec{0} \text{ alors}$$

$f(\theta) = 0$ et $f'(\theta) = 0$ car $\{\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta\}$ est un système libre.

Conséquence immédiate

L'origine O du repère est le seul point de \mathcal{C} , s'il appartient à \mathcal{C} , qui peut être stationnaire.

$$\text{En effet } f(\theta_0) = 0 \Rightarrow M_0 = 0$$

2) Construction du support

a) Réduction de l'ensemble d'étude de la fonction f

a.1

Si $T > 0$ est une **période** de f, i. e. $\forall \theta \in D, \theta + T \in D$ et $f(\theta + T) = f(\theta)$

- Si $T = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{N}^*$, alors on obtient toute la courbe Γ en se limitant à $[a, a + T[\cap D$, avec a réel quelconque.
- Sinon, on trace la partie de Γ correspondant à $[a, a + T[\cap D$; on applique alors à cette partie la rotation de centre O et d'angle T , composée plusieurs fois jusqu'à retrouver une partie déjà faite.

a.2

Si $T > 0$ est **antipériode** de f , i. e. $\forall \theta \in D, \theta + T \in D$ et $f(\theta + T) = -f(\theta)$

- Si $T = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{N}$, on obtient toute la courbe en se limitant à $[a, a + T[\cap D$, avec a réel quelconque.
- Sinon, on trace Γ_0 la partie de la courbe correspondant à $[a, a + T[\cap D$, et on applique à Γ_0 la rotation de centre O et d'angle $T + \pi$ composée plusieurs fois jusqu'à retomber sur Γ_0

Exemple

$f(\theta) = \sin(\omega\theta), \omega > 0; D = \mathbb{R}, \frac{2\pi}{2\omega}$ est la période, $\frac{\pi}{\omega}$ est l'antipériode qui sera retenu car donne lieu à un intervalle d'étude plus petit.

a.3

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \theta \in D, \alpha - \theta \in D$ et $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$ alors la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha}{2}$ est un **axe de symétrie**.

Exemple

$f(\theta) = \sin(\omega\theta), \omega > 0$, la droite $\theta = \frac{\pi}{2\omega}$ est un axe de symétrie de Γ

a.4

S'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \theta \in D, \beta - \theta \in D$ et $f(\beta - \theta) = -f(\theta)$, alors la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\beta + \pi}{2}$ est un **axe de symétrie**.

Exemple

$f(\theta) = \cos(\omega\theta), \omega > 0$; ici $\beta = \frac{\pi}{\omega}$, la droite $\theta = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{\omega} + \pi)$ est un axe de symétrie.

Cas particuliers

f fonction paire, $\alpha = 0$, alors Ox axe de symétrie

f fonction impaire, $\beta = 0$, alors Oy axe de symétrie

b) Etude des variations de f

Faire un tableau des variations de f

c) Tangente en un point M de la courbe Γ

- Si $O = (M, \theta)$, la tangente à l'origine O est dirigée par \vec{u}_θ
- Si $O \neq (M, \theta)$, la tangente en M est dirigée par $f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta$

d) Nature du point stationnaire $O = (M, \theta)$

On suppose qu'on a: $f(\theta) = 0$ et $f'(\theta) = 0$

Soit $p = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(\theta) \neq 0\}$

- Si p pair, O est un point de rebroussement de 1^e espèce
- Si p impair, O est un point ordinaire.

Remarque

L'étude du signe de f suffit pour préciser la nature de O.

e) Points doubles

Ce sont les points (M, θ) tels que

$$f(\theta) = f(\theta + k2\pi) \text{ ou } f(\theta) = -f[\theta + (2k + 1)\pi]; (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque

On peut tracer la courbe sans faire cette recherche.

f) Branches infinies

f1. θ au voisinage d'une borne finie θ_0 de D et $\lim_{\theta_0} f \in \{-\infty, +\infty\}$

- Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = a$, $a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $Y = a$ dans le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \overrightarrow{u_{\theta_0}}, \overrightarrow{v_{\theta_0}})$ est **asymptote** à Γ
- Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) \in \{-\infty, +\infty\}$, Γ présente une **branche parabolique** de direction celle de la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.

f2. θ au voisinage de l'infini et $\lim_{|\theta| \rightarrow +\infty} |f| = +\infty$

On dit qu'on a une branche infinie **en spirale**.

f3. θ au voisinage de l'infini et $\lim_{|\theta| \rightarrow +\infty} f(\theta) = a$, ($a \in \mathbb{R}$)

On dit que le cercle de centre O et de rayon $|a|$, (éventuellement $a = 0$), est **cercle asymptote** à la courbe Γ .

TRAVAUX DIRIGES GEOMETRIE 1

CHAPITRE 1 : ALGEBRE LINEAIRE

L'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormale directe et est le référentiel commun à tous les exercices.

EXERCICE 1

L'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = (x, y, z)$ vérifiant les systèmes d'équations suivants :

$$(I) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ -2x + 18y - 11z = 0 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 3x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(III) \quad 6x + 2y - 3z = 0$$

$$(IV) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$(V) \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$(VI) \quad 3x - 2z = 0$$

EXERCICE 2

1- Calculer sans développer immédiatement les premiers déterminants et factoriser tous les autres.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -6 & -5 & 6 \\ -9 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 12 & 8 & 16 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6-x & 3 & -6 \\ -3 & -x & -6 \\ 2 & -2 & 1-x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3+x & -3 & 6 \\ -3 & 3-x & -6 \\ 2 & -2 & 4-x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix}$$

2- Calculer le produit mixte $\vec{u} = (2, -1, -2)$; $\vec{v} = (1, 2, 3)$ et $\vec{w} = (3, 1, 2)$

3- Résoudre dans E l'équation en $\vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ avec $\vec{u} = (2, -1, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, -1)$

EXERCICE 3

L'espace vectoriel euclidien $= \mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère l'endomorphisme f de E tel que :

$$f(\vec{e}_1) = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad , \quad f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \quad \text{et}$$

$$f(\vec{e}_3) = -6\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 .$$

a) Déterminer la matrice A de f dans la base \mathcal{B} , f est-il un automorphisme de E ?

Calculer les images directes par f de $\mathbb{R}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ et $\mathbb{R}(3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$.

b) Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.

EXERCICE 4

Soient les vecteurs $\vec{u}_1 = (1 ; 1 ; -2)$, $\vec{u}_2 = (-2, ; -1 ; 1)$, $\vec{u}_3 = (1, ; 1 ; 1)$

Donner l'expression analytique de

A- La projection p_1 sur $D_1 = \mathbb{R}\vec{u}_2$ parallèlement au plan vectoriel

$P_1 = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_3$. En déduire la projection p'_1 sur p_1 : parallèlement à D_1 .

B- La projection orthogonale p_2 sur $P_2 = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

C- La projection orthogonale p_3 sur $D_2 = \mathbb{R}\vec{u}_3$.

D- La symétrie s_1 par rapport à $Q = \text{Vect}(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ parallèlement à $\Delta = \text{Vect}(\vec{u}_1)$.

E- La symétrie orthogonale s_2 par rapport à $Q = \text{Vect}(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

F- La symétrie orthogonale s_2 par rapport à $\Delta = \text{Vect}(\vec{u}_1)$.

EXERCICE 5

L'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les endomorphismes p et s de E qui au vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ tel que : associe le vecteur $\vec{v}' = (x', y', z')$ tel que :

$$p(\vec{v}) = \left(\frac{1}{4}(7x + 3y - 2z) , \frac{1}{4}(-3x + y + 2z) , \frac{1}{4}(6x + 6y) \right) .$$

$$s(\vec{v}) = (3x - 2y + 4z) , y , (-2x + 2y - 3y) .$$

- a) Montrer que p est un projecteur de E dont on précisera les caractéristiques géométriques.
- b) Obtenir l'image par p de la droite vectorielle D d'équation $x+y-z = 0$ et $2y + z = 0$, puis celle du plan Π d'équations $3x-y+2z = 0$.
- c) Montrer que s est une symétrie de E dont on précisera les caractéristiques géométriques.

CHAPITRE 2 : ESPACES AFFINES

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ est muni du repère canonique cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A_1 = (-1, 1, 1)$, $A_2 = (1, -1, 0)$, $A_3 = (0, 1, 1)$ et $B = (2, -1, 0)$.

- 1) Montrer que les points A_1, A_2 et A_3 sont non alignés.
- 2) Déterminer une équation du plan affine \mathcal{P} passant par A_1, A_2 et A_3 .
- 3) Le point B appartient-il à \mathcal{P} ?
- 4) Donner une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} passant par B et perpendiculaire à \mathcal{P} .
- 5) Déterminer l'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{P} .

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien $E = \mathbb{R}^3$ est muni du repère canonique cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A = (2, 1, -1)$, $B = (1, -2, 0)$, $M = (x, y, z)$ les droites affines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ définies par les systèmes :

$$(\mathcal{D}_1) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -9 + 3t \\ z = -5t + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\mathcal{D}_2) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ -2x + 18y - 11z = 0 \end{cases} \quad \text{Et}$$

$$\mathcal{D}_3: \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

- a) Obtenir l'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , celle de \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 , puis celle de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_3 .
- b) Donner une équation du plan affine \mathcal{P}_1 passant par A et parallèle à \mathcal{D}_1 et à \mathcal{D}_2 .
- c) Donner une équation du plan affine \mathcal{P}_2 passant par B et perpendiculaire à \mathcal{D}_3 .
- d) Obtenir l'intersection de \mathcal{P}_1 avec la droite $\mathcal{D} = (1, 0, -2) + \mathbb{R}(1, 0, -1)$.

EXERCICE 3

L'espace affine euclidien $E = \mathbb{R}^3$ est muni du repère canonique cartésien

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{d}_1 = (-1, 0, 1)$, $\vec{d}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{d}_3 = (1, -1, 1)$, le point $A = (2, -1, 0)$, la droite affine $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{d}_3$ et le plan vectoriel $\Pi = \mathbb{R}\vec{d}_1 + \mathbb{R}\vec{d}_2$.

Déterminer l'expression analytique de :

- a) La projection p sur \mathcal{D} parallèlement à Π , en déduire celle de la symétrie s associée à p .
- b) La symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{D} .

CHAPITRE 3 : COURBES PARAMETREES

Pour tous les exercices, le référentiel est le plan affine euclidien orienté muni du repère $\mathbb{R} = (O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe.

EXERCICE 1

Pour chacune des courbes paramétrées, se limiter à réduire le domaine d'étude.

$$1) \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad , \quad 2) \gamma(t) = (\cos 2t, \cos 3t) \quad ,$$

$$3) \quad \gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$$

EXERCICE 2

Etudier graphiquement et représenter chacune des courbes paramétrées, on précisera les points doubles éventuels et leurs tangentes.

$$1) \gamma(t) = \left(\frac{1}{2}(t^2 - 2t), \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t\right)$$

$$1) \gamma(t) = \left(\frac{1}{t^2-1}, \frac{t^2}{t-1}\right) \quad , \quad 3) \quad \gamma(t) = (e^{t-1} - t, t^3 - 3t)$$

EXERCICE 3

Etudier graphiquement et représenter chacune des courbes paramétrées définies par l'équation polaire $\rho = f(\theta)$.

$$1^{\text{er}} \text{ cas} \quad \rho = \sin(3\theta)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas} \quad \rho = \ln \theta$$

$$3^{\text{ème}} \text{ cas} \quad \rho = \frac{\cos(2\theta)}{1-2\cos\theta}$$